This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

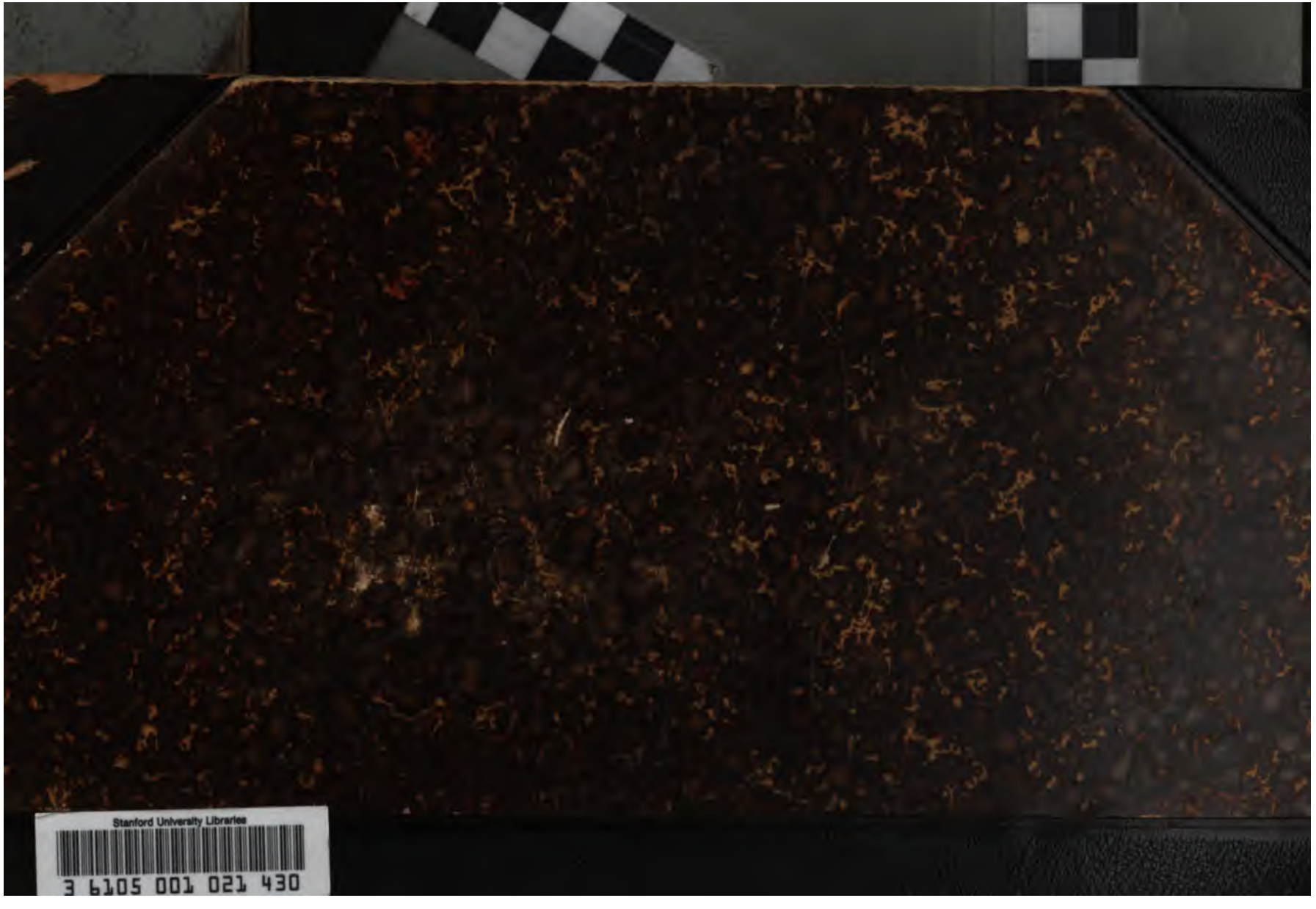
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

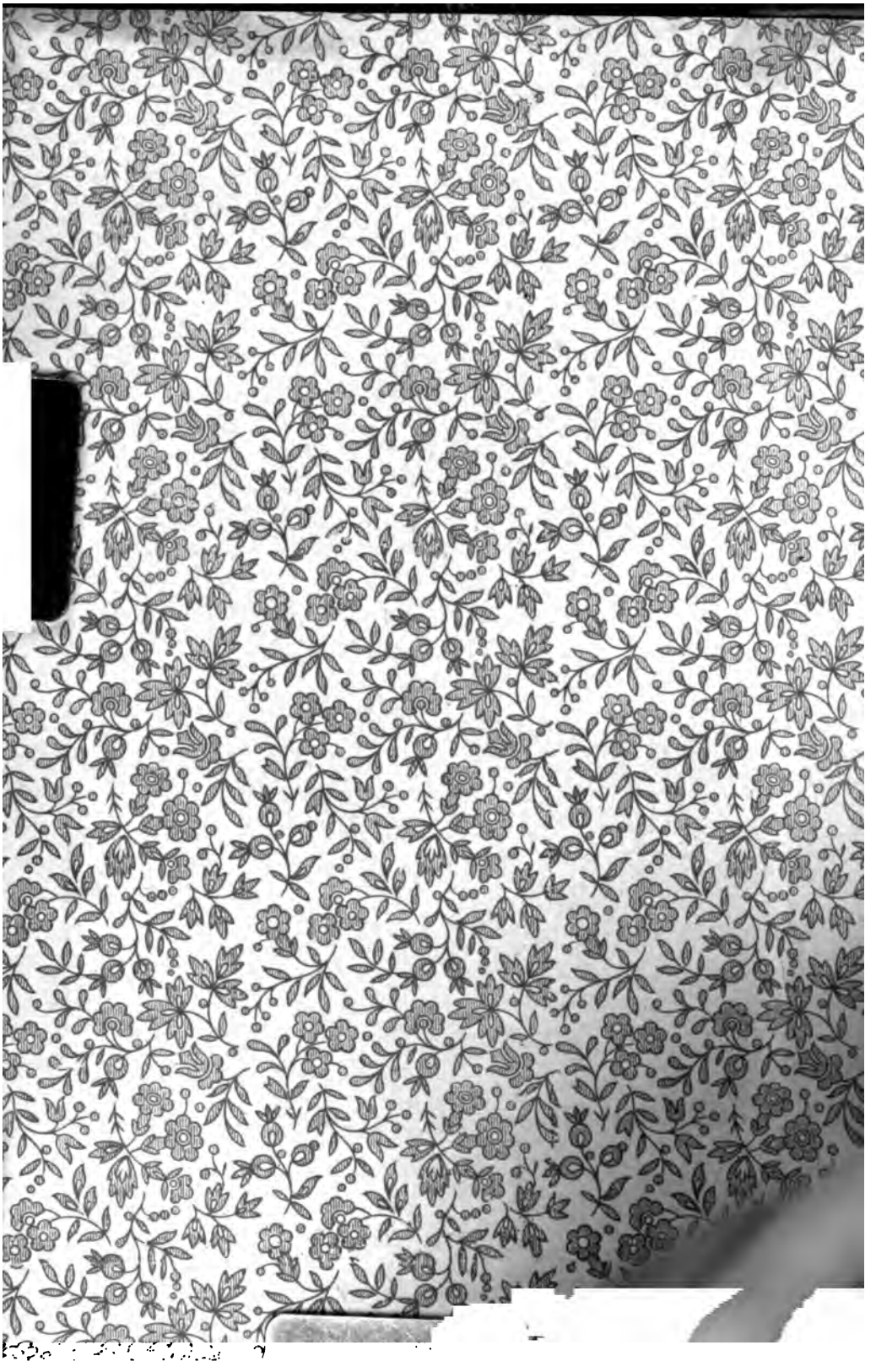
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

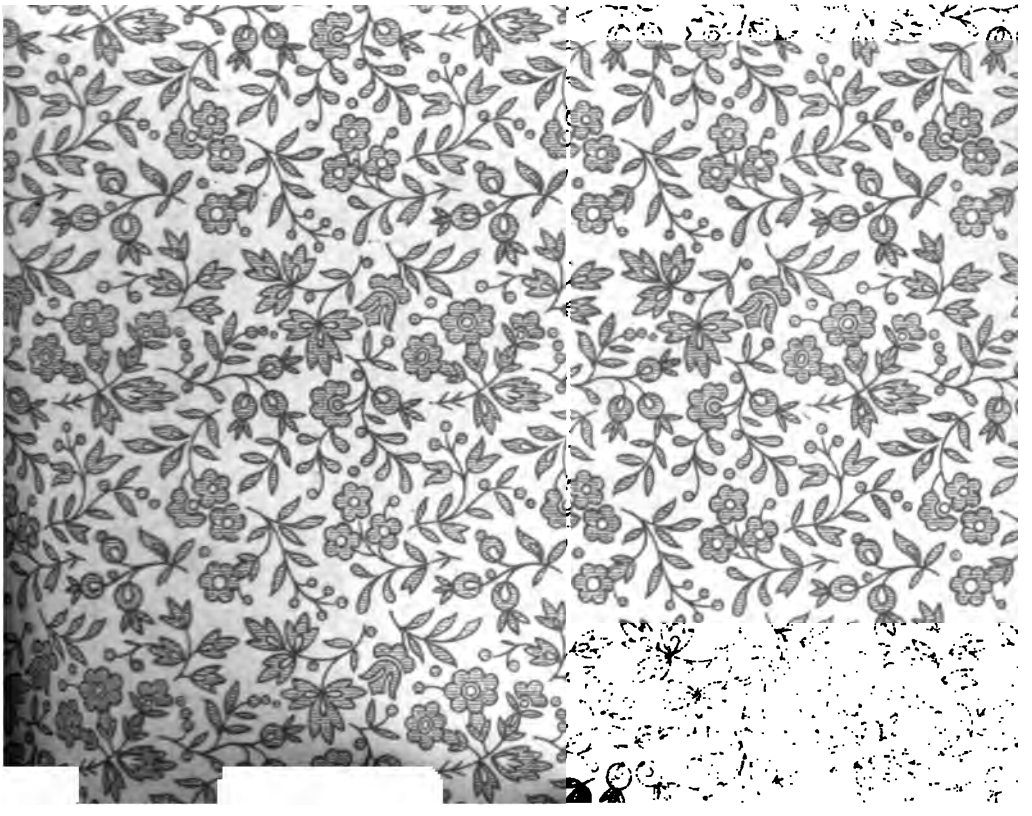
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


Stanford University Libraries
3 6105 001 021 430





MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck** zu München. Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XLI. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1893.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a 28336

Inhalt des einundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Baur, L., in Darmstadt. Die Dedekind-Weber'schen Ideale in einem hyperelliptischen Körper 491

Burkhardt, H., in Göttingen. Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen 309

—— Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Dritter Theil 313

Busche, E., in Bergedorf bei Hamburg. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden 591

Doehlemann, K., in München. Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche 545

Franklin, F., in Baltimore. Bemerkung über einen Punkt in Riemann's „Theorie der Abel'schen Funktionen" 308

Fricke, R., in Göttingen. Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen . 443

Hamburger, M., in Berlin. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen 1. O. zwischen zwei Variabeln. (Auszug aus einem Briefe an A. Mayer.) 597

Hermite, Ch., in Paris. Sur une extension de la formule de Stirling . . 581

Hurwitz, A., in Zürich. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich 403

Kneser, A., in Dorpat. Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen 344

—— Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven 349

Koenigsberger, L., in Heidelberg. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungssysteme 260

Korteweg, D. J., in Amsterdam. Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung 286

Maurer, L., in Strassburg. Ueber Functionen einer reellen Variabeln, welche Derivirte jeder Ordnung besitzen 377

Molien, Th., in Dorpat. Ueber Systeme höherer complexer Zahlen . . . 83

Pochhammer, L., in Kiel. Bemerkungen über das Integral $\overline{\Gamma}(a)$ 157

—— Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen 167

—— Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten 174

—— Ueber fünf Doppelintegrale 179

—— Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x)$ 197

Seite

Ritter, E., in Frankfurt a/M. Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze 1

Scheffers, G., in Leipzig. Ueber die Reducibilität complexer Zahlensysteme 601

Schur, F., in Aachen. Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen 509

Staude, O., in Rostock. Ein Beitrag zur Discussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes 219

Stäckel, P., in Halle. Ueber die Reduction eines Problems der Dynamik auf hyperelliptische Integrale 571

Story, W. E., in Worcester, Mass., U. S. A. On the Covariants of a System of Quantics 469

Zeuthen, H. G., in Kopenhagen. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée 539

Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze.

Von

Ernst Ritter in Cassel.

Einleitung.

Nachdem man durch das Studium der Kreisbogenpolygone und insbesondere durch das Beispiel der elliptischen Modulfunctionen auf die Existenz einer ganzen Classe allgemeinerer eindeutiger Functionen einer Variablen aufmerksam geworden war, die bei einer gewissen Gruppe linearer Substitutionen der Veränderlichen in sich selbst übergehen, ist es das Verdienst des Hrn. Poincaré, die Theorie dieser Functionen in allgemeinster Weise in Angriff genommen und namentlich explicite Bildungsgesetze für dieselben in Gestalt convergenter unendlicher Reihen angegeben zu haben*).

Wenn ich nun nach jenen epochemachenden scharfsinnigen Veröffentlichungen des genannten Autors mich doch unterfange, denselben Gegenstand nochmals aufzunehmen, so geschieht dies, weil ich hoffe, durch Hereinziehen gewisser neuer Gesichtspunkte und formeller Ansätze nicht nur die Entwicklungen und Resultate Poincaré's in ein helleres Licht zu stellen, sondern auch die ganze Theorie zu vertiefen und zu erweitern.

Hierbei handelt es sich zunächst um eine Revision der wenig systematischen und den Zusammenhang der einzelnen Sätze untereinander nicht klar genug hervortreten lassenden Darstellung Poincaré's *von dem Standpunkte der geometrischen Functionentheorie aus.* Für diese meine functionentheoretische Betrachtungsweise waren insbesondere die Ideen massgebend, welche Hr. F. Klein in seiner Abhandlung: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" (Math. Ann. 21, 1882) zur Grundlage der Theorie der automorphen Functionen macht.

Ich trenne dabei, im Gegensatz zu Hrn. Poincaré, scharf das,

*) Comptes rendus: 1881. I. p. 333, 395, 859, 957, 1198, 1274; II. p. 1484. 1882. I. p. 163, 1038, 1166; II. p. 626. — Mathematische Annalen Bd. 19, 20 (1881—82). — Acta mathematica, Bd. 1 (2 Abh.), 3, 4, 5 (1882—84).

was aus den allgemeinen Principien folgt, von dem, was der besonderen Darstellung dieser Functionen durch Reihen von automorphem Bildungsgesetze angehört. Denn in Wahrheit überschätzen die französischen Mathematiker das Verdienst der Darstellung durch die Poincaré'schen Θ-Reihen. Z. B. die Existenz der automorphen Functionen, glaubt Hr. Poincaré, könne man nur durch seine explicite Darstellung beweisen, wie er dies unumwunden ausspricht sowohl am Schluss seiner Abhandlung: „Mémoire sur les fonctions fuchsiennes" (Acta math. Bd. 1), wie in seiner Schrift: „Notice sur les travaux scientifiques de H. Poincaré", Paris 1887 (Seite 19, Zeile 14 v. u. bis 5 v. u.). An beiden Stellen ist er in Folge einer ungenauen Kenntniss der einschlägigen Untersuchungen der Hrn. H. A. Schwarz und C. Neumann der Meinung, dass man die Existenz der automorphen Functionen nur im symmetrischen Falle aus den bewiesenen allgemeinen Existenzsätzen herleiten könne, obwohl schon damals Hr. Klein in Bd. 21 der Mathematischen Annalen (Schluss des § 8) die wahre Sachlage auseinandergesetzt hatte. Ich verwende daher einen grösseren Abschnitt im ersten Theile meiner Arbeit auf den Nachweis, dass das richtig verstandene Beweisverfahren von Schwarz und Neumann sich ohne Weiteres auf unsern Fall übertragen lässt. — Ja Hr. Humbert*) geht sogar so weit, dass er vermittelst der Sätze über die automorphen Functionen, die doch erst Anwendungen oder andere Ausdrucksweisen für die Riemann'schen Sätze über die algebraischen Functionen sind, rückwärts wieder die algebraischen Sätze beweist; denn etwas anderes ist es nicht, wenn er vermittelst der automorphen Functionen die algebraischen Curven untersucht. Uebrigens beziehen sich diese Humbert'schen Arbeiten wesentlich auf höheres Geschlecht, und kommen also bei meiner vorläufigen Beschränkung auf das Geschlecht 0 noch nicht in Betracht.

Ausserdem ist es aber noch ein neues Princip, dessen Einführung die wahre Natur der Poincaré'schen „fonctions thétafuchsiennes" bezw. „fonctions thétakleinéennes" mit besonderer Klarheit erkennen lässt, ich meine *die Anwendung homogener Variablen*, wie sie von Hrn. F. Klein in diesen Theil der Functionentheorie eingeführt ist**). Dieselbe ge-

*) Humbert: Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. (Journ. de Math. sér. 4, t. 2. 1886). Einen ähnlichen Standpunkt nimmt Hr. Biermann ein (Berichte der Wiener Akademie XCII, 1885). Andererseits entwickelt Hr. Phragmén neuerdings von sich aus gerade diejenigen Ideen betr. die Existenzbeweise, von denen Hr. Klein l. c. 1882 ausgegangen war (Acta mathematica, Bd. 14, 1890: Remarques sur la théorie de la représentation conforme p. 227—229).

**) Siehe insbesondere die von Hrn. Fricke bearbeiteten Vorlesungen Hrn. Klein's über elliptische Modulfunctionen, Bd. I, Schlussbemerkungen (1890), wo überhaupt der Unterschied der Klein'schen und der Poincaré'schen Betrachtungsweise dargelegt wird.

stattete mir, statt der Poincaré'schen Functionen eine allgemeinere Classe von Formen zu betrachten, von denen die Poincaré'schen Θ-Functionen nur einem speciellen Falle entsprechen, nämlich die *uneigentlich* automorphen Formen, d. h. solche Formen, welche bei Anwendung einer Gruppe ganzer binärer Substitutionen der homogenen Variablen sich nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Aufstellung dieser Formen und die allgemeine Untersuchung ihrer Eigenschaften ist wesentlich neu, und nimmt den zweiten Theil meiner Arbeit ein.

Im dritten Theile endlich schliesse ich mich etwas enger an die Poincaré'schen Untersuchungen an, indem ich zeige, dass man auch diese allgemeineren (uneigentlich automorphen) Formen durch Reihen darstellen kann, welche Poincaré's Θ-Reihen entsprechen, und dass von diesen Reihendarstellungen ganz analoge Sätze gelten, wie von den ursprünglichen Reihen, natürlich mutatis mutandis. Dieser letzte Theil ist zugleich eine Revision der Poincaré'schen Reihenentwicklungen vom formentheoretischen Standpunkte aus, welche zeigen soll, wie viel einfacher und übersichtlicher sich alle Formeln und Sätze gestalten, wenn man nicht, wie Poincaré, einem Punkte, nämlich dem ∞-fernen Punkte, eine überflüssige Sonderstellung zuweist; dieser letzte Theil hat daher nicht nur den Zweck der Verallgemeinerung der Poincaré'schen Entwickelungen, sondern auch den Zweck, dieselben für directe formentheoretische Untersuchungen anwendbar zu machen. Denn in der That bereitet es zunächst oft grosse Mühe, aus den Sätzen des französischen Mathematikers das Wesentliche von dem abzusondern, was auf Rechnung des ∞-fernen Punktes zu setzen ist. — Dabei habe ich mich natürlich gar nicht im Einzelnen an den Gang Hrn. Poincaré's binden können, so dass die Congruenz mit ihm nur eine sachliche ist.

Die Beschränkung auf das Geschlecht 0 ist nur eine vorläufige, durch Rücksichten der Einfachheit und leichteren Verständlichkeit gebotene. Andererseits ist auch die Theorie der „fonctions zétafuchsiennes" und „fonctions zétakleinéennes" einer ganz entsprechenden formentheoretischen Behandlung fähig, wie diejenigen der Θ, und ermöglicht auch bei ihnen manche sachlichen Erweiterungen und Verallgemeinerungen.

Da ich im Folgenden nicht nur allgemeine Ideen meines hochverehrten Lehrers, des Hrn. Prof. F. Klein, in ausgiebiger Weise verwerthe, sondern häufig auch specielle Untersuchungen und Ergebnisse der von ihm in Göttingen von 1890—1891 gehaltenen Vorlesungen um des Zusammenhanges und des Verständnisses willen ausführlich wiedergeben muss, so will ich, um nicht fortwährend dieselben Citate einfügen zu müssen, diese Quelle stets durch ein (K) andeuten.

I. Theil.

Functionentheoretische und gruppentheoretische Grundbegriffe.

§ 1.

Fundamentalbereich und Gruppe einer automorphen Function vom Geschlechte 0.

Es sei in der Ebene einer complexen Variablen ζ ein gewisser schlichter, oder sich selbst theilweise überdeckender Bereich gegeben (Fig. 1), welcher durch einen aus $2n$ Stücken bestehenden zusammenhängenden Curvenzug begrenzt ist. Dieser Bereich werde dadurch zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit im Sinne des Hrn. F. Klein („Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie". Math. Ann. 21) dass immer je zwei aufeinanderfolgende Randstücke vermöge einer loxodromischen, elliptischen oder parabolischen linearen Substitution*) zusammengeordnet sind, welche einen ihrer Fixpunkte in der von den beiden Randstücken gebildeten Ecke besitzt. Diese n linearen Substitutionen sollen der Be-

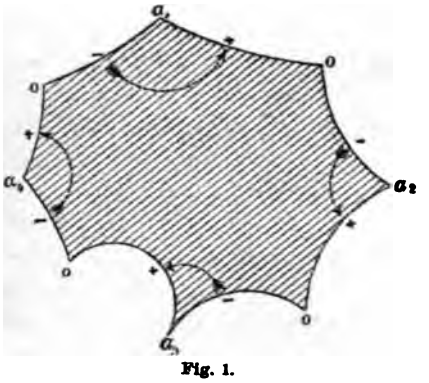


Fig. 1.

*) Im Falle einer hyperbolischen Substitution würde der Bereich an der betr. Stelle nur scheinbar, in Folge einer unzulässigen Zerschneidung der Mannigfaltigkeit, geschlossen sein. (Vergl. Klein: Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereiches. Math. Ann. Bd. 40, 1891). In Wahrheit kann man die scheinbare Ecke durch eine sog. erlaubte Abänderung des Bereichs leicht in eine offene Stelle verwandeln, und sieht dann, dass der Bereich jenseits dieser offenen Stelle entweder noch weitere Ecken besitzen, oder sich durch dieselbe hindurch unendlich oft einen ringförmigen Bereich überdeckend winden muss. (Fig. 2). Der erste Fall ordnet sich sofort, wenn er nicht einem höheren p entspricht, meinen Betrachtungen ein, den zweiten schliesse ich um der Einfachheit willen, da ich später doch nur einfache Ueberdeckungen der Ebene in Rücksicht ziehe, von vornherein von der Betrachtung aus.

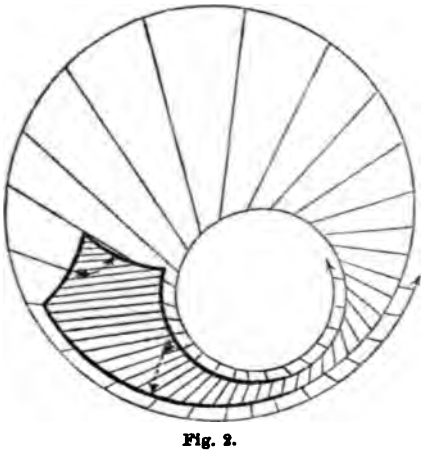


Fig. 2.

dingung genügen: $S_1 S_2 \ldots S_n = 1$. Jeder der Punkte $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ist dann für sich ein Punkt der Mannigfaltigkeit, die mit 0 bezeichneten Punkte dagegen stellen nur einen einzigen Punkt derselben vor. Die Summe der Winkel an den Ecken 0 muss in Folge der angegebenen Relation zunächst nur ein Multiplum von 2π sein, sie ist $= 2\pi$, wenn man einen nicht singulären Punkt der Mannigfaltigkeit zum Punkte 0 gewählt hat, was immer möglich ist, und für das Folgende stets vorausgesetzt werden möge.

Die so definirte Mannigfaltigkeit ist eine solche vom Geschlechte 0: man biege nämlich den Bereich im Sinne der analysis situs so zusammen, dass immer je zwei entsprechende Kanten je mit den entsprechenden Punkten in Zusammenhang treten. Dann erhält man eine unberandete geschlossene Fläche im Raum, und zwar bei unserem Bereiche eine solche vom Geschlechte 0. Auf dieser entspricht dem ursprünglichen Rande des Bereichs der ζ-Ebene ein Querschnittsystem, welches aus n von dem Punkte 0 nach den Punkten $1, 2, \ldots, n$ hinlaufenden Einschnitten besteht. Man sieht daraus zugleich, da man auf einer Mannigfaltigkeit vom Geschlechte 0 mit n singulären Punkten immer ein solches Querschnittsystem construiren kann, *dass unser oben beschriebener Bereich der ζ-Ebene der allgemeinste vom Geschlechte* 0 *mit linearer Kantenzusammenordnung ist.*

*Unter einer automorphen Function des gegeben gedachten Fundamentalbereichs verstehe man jetzt eine analytische Function von ζ, welche auf demselben durchaus eindeutig ist und keine wesentlich singulären Punkte besitzt.**) Eine solche muss also insbesondere in entsprechenden Punkten des Randes gleiche Werthe besitzen.

Um die analytische Fortsetzung einer solchen Function zu erforschen, wende ich die Substitution S_i, welche je eine Kante in die entsprechende Kante überführen, dazu an, um den Fundamentalbereich selbst zu reproduciren.

Eine automorphe Function des Bereiches nimmt dann in allen Nachbarbereichen, wie in allen andern durch wiederholte Anwendung der S_i entstehenden Bereichen immer wieder in jedem Punkte denselben Werth an, wie in dem entsprechenden Punkte des Ausgangsbereiches (Princip der analytischen Fortsetzung, Math. Ann. 21 l. c.).

Wir haben also Functionen von ζ, die sich bei gewissen linearen Substitutionen von ζ reproduciren, — daher der Name *automorphe* Functionen.

---

*) Bezüglich der Bedeutung dieser Einschränkung vergl. Klein-Fricke, Modulfunctionen I. p. 585 ff. Die so definirten Functionen könnte man im Gegensatz zu allgemeineren Functionen mit wesentlich singulären Punkten im Fundamentalbereiche *algebraisch automorphe* Functionen nennen; da ich mich aber hier nur mit solchen beschäftigen werde, möge der Zusatz „algebraisch" wegbleiben.

Diese automorphen Functionen können zunächst sowohl vieldeutig, wie eindeutig sein. Eben hierin liegt die grössere Allgemeinheit, die Hrn. Klein's Ansatz vor dem Poincaré'schen voraus hat; Hr. Poincaré muss sich bei seinem Ausgangspunkte durchaus auf eindeutige Functionen beschränken, wie wir dies in der Folge auch thun, obwohl ein Theil unserer Betrachtungen, z. B. der Existenzbeweis, für die allgemeineren Fälle ungeändert gültig bleibt.

Welche Bedingungen muss nun der Ausgangsbereich erfüllen, damit die zugehörigen automorphen Functionen eindeutige Functionen ihres Argumentes ζ seien? Offenbar ist hierfür nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die verschiedenen, im Allgemeinen unendlich vielen durch Vervielfältigung aus dem Ausgangsbereiche entstehenden Bereiche die ζ-Ebene, oder auch nur einen Theil derselben, nur einfach überdecken, dass also jeder Bereich, der überhaupt über den Ausgangsbereich hinübergreift, Punkt für Punkt mit ihm zusammenfällt (K). *Zu dem Zwecke ist nothwendig, dass*

1) *der Bereich selbst keinen Theil der Ebene mehrfach überdeckt,*

2) *dass die Winkel bei* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *entweder aliquote Theile von* 2π, *oder* $= 0$ *sind,*

3) *dass die Substitutionen* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *sämmtlich elliptisch oder parabolisch sind,* von der Form:

$$S_i) \quad \frac{\zeta' - \alpha_i}{\zeta' - \beta_i} = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} \cdot \frac{\zeta - \alpha_i}{\zeta - \beta_i}, \quad \text{bezw.} \quad S_i') \quad \frac{1}{\zeta' - \alpha_i'} = \frac{1}{\zeta - \alpha_i'} + \gamma_i'.$$

Diese Bedingungen sind aber wohlverstanden noch lange nicht hinreichend, ausser im Falle $n = 3$. Allgemeinere Fundamentalbereiche der geforderten Art sind von Hrn. Poincaré als Fundamentalbereiche seiner „groupes fuchsiens" untersucht worden, und darüber hinaus von Hrn. F. Klein durch seine Methode der Variation der Constanten und der Ineinanderschiebung erzeugt worden. Ich kann hier auf alle diese Fragen nicht näher eingehen, sondern nur diejenigen Eigenthümlichkeiten solcher Gebietseintheilungen hervorheben, welche functionentheoretisch besonders wichtig sind.

In diesem Sinne gebe ich entgegen den jedenfalls nur vorläufigen Eintheilungen des Hrn. Poincaré eine solche Classification dieser Gebietseintheilungen, wie sie sich nach meiner Ansicht functionentheoretisch als nothwendig erweist.

Da die Bereiche im allgemeinen in unendlicher Anzahl in der ζ-Ebene — oder besser, auf der ζ-Kugel — nebeneinander liegen, so müssen sie sich in gewissen Punkten in unendlich grosser Anzahl häufen, wobei sie selbst unendlich klein werden. Je nach der Anordnung dieser Punkte, welche ich Grenzpunkte nenne, kann man folgende Arten von Gebietseintheilungen unterscheiden:

1) *Gebietseintheilungen ohne Grenzcurven:*
   a) *ohne Grenzpunkte,*
   b) *mit einem Grenzpunkte,*
   c) *mit zwei Grenzpunkten,*
   d) *mit unendlich vielen Grenzpunkten.*
2) *Gebietseintheilungen mit Grenzcurven:*
   a) *Gebiet einfach zusammenhängend,*
   b) *Gebiet von unendlich hohem Zusammenhange.*

Unter 1a) findet man nur die Gebietseintheilungen der regulären Körper:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}.$$

Für alle diese Fundamentalbereiche, und nur für diese ist die Zahl

$$q = 1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right) > 0.$$

Zum Falle 1b) führen nur folgende Zusammenstellungen:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\infty}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Im Falle 1c) müssen die $\frac{1}{l_i}$ die Werthe haben:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

In diesen letzten beiden Fällen 1b) und 1c) ist

$$q = 1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right) = 0,$$

und die zugehörigen automorphen Functionen lassen sich auf die elliptischen Functionen zurückführen.

Da die unter 1a), 1b), 1c) gehörigen Functionen schon längst eingehend untersucht sind, *so werde ich im Allgemeinen mein Hauptaugenmerk auf die übrigen Fälle richten, für welche durchweg*

$$q = 1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right) < 0$$

ist.

In Betreff des Zusammenhangs des von den Bereichen überdeckten Gebietes ist zu bemerken, dass man isolirte Grenzpunkte immer als Oeffnungen in dem Gebiete anzusehen hat, so dass das Gebiet nur in den Fällen 1a), 1b), 2a) einfachen, im Falle 1c) zweifachen, und in den Fällen 1d) und 2b) unendlich hohen Zusammenhang aufweist.

Besitzt das überdeckte Gebiet nur einfachen Zusammenhang, so sind die Relationen

$$S_1 S_2 \ldots S_n = 1, \qquad S_i^{l_i} = 1 \quad .$$

die einzigen zwischen den Erzeugenden bestehenden Relationen. Zeigt aber das Gebiet höheren Zusammenhang, so müssen noch weitere Relationen bestehen, die alle nothwendig die Form haben:

$$\prod_{x_\nu} S_{x_\nu} = 1.^*)$$

Die ersten will ich *primäre*, die letztern aber, die nur bei höherem Zusammenhange sich finden, *secundäre Relationen* nennen.

Von einander unabhängige secundäre Relationen können nur in endlicher Zahl bestehen, da jede von ihnen die Zahl der Constanten der Gruppe mindestens um 1 verkleinern muss.

§ 2.

Die eindeutigen Functionen des gegebenen Bereiches und der Nachweis ihrer Existenz (K).

Es sei irgend ein Fundamentalbereich der oben beschriebenen Art gegeben. *Als einfachste durch ihn veranlasste automorphe Function kann man eine solche auf ihm eindeutige Function ansehen, welche jeden ihrer Werthe auf demselben ein und nur einmal annimmt.* Eine solche automorphe Function, vorausgesetzt, dass sie existirt, will ich mit s bezeichnen.

Diese Function s wird dann das analytisch leisten, was ich oben nur im Sinne der analysis situs durch Zusammenbiegen der Ränder des Fundamentalbereichs bewirkt hatte: nämlich sie wird den Fundamentalbereich derart auf eine s-Ebene abbilden, dass dem Rande des Bereichs ein Einschnittsystem, wie in Fig. 3, und zusammengehörigen Punkten des Randes gerade gegenüberliegende Punkte auf dem positiven und dem negativen Ufer des betreffenden Einschnittes entsprechen.

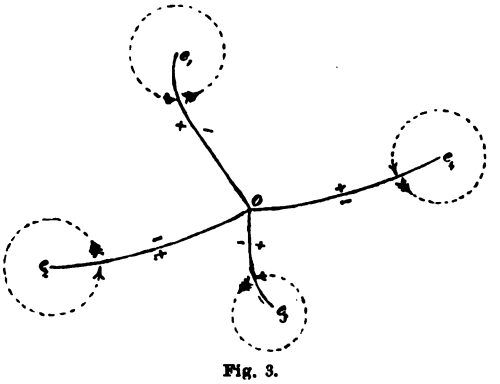


Fig. 3.

ζ ist auf der so aufgeschnittenen s-Ebene eindeutig, und zwar sind alle seine Werthe durch die Punkte des gegebenen Fundamentalbereichs repräsentirt. Ueberschreitet man jedoch einen der Einschnitte, so gelangt ζ in einen der benachbarten Bereiche. Bei unbegrenzter analytischer Fortsetzung ist daher ζ eine vieldeutige Function von s,

*) Vgl. Dyck: Gruppentheoretische Studien. Math. Ann. 20, p. 31 (1882).

und zwar entspricht irgend einem z in jedem der Bereiche der ζ-Ebene je ein Punkt, und diese Punkte gehen alle aus irgend einem derselben durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe hervor. Wenn z eine Umkreisung etwa des Punktes e_i in positivem Sinne ausführt, so erleidet dasjenige ζ, welches im Ausgangsbereiche liegt, die Substitution S_i, ein ζ, welches etwa in dem Bereiche T liegt, die Substitution $T^{-1}S_iT$. Will man den Verlauf von $\zeta(z)$ durch eine Riemann'sche Fläche über der z-Ebene versinnlichen, so hat man dieselbe so zu construiren, dass sie nur in den Punkten e_i verzweigt ist, und zwar so, dass in e_i immer je l_i Blätter cyklisch zusammenhängen. Bestehen keine secundären Relationen, so sind dies die einzigen Blätterzusammenhänge. In jedem Falle ist die Riemann'sche Fläche regulär verzweigt, da jeder Bereich der ζ-Ebene, und also auch jedes Blatt der Riemann'schen Fläche mit allen andern gleichberechtigt ist.

Die Grenzpunkte des Polygonnetzes sind für die Function $z(\zeta)$ wesentlich singuläre Stellen. Sind die Grenzpunkte zu Grenzcurven gehäuft, so bilden diese letzteren natürliche Grenzen für die Function $z(\zeta)$. *Der Gültigkeitsbereich der Function $z(\zeta)$ ist nur der von dem Polygonnetz überdeckte Theil der ζ-Ebene.*

Da mit Hilfe dieser Function z sich alle andern automorphen Functionen desselben Bereichs zusammensetzen lassen, wie wir noch näher ausführen werden, so kommt alles darauf an, *die Existenz der Function z zu beweisen.* In welcher Weise ich hierin die Leistungsfähigkeit der deutschen Functionentheorie zu vertheidigen habe, das habe ich bereits in der Einleitung auseinandergesetzt.

Ich will den Beweisgang nur für die hier in Betracht kommenden Specialfälle im Umriss angeben, also für die automorphen Functionen vom Geschlechte 0; in allen allgemeineren Fällen ist ja das Verfahren dasselbe, nur dass man bei höherem p unmittelbar nicht eine automorphe Function selbst, d. h. eine algebraische Function der Mannigfaltigkeit, sondern vielmehr ein Integral 2. Gattung darstellt, und aus solchen Integralen 2. Gattung erst die automorphen Functionen linear zusammensetzt.

Ich trenne ζ und z je in den reellen und imaginären Theil:

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad z = x + iy.$$

x ist dann ein logarithmisches Potential in der (ξ, η) Ebene, welches nur in einem Punkte des Fundamentalbereiches unstetig wird, wie

$$\Re\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_\infty}\right) = \frac{\cos\varphi}{r},$$

und welches den beiden Randbedingungen genügt, *dass in entsprechenden Punkten des Randes sowohl das Potential x selbst, wie das conjugirte Potential y je dieselben Werthe besitzt.*

Um ein solches Potential zu finden, hat man nun einfach die Ent-

wicklungen, die Herr H. A. Schwarz und Herr C. Neumann*) für geschlossene Flächen gegeben haben, zu übertragen.

Ich construire zu jedem der Eckpunkte α_i einen Kreis, der durch die Substitution S_i in sich selbst verschoben wird, und also congruente — congruent nenne ich Punkte und ganze Figuren, die sich durch eine der Substitutionen der Gruppe in einander überführen lassen, entsprechend einem schon in der Theorie der elliptischen Functionen üblichen Sprachgebrauche — Randpunkte verbindet**). Diese Kreise wähle ich so klein, dass sich keine zwei derselben schneiden. Ferner construire ich um die Punkte ε_i (Punkte 0 der Fig. 4) einander congruente Kreise, die ich so klein wähle, dass sie keinen der Punkte α_i enthalten, und dass sie sich gegenseitig nicht schneiden. Ist dadurch noch nicht der ganze Rand mit Kreisflächen überdeckt, so construire ich noch über den unbedeckten Stücken, welche natürlich paarweise congruent sind, Paare congruenter Kreise, welche so klein gewählt sind, dass sie weder einen der Punkte α_i noch ε_i enthalten, noch einander schneiden.

Ich behaupte zunächst: *man kann ein Potential finden, welches sich innerhalb des schraffirten Gebietes der Fig. 4 stetig und eindeutig verhält, an der innern, stark ausgezogenen Begrenzung beliebig vorgegebene endliche Werthe besitzt und längs der äusseren Begrenzung den für das Polygon vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügt.*

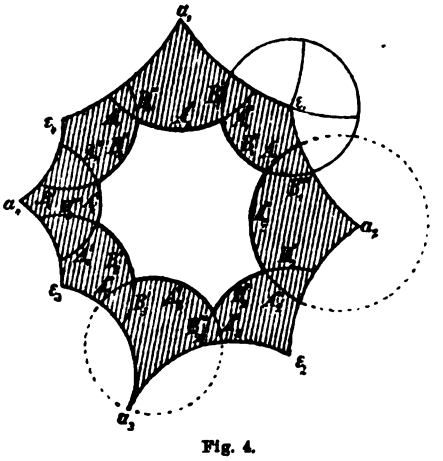


Fig. 4.

Ich will der Einfachheit halber voraussetzen, dass, wie in der Figur, die $2n$ um α_i und ε_i construirten Kreise genügen, den Rand vollständig zu überdecken, da im andern Falle der Beweis nur eine unwesentliche Modification erleidet.

Die an den Eckpunkten α_i liegenden schraffirten Kreissectoren kann man conform auf Vollkreise abbilden, derart, dass sich die beiden

*) Schwarz: Monatsberichte der Berliner Academie. 1870, p. 767—795. Ges. Werke p. 144—171. — C. Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Aufl. 1884. — Klein-Fricke: Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen I, p. 492 ff.

**) Im Falle eines elliptischen Eckpunktes schliesst ein solcher Kreis natürlich den Eckpunkt ein (α_2 in Fig. 4), durch einen parabolischen dagegen geht er hindurch (α_3 in Fig. 4).

von α_i auslaufenden Begrenzungen gerade mit entsprechenden Punkten zusammenschliessen, und dass das in's Polygon fallende Kreisstück $A_i' A_i'' A_i'''$ in die Peripherie des Vollkreises übergeht. Diese Abbildung wird durch die Function

$$Z = \left(\frac{\zeta - \alpha_i}{\zeta - \beta_i}\right)^{l_i},$$

bezw., wenn α_i eine parabolische Ecke ist, durch

$$Z = e^{\frac{2i\pi}{\gamma_i} \cdot \frac{1}{\zeta - \alpha_i}}$$

geleistet. Infolgedessen kann man für jeden der Sectoren ein Potential construiren, welches längs des Kreisbogens $A_i = A_i' + A_i'' + A_i'''$ vorgegebene Werthe besitzt, und längs der beiden Radialcurven die beiden Grenzbedingungen des Polygons befriedigt.

Die entsprechende Aufgabe kann man für die Gesammtheit der Sectoren an $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ lösen, nämlich ein Potential zu finden, das längs der in das Polygon fallenden Kreisbogenstücke $B_i = B_i' + B_i'' + B_i'''$ vorgegebene Werthe annimmt, und längs der Begrenzung des Polygons den Randbedingungen desselben genügt. Man übertrage nämlich einfach durch die betreffende lineare Substitution jeden der an $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ liegenden schraffirten Sectoren auf den congruenten Sector des um ε_1 beschriebenen Vollkreises, bilde für diesen dasjenige Potential, welches längs der Begrenzung desselben diejenigen Werthe annimmt, die auf den entsprechenden Bogenstücken B_i im Innern des Polygons vorgeschrieben waren, und übertrage das so gefundene Potential wieder rückwärts in die schraffirten Sectoren bei $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$.

Nunmehr habe ich die Mittel, um den „Grenzübergang durch alternirendes Verfahren" von Hrn. H. A. Schwarz anzuwenden behufs Auffindung eines Potentials, das längs der Stücke A_i'' und B_i'' beliebig vorgegebene Werthe besitzt, und längs des Polygonrandes die vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

Ich construire zuerst für jeden der Sectoren bei α_i ein Potential, welches bei A_i'' die vorgegebenen Werthe a_i, längs A_i', A_i''' beliebige Werthe, wir wählen die an den betreffenden Endpunkten von A_i'' vorgeschriebenen, besitzt.

Diese analytisch allerdings nicht zusammenhängenden Potentiale bezeichne ich mit dem gemeinsamen Namen x_0, so dass x_0 in jedem der n Sectoren das eben für diesen construirte Potential bedeutet; x_0 ist dann in jedem Sector ein Mittelwerth aus den Werthen des zugehörigen a_i.

x_0 nimmt nun längs der Bogen B_i', B_i''' gewisse Werthe x_0' an. Ich construire darauf für die Gesammtheit der Sectoren bei den ε_i ein Potential x_1, das längs der B_i', B_i''' die Werthe x_0', längs B_i'' die

daselbst vorgeschriebenen Werthe b_i besitzt. Dasselbe ist überall ein Mittelwerth der b_i und x_0'.

Dann construire ich wieder in den Sectoren bei α_i ein x_2, indem ich längs A_i'' die Werthe a_i, längs A_i', A_i''' aber die Werthe x_1' vorgebe, die x_1 daselbst besitzt, — darauf für die Sectoren bei ε_i ein x_3, welches längs B_i'' gleich b_i, längs B_i', B_i''' dagegen gleich x_2' wird, u. s. w.

Man erhält so eine Reihe von Potentialen x_0, x_1, x_2, . . ., die, wie man nach Schwarz leicht zeigt, in den Gebieten, welche mehreren Kreissectoren gemein sind, gegen dieselbe Grenzfunction x, in den übrigen gegen deren analytische Fortsetzung convergiren.

Diese Grenzfunction x ist ein Potential der zunächst verlangten Art. Zu bemerken ist, dass der Werth von x in irgend einem Punkte des schraffirten Gebietes mit Einschluss des Polygonrandes ein Mittelwerth der auf der innern Contur vorgeschriebenen Werthe ist. —

Nun behaupte ich ferner: *Ich kann ein Potential finden, welches an irgend einer Stelle ζ_∞ des noch unschraffirten Gebietes unstetig wird wie $\frac{\cos\varphi}{r}$, sonst im ganzen Polygone regulär verläuft, und am Rande die vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt.*

Zu dem Zwecke beschreibe ich um den Punkt ζ_∞ einen Bereich, der ganz innerhalb des Polygons liegt, den noch unschraffirten Theil desselben vollständig überdeckt, und für welchen man die Randwerthaufgabe zu lösen im Stande ist. Einen solchen Bereich kann man sich z. B. immer aus einer endlichen Anzahl von Kreisen zusammensetzen, da man ja für einen solchen die Randwerthaufgabe nach dem alternirenden Verfahren lösen kann.

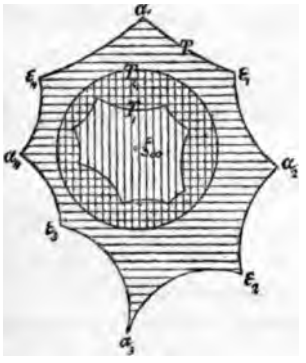


Fig. 5.

Es sei (Fig 5) T die Begrenzung des Polygons, T_1 die innere Begrenzung des früher schraffirten (jetzt wagrecht schraffirten) Gebietes, T_2 die T_1 ganz umschliessende Begrenzung des um ζ_∞ construirten Gebietes. S_1 sei der ausserhalb T_1 liegende, S_2 der innerhalb von T_2 liegende, und S der von T_1 und T_2 begrenzte S_1 und S_2 gemeinsame gürtelförmige Bereich.

Ich wende nun die „gürtelförmige Verschmelzung" der Herren Schwarz und Neumann an.

Ich construire nämlich der Reihe nach folgende abwechselnd in S_1 und S_2 überall stetigen Potentiale mit den Randbedingungen:

Randbedingungen.

	Gebiet	längs T	längs T_1	längs T_2
x_0	S_1	$x_0' = x_0 \quad y_0' = y_0$	$x_0 = + \frac{\cos\varphi}{r}$	
x_1	S_2			$x_1 = x_0 - \frac{\cos\varphi}{r}$
x_2	S_1	$x_2' = x_2 \quad y_2' = y_2$	$x_2 = x_1 + \frac{\cos\varphi}{r}$	
x_3	S_2			$x_3 = x_2 - \frac{\cos\varphi}{r}$
x_4	S_1	$x_4' = x_4 \quad y_4' = y_4$	$x_4 = x_3 + \frac{\cos\varphi}{r}$	
x_5	S_2			$x_5 = x_4 - \frac{\cos\varphi}{r}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Man sieht nun leicht nach der Beweismethode der genannten Forscher, dass die Reihe der Functionen

$$x_0, \; x_2, \; x_4, \; \ldots$$

sich innerhalb des Gebietes S derselben analytischen Grenz-Potentialfunction x nähert, wie die Reihe:

$$x_1 + \frac{\cos\varphi}{r}, \quad x_3 + \frac{\cos\varphi}{r}, \quad x_5 + \frac{\cos\varphi}{r}, \quad \ldots$$

und dass in den übrigen Gebieten diese Reihen der analytischen Fortsetzung dieses x zustreben.

Diese Function x ist nun das gesuchte Potential.

Aus x findet man auf bekannte Weise durch eine Quadratur das zugehörige y nämlich:

$$y = \int \left(- \frac{\partial x}{\partial \eta} \, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \xi} \, d\eta \right).$$

Nun bilde ich

$$z(\zeta) = x(\xi, \eta) + i y(\xi, \eta).$$

Damit ist die gesuchte Abbildungsfunction z thatsächlich hergestellt.

Die allgemeinste Function, welche den ζ-Bereich in der verlangten Weise auf eine z'-Ebene abbildet, ist, unter a, b, c, d beliebige Constanten verstanden:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese linearen Functionen von z sind offenbar ebensogut, wie z selbst, automorphe Functionen von ζ; und zwar sind sie alle miteinander gleichberechtigt, so dass man irgend eine beliebige Function aus der Schaar der z' der weiteren Betrachtung zu Grunde legen kann. —

Ich gebe nun gleich Sätze über die allgemeinste automorphe Function unseres Bereichs.

Eine beliebige automorphe Function sei $F(\zeta)$. Als Function von z muss $F(\zeta)$ eindeutig sein, und kann auch keine wesentlich singulären Punkte besitzen; *die allgemeinste automorphe Function unseres Bereichs ist also nothwendig eine rationale Function von z:*

$$F(\zeta) = \text{Rat}\,(z).$$

Umgekehrt ist, wie leicht zu sehen, *jede rationale Function von z eine automorphe Function von ζ.*

Da z die ganze Ebene gerade einfach überstreicht, wenn ζ den Fundamentalbereich durchläuft, so hat man den Satz:

Jede automorphe Function nimmt jeden ihrer Werthe im Fundamentalbereiche gleich oft an.

Die Grenzpunkte der Gebietseintheilung sind für jede automorphe Function wesentlich singuläre Stellen und die Grenzcurven natürliche Grenzen. —

Wir haben bislang wesentlich z als Function von ζ angesehen. Umgekehrt ist es auch wichtig, das Verhalten von ζ als Function von z näher zu beleuchten:

ζ ist eine mehrdeutige Function von z, und zwar sind alle Zweige gewisse lineare Functionen irgend eines Ausgangszweiges:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \alpha}{\gamma\zeta + \delta}.$$

Bildet man also einen Differentialausdruck, der sich gegenüber linearen Substitutionen invariant verhält, so wird dieser eine eindeutige Function von z sein müssen. Eine solche Differentialinvariante ist der bekannte „Schwarz'sche Differentialparameter“:

$$[\zeta]_z = \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)\right) - \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dz}\log\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)\right\}^2$$
$$= \frac{\frac{d^3\zeta}{dz^3}}{\frac{d\zeta}{dz}} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\frac{d^2\zeta}{dz^2}}{\frac{d\zeta}{dz}}\right)^2.$$

Wir sehen zu, wie sich dieser Ausdruck an den verschiedenen Stellen der z-Ebene verhält. Man hat zu unterscheiden:

1) Gewöhnliche Stellen z_0, wo

$$\zeta - \zeta_0 = (z - z_0)\left(a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots\right) \quad a_0 \gtrless 0,$$

2) Verzweigungsstellen e_i, wo

$$\frac{\zeta - \alpha_i}{\zeta - \beta_i} = (z - e_i)^{\frac{1}{i_i}}\left(b_0 + b_1(z - e_i) + b_2(z - e_i)^2 + \cdots\right) \quad b_0 \gtrless 0,$$

3) die Stelle $z = \infty$, wo

$$\zeta - \zeta_\infty = \frac{1}{z}\left(c_0 + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \quad c_0 \gtrless 0$$

ist. Es zeigt sich, dass an den Stellen z_0 sich $[\zeta]_z$ vollständig regulär verhält, dass es an der Stelle $z = \infty$ von der 4^{ten} Ordnung verschwindet, und dass es endlich an den Verzweigungsstellen e_i sich verhält wie

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i^2}\right)}{(z - e_i)^2}\left(1 + b_1'(z - e_i) + b_2'(z - e_i)^2 + \cdots\right).$$

Da $[\zeta]_z$ eine eindeutige Function von z ist und nach dem eben gesagten keine wesentlich singulären Stellen besitzt, so muss es eine rationale Function von z sein, und zwar von der Gestalt:

$$[\zeta]_z = \frac{2}{\prod_{i=1}^{i=n}(z - e_i)}\left\{G_{n-4}(z) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{l_i^2}\right)}{z - e_i}(e_i - e_1)(e_i - e_2)\cdots(e_i - e_n)\right\},$$

worin $G_{n-4}(z)$ eine ganze Function vom $(n-4)^{\text{ten}}$ Grade ist:

$$G_{n-4}(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_{n-4} z^{n-4},$$

und im Falle $n = 3$ wegfällt.

Von den Verzweigungswerthen e_i sind durch das ζ-Polygon und die Forderung der conformen Abbildung auf die z-Ebene nur die Doppelverhältnisse bestimmt, da man z ja auch durch $\frac{az + b}{cz + d}$ ersetzen kann.

Von den Coefficienten des Polynoms $G_{n-4}(z)$ sind durch das ζ-Polygon, wenn man die e_i noch beliebig lässt, die Invarianten bestimmt, wenn man aber drei der e_i festlegt, sind die Coefficienten selbst eindeutig gegeben, oder, anders ausgedrückt, es sind durch das ζ-Polygon die simultanen Invarianten der beiden Polynome $\prod_{i=1}^{i=n}(z - e_i)$ und $G_{n-4}(z)$ festgelegt.

Umgekehrt ist ζ durch diese Differentialgleichung nur bis auf eine *beliebige* lineare Substitution bestimmt. Alle Zweige ζ, die aus einem Ausgangszweige bei Umläufen des z entstehen, sind aber *specielle* lineare Functionen des Ausgangszweiges.

Die Function ζ mit ihren analytischen Fortsetzungen ist unter der allgemeinen Lösung der Gleichung nur enthalten.

Das Fundamentalpolygon ist durch die Differentialgleichung nur erst bis auf eine lineare Transformation bestimmt, (wobei ich äquivalente Fundamentalbereiche als identisch betrachte).

Alle Gruppen, die man durch eine lineare Transformation von ζ in einander überführen kann, liefern dieselbe Differentialgleichung.

§ 3.

Spaltung von z und ζ in homogene Variable. (K)

Aus all diesem ersehen wir, dass nicht allein z mit jeder linearen Function $\frac{az+b}{cz+d}$ gleichberechtigt ist, sondern auch ζ mit jedem linearen Ausdrucke $\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$. Das heisst geometrisch: es ist unwesentlich, sowohl, ob man die ζ-Ebene, wie, ob man die z-Ebene noch einer beliebigen linearen Substitution unterwirft. Dadurch kann man jeden Punkt der ζ-Ebene, wie der z-Ebene, zum ∞-Punkte machen. Der Punkt $\zeta = \infty$ oder $z = \infty$ nimmt also gar keine Ausnahmestellung ein.

In den Formeln tritt aber diese Gleichberechtigung des Punktes ∞ mit den übrigen Punkten nicht hervor, ähnlich, wie in der Cartesischen Coordinatengeometrie das ∞-ferne in einer für projective Betrachtungen unzweckmässigen Weise ausgezeichnet wird.

Diese Besonderheit des Coordinatensystems zu beseitigen, wird man ebenso wie in der analytischen projectiven Geometrie darauf ausgehen, sowohl die Variable ζ, als z, je in 2 Variable ζ_1, ζ_2 bezw. z_1, z_2 zu spalten, auf deren Verhältniss allein es dann ankommt, und von denen keine mehr ∞ wird, und die man ausserdem, um unbestimmte Werthe ihres Verhältnisses zu vermeiden, der Bedingung unterwirft, dass sie nicht gleichzeitig verschwinden sollen. Man setzt also:

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Man wird dann nicht mehr „Functionen" von ζ bezw. z, sondern „Formen" von ζ_1, ζ_2 bezw. von z_1, z_2 zu untersuchen haben. Speciell wird man ζ_1 und ζ_2 als Formen von z_1, z_2 und z_1, z_2 als Formen von ζ_1, ζ_2 betrachten.

Eine solche Spaltung des ζ in ζ_1, ζ_2 ist an sich natürlich auf unendlich viele Arten möglich; aber man wird sie so vornehmen, dass ζ_1, ζ_2 als Formen von z_1, z_2 möglichst einfache Eigenschaften besitzen, z. B. dass ζ_1, ζ_2 bei geschlossenen Umläufen der z_1, z_2 statt gebrochener ganze binäre lineare Substitutionen erleiden:

$$\zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2,$$
$$\zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2,$$

wo die α, β, γ, δ endliche Constanten sind, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist.

Eine solche Spaltung kann man in der That ausführen, und zwar thue ich dies in zwei Schritten: zuerst spalte ich ζ in zwei Variablen Z_1, Z_2, welche *Functionen* von z sind, und bei Umläufen des z sich linear substituiren, und dann verwandle ich Z_1, Z_2 durch Multiplication mit einer geeigneten Form von z_1, z_2 in zwei Formen ζ_1, ζ_2,

welche sich ebenfalls binär substituiren und ausserdem noch besonders zweckmässiges Verhalten zeigen.

Die erste Spaltung ist in bekannter Weise leicht auszuführen; man setze:

$$Z_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}} \qquad \zeta = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Diese Z_1, Z_2 erleiden in der That bei Umläufen des z ganze binäre Substitutionen, und zwar solche von der Determinante 1, *sog. „unimodulare Substitutionen".*

*Diese sich so substituirenden Z_1, Z_2 sind zwei specielle Zweige einer „binären Functionsschaar"**): *deren sämmtliche Zweige der folgenden linearen Differentialgleichung genügen:*

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + Z \cdot \frac{G_{n-4}(z) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{l_i^2}\right)}{z-e_i}(e_i-e_1)(e_i-e_2)\cdots(e-e_n)}{\prod_{i=1}^{i=n}(z-e_i)} = 0.$$

Aus Z_1, Z_2 gewinnt man jetzt die allgemeinsten sich ebenfalls linear substituirenden Formen ζ_1, ζ_2, deren Quotient ζ ist, indem man sie beide mit ein und derselben Form der Gestalt

$$\Phi(z_1, z_2) = \prod (ze_i)^{\varkappa_i} \cdot \mathrm{Rat}\,(z_1, z_2),$$

$$\left(e_i = \frac{e_i'}{e_i''}, \quad (ze_i) = z_1 e_i'' - z_2 e_i'\right)$$

multiplicirt.

Wie muss ich diese Form Φ wählen, damit ζ_1, ζ_2 möglichst zweckmässige Eigenschaften erhalten?

Man beachte folgendes bei der Einführung homogener Variablen immer massgebende Princip: Da man das ∞-Werden sämmtlicher vorkommenden Grössen vermeiden will, so wird man vor allen Dingen festsetzen, dass keine der homogenen Variablen ∞ werde; ferner aber wird man, um unbestimmte Werthe des Verhältnisses derselben zu vermeiden, simultanes Verschwinden der beiden Variablen ausschliessen. Solche Werthsysteme, in denen eine oder beide Variablen ∞ werden,

*) Hierunter versteht Hr. Klein den Inbegriff aller linearen Combinationen $c_1Z_1 + c_2Z_2$ zweier solchen linear unabhängigen Functionen Z_1, Z_2, deren sämmtliche Zweige lineare homogene Combinationen $\bar{c}_1\bar{Z}_1 + \bar{c}_2\bar{Z}_2$ zweier speciellen Zweige $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ sind. Als einen *Zweig der Schaar* bezeichnet er jeden einzelnen Zweig jeder in der Schaar enthaltenen Function $Z = c_1Z_1 + c_2Z_2$ mit bestimmten Werthen der c_1, c_2.

oder beide verschwinden, wird man als „unerlaubte Werthsysteme" bezeichnen; sie entstehen aus erlaubten Werthsystemen durch Multiplication oder Division mit einer unendlich kleinen Grösse.

Wir werden diesem Princip gemäss versuchen, Φ so zu bestimmen, dass ζ_1, ζ_2 nur erlaubte Werthsysteme durchläuft, wenn z_1, z_2 sich in erlaubten Werthsystemen bewegt. Es werden dann auch umgekehrt erlaubten Werthsystemen von ζ_1, ζ_2 nur erlaubte Werthsysteme von z_1, z_2 entsprechen — wobei man natürlich von vornherein Ausnahmen von diesem Verhalten in den wesentlich singulären Punkten der ζ-Ebene zulassen muss.

Wir müssen zu dem Zwecke das Verhalten der Schaar $c_1 Z_1 + c_2 Z_2$ an den einzelnen Stellen der z-Ebene untersuchen. Man findet:

An gewöhnlichen Stellen z_0 verschwindet ein und nur ein Zweig der Schaar, und zwar, wie $z - z_0$, und alle andern sind von 0 verschieden und endlich.

An der Stelle $z = \infty$ (die kein Verzweigungspunkt sein möge) *ist ein einziger Zweig endlich und von 0 verschieden, alle andern werden ∞ wie z.*

An einer Stelle e_i endlich giebt es zwei Zweige, welche folgende Entwicklungen haben:

$$Z_1 - \alpha_i Z_2 = (z-e_i)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l_i}\right)} \left(a_0 + a_1(z-e_i) + a_2(z-e_i)^2 + \cdots\right) \quad a_0 \gtrless 0,$$

$$Z_1 - \beta_i Z_2 = (z-e_i)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \left(a_0' + a_1'(z-e_i) + a_2'(z-e_i)^2 + \cdots\right) \quad a_0' \gtrless 0;$$

es verschwindet also ein Zweig wie $(z-e_i)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l_i}\right)}$, alle andern wie $(z-e_i)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)}$.

Wir haben jetzt Φ so zu wählen, dass von der Formenschaar $(c_1 Z_1 + c_2 Z_2)\Phi$ an jeder Stelle ein einziger Zweig verschwindet, alle andern dagegen endlich und von 0 verschieden sind. *Aus dieser Forderung ergiebt sich nun eindeutig:*

$$\Phi = c \cdot \prod (z\, e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2.$$

$$\zeta_1 = Z_1 \cdot \Phi = c \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}} \cdot \prod (z\, e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2,$$

$$\zeta_2 = Z_2 \cdot \Phi = c \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}} \cdot \prod (z\, e_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2.$$

Die so gewonnenen ζ_1, ζ_2 genügen in der That, wenn keine der Zahlen l_i unendlich gross ist, allen an die Spaltung gestellten An-

forderungen. Wenn dagegen etwa $l_1 = \infty$ ist, so werden bei e_1 alle linearen Combinationen von ξ_1, ξ_2 bis auf eine einzige, welche endlich bleibt, logarithmisch unendlich. Dann ist aber $\zeta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ ein wesentlich singulärer Punkt, ein Punkt der natürlichen Grenze, und in diesen zeigen die ξ_1, ξ_2 auch sonst ein von dem oben geforderten abweichendes Verhalten. Wir haben also das bemerkenswerthe Resultat:

Es ist immer eine und nur eine Spaltung von ζ in solche sich binär substituirende Variablen ξ_1, ξ_2 möglich, welche für alle nicht wesentlich singulären Stellen der ζ-Ebene bei erlaubten Werthen der z_1, z_2 nur erlaubte Werthe annehmen.

Hiermit bin ich in enge Beziehung zu den Festsetzungen getreten, welche Hr. Klein betreffs der Einführung homogener Variablen in die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung getroffen hat*).

Hr. Klein definirt insbesondere eine gewisse binäre Formenschaar:

$$\Pi = c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2$$

durch folgende Forderungen:

1) An jeder von n gegebenen Stellen $e_1', e_1''; e_2', e_2''; \ldots e_n', e_n''$ sollen zwei bestimmte (aber für die verschiedenen Stellen verschiedene) Zweige je folgendes Verhalten haben:

$$c_{11}^{(i)} \Pi_1 + c_{12}^{(i)} \Pi_2 = (z e_i)^{\lambda_i'} \mathfrak{P}'(z_1, z_2),$$
$$c_{21}^{(i)} \Pi_1 + c_{22}^{(i)} \Pi_2 = (z e_i)^{\lambda_i''} \mathfrak{P}''(z_1, z_2),$$

wo unter $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ eine an der betreffenden Stelle sich regulär verhaltende, weder verschwindende noch ∞ werdende Form von z_1, z_2 zu verstehen ist.

2) An allen andern Stellen soll dagegen ein einziger Zweig sich verhalten, wie $(z z_0)\, \mathfrak{P}'(z_1, z_2)$, alle andern, wie $\mathfrak{P}''(z_1, z_2)$.

Man erhält die allgemeinste derartige Formenschaar, indem man die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + Z \cdot \frac{G_{n-4}(z) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{1}{4}\left(1 - (\lambda_i' - \lambda_i'')^2\right)}{z - e_i} (e_i - e_1)(e_i - e_2) \cdots (e_i - e_n)}{\prod_{i=1}^{i=n} (z - e_i)} = 0$$

$$\left(G_{n-4}(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_{n-4} z^{n-4}\right)$$

definirte Functionsschaar multiplicirt mit:

*) Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. (Math. Ann. Bd. 38, pag. 144 ff., 1891); vergl. auch die eben dort voraufgehende Note von Hrn. Pick.

$$\Phi(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{i=n} (z\, e_i)^{\frac{\lambda_i' + \lambda_i'' - 1}{2}} \cdot z_2 .$$

Im Anschluss an die Bezeichnungsweise der Riemann'schen P-Function bezeichnet Hr. Klein dieselbe mit:

$$\Pi \left| \begin{matrix} e_1', e_1'' & e_2', e_2'' \cdots e_n', e_n'' \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_n' \\ \lambda_1'' & \lambda_2'' & \lambda_n'' \end{matrix} ; \; A_0, A_1, \cdots, A_{n-4}; \; z_1, z_2 \right|$$

und nennt die Grössen λ_i', λ_i'' die Exponenten, $A_0, A_1, \ldots, A_{n-4}$ die accessorischen Parameter der Schaar.

Der Grad der Formen der Schaar ist natürlich

$$q = 1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i' + \lambda_i'' - 1}{2} . -$$

Macht man den Grad q zu Null, so kommt man selbstverständlich zur gewöhnlichen Theorie der linearen Differentialgleichungen. Lässt man aber q von Null verschieden, so kann man, reelle l_i vorausgesetzt, unter den vorbezeichneten Π eines herausgreifen, welches darum als eine Normalform anzusehen ist, weil es allein dem für die Einführung homogener Variablen aufgestellten Princip entspricht, dass erlaubten Werthsystemen der z_1, z_2 nur erlaubte Werthsysteme entsprechen sollen. *Es ist dies:*

$$\Pi \left| \begin{matrix} e_1', e_1'' & e_2', e_2'' \cdots e_n', e_n'' \\ \frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_n} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} ; \quad A_0, A_1, \ldots, A_{n-4}; \; z_1, z_2 \right| .$$

Sein Grad in z_1, z_2 ist

$$q = 1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right),$$

also nach den Bemerkungen von Seite 7 in den weitaus meisten Fällen negativ.

Und nun ist die Sache augenscheinlich die, *dass unsere oben definirten ζ_1, ζ_2 Zweige eines so normirten Π sind.* —

Bei Umläufen von z um die e_i zeigen die so definirten ζ_1, ζ_2 nun folgendes Verhalten:

Wenn z_1, z_2 sich so bewegen, dass z einen geschlossenen positiven Umlauf um e_i macht, und dass z_1, z_2 ohne Umkreisung je ihres 0*-Punktes zu ihren Anfangswerthen zurückkehren, so erleiden ζ_1, ζ_2 die den Substitutionen auf Seite* 6 *entsprechenden binären Substitutionen:*

$$(\zeta' \alpha_i) = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} (\zeta \alpha_i) \qquad \alpha_i = \frac{\alpha_i'}{\alpha_i''},$$

$$(\zeta' \beta_i) = \quad (\zeta \beta_i) \qquad \beta_i = \frac{\beta_i'}{\beta_i''},$$

bezw. wenn α_i eine parabolische Ecke ist:

$$(\zeta' \alpha_i) = (\zeta \alpha_i),$$
$$(\zeta' \beta_i) = (\zeta \alpha_i) \cdot 2i\pi + (\zeta \beta_i),$$

wo β_i', β_i'' ihrem absoluten Werthe nach so zu bestimmen sind, dass

$$2i\pi = \gamma_i \cdot \frac{(\alpha_i \beta_i)}{\alpha_i''^2}$$

ist.

Hierbei machen ζ_1, ζ_2 keine Umläufe um ihre 0-Punkte. Lässt man aber z_1, z_2 ausserdem noch μ Umläufe jedes um seinen 0-Punkt ausführen, so werden auch ζ_1, ζ_2 als Formen q^{ten} Grades von z_1, z_2 jedes $\mu \cdot q$ Umläufe um seinen 0-Punkt machen, d. h. sie werden sich beide mit $e^{2i\pi \cdot \mu q}$ multipliciren.

§ 4.

Spaltung der linearen Substitutionen von ζ in ganze binäre Substitutionen. (K)

Hier ist der Ort, wo uns zuerst automorphe Formen entgegentreten.

Unter einer automorphen Form wird ganz im allgemeinen *eine Form von ζ_1, ζ_2 zu verstehen sein, welche sich nur mit gewissen Constanten multiplicirt, wenn man auf ζ_1, ζ_2 eine bestimmte Gruppe ganzer binärer linearer Substitutionen anwendet.* (K)

Statt Functionen zu untersuchen mit der Functionaleigenschaft:

$$F\left(\frac{\alpha_k \zeta + \beta_k}{\gamma_k \zeta + \delta_k}\right) = F(\zeta),$$

haben wir also Formen mit der Functionalgleichung:

$$F_R(\alpha_k \zeta_1 + \beta_k \zeta_2,\ \gamma_k \zeta_1 + \delta_k \zeta_2) = \varrho_k \cdot F_R(\zeta_1, \zeta_2).$$

Es erhebt sich naturgemäss die Frage, wie man einer Gruppe gebrochener linearer Substitutionen von ζ eine Gruppe ganzer binärer Substitutionen von ζ_1, ζ_2 zuordnen mag, und in welcher Beziehung die beiden Gruppen zu einander stehen. Ich will im Folgenden die erste Gruppe immer kurz als die „nichthomogene", die zweite als die „homogene Gruppe" benennen.

Die Spaltung ist natürlich an sich auf unbegrenzt viele Weisen möglich; denn jede Substitution

$$\zeta_1' = \varrho(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2) \qquad (\varrho \text{ beliebig})$$
$$\zeta_2' = \varrho(\gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2)$$

kann als Spaltung der Substitution:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

dienen.

Auch ist eine Form, welche in Bezug auf irgend eine binäre Gruppe automorph ist, ebenfalls automorph in Bezug auf jede Gruppe, deren Substitutionen sich nur durch die Werthe der ϱ von denen der ersten unterscheiden.

Man wird aber verlangen, *unter allen möglichen Spaltungen diejenigen auszuwählen, welche die einfachsten Eigenschaften, insbesondere die einfachste Beziehung zur nichthomogenen Gruppe besitzt.*

Man könnte insbesondere die Forderung stellen, dass die homogene Gruppe *isomorph**) zur nichthomogenen Gruppe sein sollte. Es wird sich später zeigen, und es ist dies ein besonders wichtiger Satz (K), dass dies nicht in allen Fällen möglich ist.

Dagegen ist es allgemein möglich, eine Spaltung der Gruppe in eine zu ihr *monodimorphe* homogene Gruppe auszuführen. Man stelle einfach die Forderung, dass alle Substitutionen der homogenen Gruppe die Determinante $+1$ besitzen. Eine solche Gruppe heisse dann eine „unimodulare" Gruppe.

Man erhält so zu jeder gebrochenen Substitution

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

die zwei binären Substitutionen:

$$\zeta_1' = \pm(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2),$$
$$\zeta_2' = \pm(\gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2),$$

welche sich durch eine simultane Multiplication mit -1 von einander unterscheiden.

---

*) Ich will nach einem Vorschlage von Hrn. Prof. Klein statt der umständlichen und nicht immer ausreichenden Bezeichnungen: „holoedrisch„ bezw. hemiedrisch u. s. w. isomorph" die Benennung „isomorph" auf den Fall des *holoedrischen* Isomorphismus zweier Gruppen einschränken, sonst aber von „Homomorphismus" sprechen, und diese Bezeichnung im gegebenen Falle noch dahin specialisiren, dass ich z. B. sage, eine Gruppe G_1 sei zur Gruppe G_2 „ditetramorph", wenn je 4 passend ausgewählten Substitutionen von G_1 immer zwei Substitutionen von G_2 entsprechen, oder in Zeichen $G_1(\overline{4|2})G_2$. Dann ist natürlich umgekehrt G_2 „tetradimorph" zu G_1, oder in Zeichen $G_2(\overline{2|4})G_1$. Für den *Isomorphismus* hat man dann das Zeichen $(\overline{1|1})$. Ferner nenne ich eine Gruppe G_1 „monomorph", „dimorph" u. s. w. zu G_2, wenn einer endlichen oder auch unendlichen Anzahl von Substitutionen der G_2 eine, zwei, u. s. w. Substitutionen der G_1 entsprechen, in Zeichen: $G_1(\overline{1|}\,)G_2$ bezw. $G_1(\overline{2|}\,)G_2$.

Insbesondere entspricht der Identität:

$$\zeta' = \zeta$$

einerseits die Identität:

$$\zeta_1' = \zeta_1, \qquad \zeta_2' = \zeta_2,$$

andererseits der simultane Zeichenwechsel:

$$\zeta_1' = -\zeta_1, \qquad \zeta_2' = -\zeta_2,$$

zwei Operationen, die ich als solche mit $+1$ bezw. -1 bezeichnen will.

Die unimodulare Gruppe ist also monodimorph zur nichthomogenen Gruppe.

Welches sind nun die Erzeugenden der unimodularen Gruppe, und welches die Relationen zwischen denselben?

Die Erzeugenden der nichthomogenen Gruppe haben die Gestalt:

$$S_i) \quad \frac{(\zeta'\alpha_i)}{(\zeta'\beta_i)} = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} \cdot \frac{(\zeta\alpha_i)}{(\zeta\beta_i)}, \quad \text{bezw.} \quad S_{i'}) \quad \frac{(\zeta'\beta_{i'})}{(\zeta'\alpha_{i'})} = \frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})} + 2i\pi.$$

Ich wähle von den beiden möglichen unimodularen Spaltungen einer jeden die folgende aus:

$$\mathbf{S}_i) \quad \begin{aligned} (\zeta'\alpha_i) &= e^{+\frac{i\pi}{l_i}}(\zeta\alpha_i), \\ (\zeta'\beta_i) &= e^{-\frac{i\pi}{l_i}}(\zeta\beta_i), \end{aligned} \quad \text{bezw.} \quad \mathbf{S}_{i'}) \quad \begin{aligned} (\zeta'\alpha_{i'}) &= (\zeta\alpha_{i'}), \\ (\zeta'\beta_{i'}) &= 2i\pi \cdot (\zeta\alpha_{i'}) + (\zeta\beta_{i'}). \end{aligned}$$

Die Relationen

$$S_i^{l_i} = 1$$

der elliptischen Erzeugenden verwandeln sich dann vermöge der verabredeten Bezeichnung in:

$$\mathbf{S}_i^{l_i} = -1.$$

Was aber wird aus der Relation

$$\prod_{i=1}^{i=n} S_i = S_1 S_2 \cdots S_n = 1?$$

Geht sie über in

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathbf{S}_i = +1,$$

oder in

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathbf{S}_i = -1?$$

Um das zu entscheiden, stelle ich folgende Ueberlegung an:

Da die Relation $\prod_{i=1}^{i=n} S_i = 1$ und die Einführung der $\mathbf{S}_i$ unabhängig von der Voraussetzung ganzzahliger l_i ist, so kann man den Fundamentalbereich unbeschadet der gesuchten Relation in ein geradliniges

Polygon mit elliptischer Kantenzuordnung deformiren. Die sämmtlichen Substitutionen haben dann als zweiten Fixpunkt den Punkt $\zeta = \infty$, d. h. $\zeta_2 = 0$. Die $\mathbf{S}_i$ lauten dann:

$$(\zeta' \alpha_i) = e^{+i\pi\lambda_i} \cdot (\zeta \alpha_i),$$

$$\zeta_2' = e^{-i\pi\lambda_i} \cdot \zeta_2,$$

und die an den Ecken α_i liegenden Polygonwinkel sind $2\lambda_i\pi$, während die Summe der Winkel an den übrigen Ecken 2π ist. Infolgedessen ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = n - 2.$$

Nun lautet aber die zweite Zeile der Substitution $\prod_{i=1}^{i=n} \mathbf{S}_i$:

$$\zeta_2' = c^{-i\pi \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i} \cdot \zeta_2,$$

d. h.

$$\zeta_2' = (-1)^n \cdot \zeta_2.$$

Daraus folgt als allgemeine Entscheidung auf unsere Frage:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathbf{S}_i = (-1)^n.$$

Was bei der homogenen Spaltung aus den secundären Relationen wird, lässt sich nicht allgemein entscheiden, sondern ist in jedem Falle besonders zu untersuchen. Wir wollen die entstehenden Relationen durch die Formeln bezeichnen:

$$\prod_{k_\nu} \mathbf{S}_{k_\nu} = (-1)^{m_\nu}.$$

Die Relationen der Erzeugenden $\mathbf{S}_i$ *lauten also*, um die Formeln zusammenzustellen:

$$\mathbf{S}_i^{l_i} = -1,$$

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathbf{S}_i = (-1)^n,$$

$$\prod_{k_\nu} \mathbf{S}_{k_\nu} = (-1)^{m_\nu}.$$

Man sieht, dass die in angegebener Weise ausgewählten $\mathbf{S}_i$ im Allgemeinen zur Erzeugung der gesammten unimodularen Gruppe genügen. Ausgenommen ist nur der Fall, wo sämmtliche Ecken parabolisch sind, und die Anzahl n der Ecken eine gerade Zahl ist, wenn zugleich die Zahlen m_ν in allen secundären Relationen sich als gerade Zahlen ergeben. In diesem Falle müsste man noch als weitere Erzeugende der homogenen Gruppe die Operation -1 hinzufügen, falls man es nicht

gerade als einen Vorzug ansehen will, dass man hier abweichend von den übrigen Fällen zu einer isomorphen Spaltung gelangt ist.

In welchen sonstigen Fällen auf andere Weise eine isomorphe Spaltung durchgeführt werden kann, wird sich gelegentlich im zweiten Theile dieser Abhandlung ergeben.

§ 5.

Beispiel der Hauptkreisgruppen.

Ich sagte im vorigen Paragraphen, bei der Frage, was beim Uebergang zu den S_i aus den secundären Relationen würde, dass man dies nicht allgemein entscheiden könnte, sondern in jedem Falle besonders untersuchen müsste. Dies schliesst aber nicht aus, dass man für gewisse Classen der Betrachtung besonders leicht zugänglicher Gruppen doch allgemeine Antworten geben kann.

Eine solche Classe besonders übersichtlicher Gruppen sind die *Hauptkreisgruppen*, d. h. diejenigen Gruppen, deren sämmtliche Substitutionen einen gewissen Kreis in sich selbst überführen.

Diejenigen Hauptkreisgruppen, für welche der Hauptkreis Grenzkreis ist, bieten keine Schwierigkeiten, da bei ihnen secundäre Relationen nicht existiren.

Unter den Gruppen, welche nur isolirte Grenzpunkte auf dem Hauptkreise besitzen, sind zwei Arten zu unterscheiden, nämlich:

1) solche, deren sämmtliche Substitutionen das Innere des Hauptkreises wieder in das Innere, das Aeussere in das Aeussere überführen.

2) solche, die auch Substitutionen enthalten, welche Inneres und Aeusseres des Hauptkreises vertauschen.

Unter den Poincaré'schen „groupes fuchsiens" sind ausser den Gruppen mit Grenzkreis nur Gruppen der ersten Art verstanden, so dass also die Hauptkreisgruppen, wie ich sie abgrenze, auch noch einen Theil der „groupes kleinéennes" umfassen.

Diejenigen Substitutionen, welche das Innere des Hauptkreises wieder in das Innere überführen, nenne ich positive, diejenigen, die Inneres und Aeusseres vertauschen, negative Substitutionen, weil die Transformation des Hauptkreises in die Axe der reellen Zahlen bei ersteren in Substitutionen mit reellen Coefficienten von positiver Determinante, die zweiten in ebensolche von negativer Determinante übergehen.

Wir unterscheiden also die beiden Fälle:

1) *Gruppen mit nur positiven Substitutionen.*

Der Fundamentalbereich einer Hauptkreisgruppe mit nur positiven Substitutionen, für welche der Hauptkreis nicht Grenzkreis ist, lässt sich immer so wählen, dass er durch den Hauptkreis in zwei symmetrische Hälften zer-

fällt (am einfachsten in der durch Fig. 6 a angedeuteten Weise, entsprechend dem in Fig. 6 b dargestellten symmetrischen Querschnittsystem der s-Ebene),

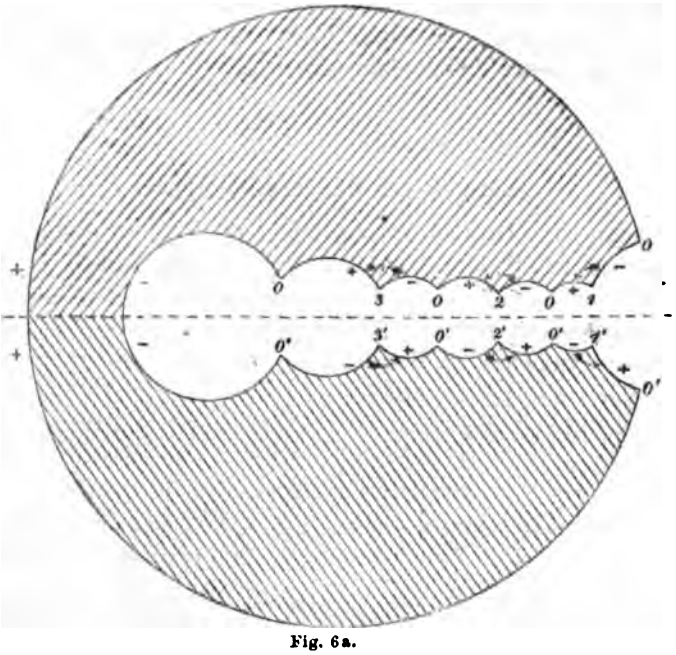


Fig. 6 a.

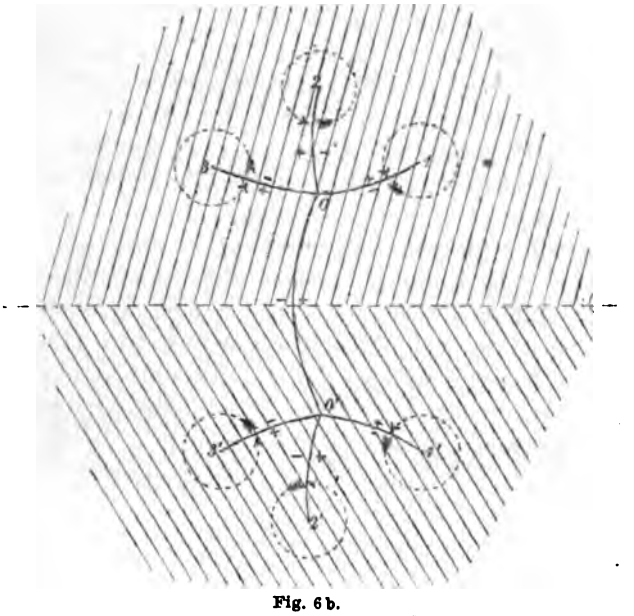


Fig. 6 b.

wobei die Erzeugenden, deren Anzahl eine gerade, etwa $2n$, ist:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n'}, \ldots, S_{2'}, S_{1'},$$

paarweise einander entgegengesetzt gleich sind, so dass immer:

$$S_i S_{i'} = 1$$

ist. Dieses sind zugleich die einzigen secundären Relationen.

Lautet S_i:

$$S_i) \quad \frac{\zeta' - \alpha_i}{\zeta' - \beta_i} = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} \cdot \frac{\zeta - \alpha_i}{\zeta - \beta_i},$$

(α_i und β_i symmetrisch zum Hauptkreis)

so lautet $S_{i'}$:

$$S_{i'}) \quad \frac{\zeta' - \beta_i}{\zeta' - \alpha_i} = e^{\frac{2i\pi}{l_i}} \cdot \frac{\zeta - \beta_i}{\zeta - \alpha_i}.$$

Daraus folgt für S_i und $S_{i'}$:

$$\mathbf{S}_i) \begin{cases} (\zeta' \alpha_i) = e^{+\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \alpha_i), \\ (\zeta' \beta_i) = e^{-\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \beta_i), \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{i'}) \begin{cases} (\zeta' \beta_i) = e^{+\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \beta_i), \\ (\zeta' \alpha_i) = e^{-\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \alpha_i), \end{cases}$$

und hieraus *als secundäre Relationen für die* **S**:

$$\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i'} = +1.$$

2) *Gruppen mit negativen Substitutionen.*

Die Gruppen mit negativen Substitutionen müssen stets eine gerade Anzahl negativer Erzeugenden besitzen; es sind dies elliptische Substitutionen von der Periode 2 mit Fixpunkten, welche auf dem Hauptkreise liegen. Die Mannigfaltigkeit, welche durch den Fundamentalbereich vorgestellt wird, besitzt stets eine Symmetrielinie, auf welcher insbesondere alle den negativen Erzeugenden entsprechenden singulären Punkte liegen, und zwar so nach Paaren angeordnet, dass die Punkte eines jeden Paares keine andern singulären Punkte zwischen sich enthalten.

Hier will ich mich der Kürze halber auf den einfachsten Fall beschränken, in dem alle singulären Punkte der Mannigfaltigkeit auf der Symmetrielinie liegen, also zwischen den Paaren der den negativen Erzeugenden entsprechenden singulären Punkte eingeordnet. Dann lässt sich die Gruppe durch die Spiegelung an der Symmetrielinie „erweitern"*), und diese erweiterte Gruppe kann man durch die wieder-

*) Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder p. 23 (1884). Klein-Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen I, p. 196 ff. (1890).

holte Spiegelung eines Kreisbogenpolygons an seinen Begrenzungen erzeugen. Dieses Kreisbogenpolygon hat eine Anzahl von Seiten auf dem Hauptkreise liegen, wie in Fig. 7, und seine übrigen Begrenzungskreisbogen stehen, ev. verlängert gedacht, auf dem Hauptkreise senkrecht.

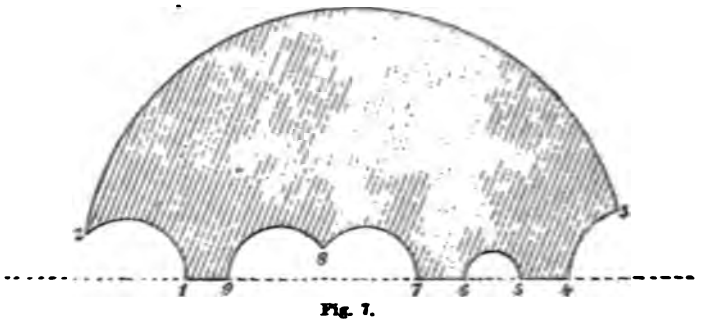


Fig. 7.

Die Erzeugenden der nicht erweiterten Gruppe lassen sich jetzt etwa in folgender Weise anordnen:

$$T_1, S_2, S_3, \ldots, S_{\nu_r-1}, T_{\nu_1}, T_{\nu_r+1}, S_{\nu_r+2}, \ldots, S_{\nu_2-1}, T_{\nu_2}, T_{\nu_2+1}, \ldots$$
$$\ldots, S_{\nu_{\varrho-1}-1}, T_{\nu_{\varrho-1}}, T_{\nu_{\varrho-1}+1}, \ldots, S_{n-1}, T_n,$$

wobei ich die positiven Erzeugenden mit S, die negativen mit T bezeichnet habe.

Die secundären Relationen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} T_1 S_2 S_3 \ldots S_{\nu_1-1} T_{\nu_1} &= 1, \\ (S_2 S_3 \ldots S_{\nu_1-1} T_{\nu_2})^2 &= 1, \\ (S_3 \ldots S_{\nu_2-1} T_{\nu_1})^2 &= 1, \\ \text{u. s. w.} & \\ \vdots & \\ T_{\nu_1}^2 &= 1. \end{aligned}\right\} I.$$

$$\left.\begin{aligned} T_{\nu_1+1} S_{\nu_1+2} \ldots S_{\nu_2+1} T_{\nu_2} &= 1, \\ (S_{\nu_2+2} \ldots S_{\nu_2-1} T_{\nu_2})^2 &= 1, \\ \vdots & \\ T_{\nu_2}^2 &= 1, \\ \text{u. s. w.} & \\ \vdots & \end{aligned}\right\} II.$$

$$\left.\begin{aligned} T_{\nu_{\varrho-1}+1} S_{\nu_{\varrho-1}+2} \ldots S_{n-1} T_n &= 1, \\ (S_{\nu_{\varrho-1}+2} \ldots S_{n-1} T_n)^2 &= 1, \\ \vdots & \\ T_n^2 &= 1. \end{aligned}\right\} P.$$

Diese Relationen enthalten (ebenso auch im Falle 1)) die primäre Relation

$$S_1 S_2 \ldots S_n = 1$$

schon in sich.

Man sieht, dass die Erzeugenden eine Reihe geschlossener Systeme bilden, jedes mit nur 2 negativen Erzeugenden, und zwar ϱ solcher Systeme:

$$I, II, \ldots, P.$$

Jedes dieser Systeme erzeugt für sich eine Gruppe derselben Art, und die Gesammtgruppe entsteht durch Ineinanderschiebung dieser einzelnen Gruppen. —

Aehnliche, wenn auch im Einzelnen complicirtere Verhältnisse herrschen auch im allgemeinsten Falle, nur lässt sich dann die Gruppe, obwohl sie symmetrisch ist, nicht aus Spiegelungen allein erzeugen. —

Für den Uebergang zu den $\mathbf{S}_i$ bedenke man, dass die erste Relation jedes Systems für das betreffende System primäre Relation ist; die 1 auf der rechten Seite geht daher über in:

$$(-1)^{\nu_1}, (-1)^{\nu_2-\nu_1}, \ldots, (-1)^{n-\nu_{\varrho-1}}.$$

Die folgenden Relationen enthalten sämmtlich auf der linken Seite das Quadrat einer Substitution der Gruppe: sie haben alle die Gestalt:

$$\cdot\, S^2 = 1;$$

dann muss S die Form haben

$$S) \quad \zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta-\alpha}.$$

Es sei nun irgend eine Spaltung von S:

$$\mathbf{S}) \begin{cases} \zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \\ \zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \alpha\zeta_2. \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathbf{S}^2) \begin{cases} \zeta_1' = -(-\alpha^2-\beta\gamma)\,\zeta_1 = -D\cdot\zeta_1, \\ \zeta_2' = -(-\alpha_2-\beta\gamma)\,\zeta_2 = -D\cdot\zeta_2, \end{cases}$$

unter D die Determinante der Spaltung $\mathbf{S}$ verstanden.

In unserm Falle ist die Determinante $= 1$, also

$$\mathbf{S}^2 = -1.$$

Die secundären Relationen lauten also:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \ldots \mathbf{T}_{\nu_1} &= (-1)^{\nu_1}, \\ (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \ldots \mathbf{T}_{\nu_1})^2 &= -1, \\ (\mathbf{S}_3 \ldots \mathbf{T}_{\nu_1})^2 &= -1, \\ &\vdots \\ \mathbf{T}_{\nu_1}^2 &= -1 \end{aligned}$$

u. s. w.

$$T_{\nu_{\varrho-1}+1} S_{\nu_{\varrho-1}-2} \cdots T_n = (-1)^{n-\nu_{\varrho-1}},$$
$$S_{\nu_{\varrho-1}-2} \cdots T_n)^2 = -1,$$
$$\vdots$$
$$T_n^2 = -1. -$$

Ebenso allgemein lässt sich der Fall erledigen, wo ausser den singulären Punkten auf der Symmetrielinie noch weitere vorhanden sind, die paarweise symmetrisch zu derselben liegen; doch darf ich mich hier bei diesen Beispielen nicht zu lange aufhalten, wie ich denn auch die Ableitung meiner Sätze unterdrücken musste.

II. Theil.

Allgemeine Sätze über die eindeutigen uneigentlich automorphen Formen.

§ 6.

Die Multiplicatorsysteme der eindeutigen automorphen Formen.

Von allen automorphen Formen sind die wichtigsten und kommen hier allein in Betracht die *unverzweigten* Formen. Ich nenne nämlich eine Form R^{ten} Grades an einer Stelle ξ_1, ξ_2 unverzweigt, wenn

$$(\xi\eta)^{-R} \cdot F_R(\xi_1 \xi_2) \quad (\eta\xi) \gtrless 0$$

eine an der Stelle $\zeta = \xi$ unverzweigte Function von ζ ist.

Diese überall unverzweigten automorphen Formen brauchen jedoch noch lange nicht *eindeutige* Formen von ζ_1, ζ_2 zu sein; *insbesondere ist jede, wenn auch unverzweigte, Form von nicht ganzzahligem Grade nothwendig mehrdeutig* (K), wie man sofort erkennt, wenn man ζ_1, ζ_2 jedes einen Umlauf um seinen O-Punkt machen lässt; denn dann multiplicirt sich die Form mit $e^{2i\pi \cdot R}$.

Dies ist auch sehr leicht erklärlich; das Gebiet der Variablen ζ_1, ζ_2 ist nämlich selbst dann, wenn das Gebiet der Variablen ζ einfach zusammenhängend ist, von höherem Zusammenhang (K). Ich ordne nämlich, um die Verhältnisse recht klar zu übersehen, jedem ζ in stetiger Aufeinanderfolge ein ganz bestimmtes erlaubtes Werthsystem ζ_1', ζ_2' zu, etwa durch die Formeln

$$\zeta_1' = \frac{\zeta}{1+|\zeta|},$$
$$\zeta_2' = \frac{1}{1+|\zeta|}.$$

Dann ist die Mannigfaltigkeit der ζ_1', ζ_2', da sie derjenigen der ζ eineindeutig und durchaus stetig zugeordnet ist, von gleichem Zusammenhang, wie das Gebiet der ζ. Die allgemeinen Werthsysteme ζ_1, ζ_2 sind dann:

$$\xi_1 = \xi_1' \cdot \tau,$$
$$\xi_2 = \xi_2' \cdot \tau.$$

Dabei kann τ alle complexen Zahlenwerthe, mit Ausnahme von 0 und ∞ annehmen, denn diese beiden, und nur diese, führen auf unerlaubte Werthsysteme von ξ_1, ξ_2. Während also die Mannigfaltigkeit der ξ_1', ξ_2' denselben Zusammenhang, wie die der ξ, besitzt, hat die Mannigfaltigkeit der τ stets zweifachen Zusammenhang.

Eine unverzweigte Form $F_R(\xi_1, \xi_2)$ zerspaltet sich in

$$\tau^R \cdot F_R(\xi_1', \xi_2').$$

Die Function τ^R ist, wenn R keine ganze Zahl ist, bei 0 und ∞ verzweigt, also, obwohl in dem Gebiet der erlaubten τ unverzweigt, doch in denselben mehrdeutig, während $F_R(\xi_1', \xi_2')$ vermöge unserer Annahme der Unverzweigtheit nur dann mehrdeutig sein kann, wenn das Gebiet der Variablen ξ mehrfachen Zusammenhang besitzt.

Automorphe Formen von gebrochenem Grade sind hiernach nothwendig mehrdeutig.

Eindeutige automorphe Formen können also nur von ganzzahligem Grade existiren. Die wirkliche Existenz derselben werde ich im § 8 durch die directe Aufstellung derselben nachweisen.

An dieser Stelle untersuche ich, die Existenz eindeutiger automorpher Formen vorausgesetzt, *wie die Constanten beschaffen sein müssen, mit denen die Formen sich bei Anwendung der einzelnen Substitutionen der unimodularen Gruppe multipliciren.*

Die Multiplicationen, welche eine eindeutige automorphe Form erleidet, müssen eine zur Substitutionsgruppe monomorphe Gruppe bilden, d. h. es muss jeder Substitution der Gruppe ein und nur ein Multiplicator ϱ entsprechen, wie man auch die betreffende Substitution aus den Erzeugenden zusammensetzen mag. Ein solches System von Multiplicatoren ϱ nenne ich ein „eindeutiges Multiplicatorensystem."

Wir haben dabei einen Unterschied zwischen Multiplicatorsystemen für Formen von geradem Grade und solchen für Formen von ungeradem Grade zu machen.

Nämlich Formen von ungeradem Grade müssen nothwendig, wenn man die Variablen einem simultanen Zeichenwechsel unterwirft, eine Multiplication mit -1 erleiden, während diejenigen von geradem Grade dabei ungeändert bleiben werden.

Die Multiplicatoren für ungerade Formen müssen daher genau denselben Relationen genügen, wie die Substitutionen $\mathbf{S}_i$ *der unimodularen homogenen Gruppe, d. h. den Relationen:*

$$\prod_{i=1}^{i=n} \varrho_i = (-1)^n, \quad \varrho_i^{l_i} = -1, \quad \prod_{x_\nu} \varrho_{x_\nu} = (-1)^{m_\nu},$$

dagegen die Multiplicatoren für gerade Formen denselben Relationen, wie die Gruppe der nichthomogenen S_i, also:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \varrho_i = 1, \quad \varrho_i^{l_i} = 1, \quad \prod_{x_\nu} \varrho_{x_\nu} = 1.$$

In beiden Fällen müssen die zu den elliptischen Substitutionen gehörenden Multiplicatoren Einheitswurzeln sein, ebenso für alle Substitutionen, die sich aus elliptischen Substitutionen zusammensetzen lassen.

Ich will nun zur Vermeidung unnöthiger Complicationen verlangen, dass die den parabolischen Erzeugenden entsprechenden ϱ_i, ebenfalls Einheitswurzeln seien, und zwar im Falle einer Form von ungeradem Grade:

$$\varrho_{i'} = e^{i\pi \cdot \frac{\nu_{i'}}{L}},$$

im Falle eines geradzahligen Grades:

$$\varrho_{i'} = e^{2i\pi \frac{\nu_{i'}}{L}},$$

wo unter L das kleinste gemeinsame Vielfache aller endlichen l_i verstanden sein soll. Denn es zeigt sich, dass wenn es überhaupt ein Multiplicatorsystem giebt, es immer auch ein solches giebt, wie ich es eben festsetze, und dass ich mit meiner vereinfachenden Beschränkung genau ebensoviel erreiche, wie mit den allgemeinsten möglichen Multiplicatoren.

Ich bespreche nunmehr die einzelnen Fälle:

1) Multiplicatorsysteme für ungeraden Grad.

Aus $\varrho_i^{l_i} = -1$ folgt für ϱ_i die allgemeine Form:

$$\varrho_i = e^{i\pi \cdot \frac{2\mu_i + 1}{l_i}};$$

dazu setze ich für die parabolischen Ecken:

$$\varrho_{i'} = e^{i\pi \cdot \frac{\nu_{i'}}{L}}.$$

Die hier eingeführten ganzen Zahlen μ_i, bezw. $\nu_{i'}$ müssen folgenden Congruenzen genügen:

I) $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2\mu_i + 1}{l_i} - \left(\text{bezw. } \frac{\nu_{i'}}{L}\right) \equiv n \pmod 2,$$

II) $$\sum_{x_\nu} \frac{2\mu_{x_\nu} + 1}{l_{x_\nu}} \left(\text{bezw. } \frac{\nu_{x_\nu}}{L}\right) \equiv m_\nu \pmod 2.$$

Ich will jetzt mein Hauptaugenmerk auf die primäre Relation I) richten, um zu untersuchen, unter welchen Umständen dieselbe eine Lösung in ganzen Zahlen μ_i bezw. $\nu_{i'}$ gestattet.

Ich unterscheide 3 verschiedene Fälle.

1) *Es seien ein oder mehrere l_i gleich* ∞. Dann kann ich für die endlichen l_i die μ_i ganz beliebig wählen, und kann dann noch, wenn nur *eine* parabolische Ecke vorhanden ist, auf eine einzige, sonst auf unendlich viele Weisen (von denen aber wegen der Beschränkung des L nur eine endliche Zahl wesentlich verschieden sind) die ν_i der Bedingung I) gemäss bestimmen. Die Congruenz I) ist also immer lösbar.

2) *Es seien sämmtliche l_i endlich und ungerade.* Dann genügt das System

$$\mu_i = \frac{l_i - 1}{2}$$

sicher der Relation I).

Doch braucht dies durchaus nicht das einzige Lösungssystem zu sein. Im Falle $l_i = 3, 5, 7$ ist allerdings $\mu_i = 1, 2, 3$ das einzige Lösungssystem; im Falle $l_i = 3, 5, 9$ dagegen hat man ausser $\mu_i = 1, 2, 4$ noch die beiden Lösungen $\mu_i = 0, 2, 7$ und $\mu_i = 2, 2, 1$.

Um die Gesammtheit der Lösungen besser zu überblicken, setze ich I) in eine Diophantische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten um. Ich schreibe zuerst statt I):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2\mu_i + 1 - l_i}{l_i} \equiv 0 \pmod 2,$$

oder, indem ich

$$\mu_i = \frac{1}{2}(l_i - 1) + \nu_i$$

setze, wo wegen der Voraussetzung $l_i \equiv 1 \pmod 2$ die ν_i wieder ganze Zahlen sind,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\nu_i}{l_i} = \text{ganze Zahl.}$$

Da jedes μ_i, also auch ν_i nur bis auf Vielfache von l_i zu bestimmen ist, so kann man die rechte Seite dieser Gleichung geradezu $= 0$ setzen.

Multiplicire ich nun noch mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen L der l_i, so ergiebt sich für die ν_i die Diophantische Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \nu_i \cdot \frac{L}{l_i} = 0.$$

Für diese ist nur dann $\nu_i = 0$ die einzige Lösung, wenn irgend $(n-1)$ beliebige der Zahlen $\frac{L}{l_i}$ als grössten gemeinsamen Theiler gerade die n^{te} der Zahlen l_i besitzen; dies ist aber nur dann der Fall, wenn $L = l_1 \cdot l_2 \ldots l_n$ ist, d. h. wenn alle Zahlen l_i zu einander theiler-

fremd sind. Im andern Falle giebt es stets noch weitere Lösungen der Congruenz.

3) *Es seien alle l_i endlich, und ein oder mehrere derselben gerade Zahlen.*

Man bedenke, dass, wenn es ein System von Zahlen μ_i' giebt, welches die linke Seite der Congruenz I) überhaupt zu einer ganzen Zahl macht, dass dann, wenn diese ganze Zahl noch nicht $\equiv n \pmod 2$ ist, immer auch mindestens ein System μ_i existirt, welches der Congruenz I) genügt: man braucht ja nur irgend ein μ_i', welches einem geradzahligen l_i entspricht, um $\frac{1}{2} l_i$ zu vermehren, um ein solches System μ_i zu gewinnen. Giebt es aber ein Lösungssystem, welches die linke Seite von I) zu einer ganzen Zahl macht, so giebt es auch ein anderes, welches dieselbe verschwinden lässt. Ich schreibe daher

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i \cdot \frac{2}{l_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{l_i} = 0,$$

oder, nach Multiplication mit L:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i \cdot \frac{2L}{l_i} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} = 0.$$

Die Zahlen $\frac{2L}{l_i}$ haben, da L das *kleinste* gemeinsame Vielfache der l_i ist, als grössten gemeinsamen Theiler 2. Die Congruenz I) ist also dann und nur dann lösbar, wenn

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{l_i} \equiv 0 \pmod 2$$

ist.

Es sei nun 2^q die höchste in den l_i vorkommende und also in L enthaltene Potenz von 2. Wenn dann eine gerade Anzahl der Zahlen l_i durch 2^q theilbar ist, so ist die Bedingung erfüllt, im andern Falle nicht erfüllt. Man hat also das Resultat:

Multiplicatorsysteme für Formen von ungeradem Grade können immer dann nicht existiren, wenn alle l_i endlich sind und zugleich eine ungerade Anzahl von ihnen durch die höchste in ihnen vorkommende Potenz von 2 theilbar sind. Im andern Falle sind, wenn keine secundären Relationen bestehen, solche Multiplicatorsysteme stets vorhanden, wenn dagegen secundäre Relationen existiren, hängt die Entscheidung noch von diesen ab.

Dieser Satz enthält zugleich die Antwort auf eine schon oben berührte Frage; nämlich auf die Frage, wann eine Substitutionsgruppe vom Geschlechte Null in eine zu ihr isomorphe homogene

Gruppe gespalten werden kann? Diese Frage ist von Hrn. F. Klein in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ S. 45—47, wo sie von fundamentaler Wichtigkeit ist, aufgeworfen und für den speciellen Fall der regulären Körper beantwortet worden. Ich werde hier eine weit allgemeinere Antwort geben können, die natürlich das Resultat von Hrn. Klein mit umfasst.

Die Erzeugenden der gesuchten isomorphen homogenen Gruppe seien s_i; diese können sich von den S_i nur durch eine simultane Multiplication unterscheiden. Bezeichne ich eine simultane Multiplication mit einer Constanten σ_i als Operation einfach mit σ_i, so ist also

$$s_i = \sigma_i S_i.$$

Damit nun die s_i denselben Relationen, wie die nichthomogenen S_i genügen, müssen offenbar die σ_i genau dieselben Relationen befriedigen:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \sigma_i = (-1)^n, \quad \sigma_i^{l_i} = -1, \quad \prod_{x_\nu} \sigma_{x_\nu} = (-1)^{m'},$$

wie die Multiplicatoren einer automorphen Form von ungeradem Grade. Daraus folgt:

Jedes Multiplicatorensystem für Formen von ungeradem Grade liefert eine zur nichthomogenen Gruppe isomorphe homogene Gruppe.

In denjenigen Fällen, wo ein solches Multiplicatorsystem nicht existirt, existirt auch keine isomorphe Spaltung der Gruppe.

2) Multiplicatorsysteme für geraden Grad.

Für Formen von geradem Grade habe ich wegen $\varrho_i^{l_i} = 1$ zu setzen

$$\varrho_i = e^{2i\pi \cdot \frac{\mu_i}{l_i}};$$

dazu bestimme ich für die parabolischen Ecken:

$$\varrho_{i'} = e^{2i\pi \cdot \frac{\nu_{i'}}{L}}.$$

Die Bedingungen, denen die ganzen Zahlen μ_i, $\nu_{i'}$ zu genügen haben, lauten jetzt:

I') $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\mu_i}{l_i} \left(\text{bzw. } \frac{\nu_{i'}}{L}\right) = \text{ganze Zahl},$$

II') $$\sum_{x_\nu} \frac{\mu_x}{l_{x_\nu}} \left(\text{bzw. } \frac{\nu_{x_\nu}}{L}\right) = \text{ganze Zahl},$$

wofür ich auch die Diophantischen Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten schreiben kann:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i \cdot \frac{L}{l_i} \equiv 0 \,(\text{mod. } L),$$

$$\sum_{\varkappa_\nu} \mu_{\varkappa_\nu} \cdot \frac{L_\nu}{l_{\varkappa_\nu}} \equiv 0 \,(\text{mod. } L_\nu),$$

worin unter L das kleinste gemeinsame Vielfache aller l_i, unter L_ν dasjenige der betreffenden $l_{\varkappa_\nu}$ verstanden ist.

Natürlich kann ich die μ_i stets, da sie ja nur (mod. l_i) bestimmt zu werden brauchen, so aussuchen, dass die linken Seiten der Congruenzen unmittelbar $= 0$ sind.

Das System

$$\mu_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nu_{i'} = 0$$

genügt immer allen Bedingungen. Daher haben wir:

$\varrho_i = 1$ ist stets ein mögliches Multiplicatorsystem für Formen von geradem Grade.

Eigentlich automorphe Formen von geradem Grade sind daher gruppentheoretisch stets möglich.

$\varrho_i = 1$ braucht aber durchaus nicht das einzige Multiplicatorsystem zu sein. Es zeigt sich, wenn man von den secundären Relationen absieht:

Nur dann ist $\varrho_i = 1$ das einzige Multiplicatorsystem, wenn alle Zahlen l_i endlich und zu einander theilerfremd sind.

Was das Verhältniss der Multiplicatorsysteme für gerade Formen zu der Spaltung einer Gruppe in binäre Substitutionen angeht, so gilt der Satz:

Jedes Multiplicatorsystem für gerade Formen liefert eine zur unimodularen Gruppe isomorphe Spaltung, und umgekehrt.

Zwischen den verschiedenen Multiplicatorsystemen für ungerade und gerade Formen bestehen gewisse einfache Beziehungen.

Ich will unter dem Producte zweier Multiplicatorsysteme ϱ_i und ϱ_i' das Multiplicatorsystem $\varrho_i'' = \varrho_i \cdot \varrho_i'$ verstehen. Dann gelten die Sätze:

Das Product mehrerer Multiplicatorsysteme ist wieder ein Multiplicatorsystem, und zwar für ungerade oder für gerade Formen, je nachdem eine ungerade oder gerade Anzahl der zusammensetzenden Multiplicatorsysteme solche für ungerade Formen sind. Dasselbe gilt für Quotienten.

Insbesondere ist mit ϱ_i auch ϱ_i^{-1} ein Multiplicatorsystem für ungerade oder für gerade Formen.

Ferner kann man den Satz aufstellen:

Giebt es Multiplicatorsysteme für ungerade Formen, etwa in der Anzahl τ:

$$M_1, M_2, \ldots M_\tau,$$

so giebt es ebensoviel Multiplicatorsysteme für gerade Formen, welche sich alle z. B. in folgender Weise aus denjenigen für ungerade Formen zusammensetzen lassen:

$$M_1^2, M_1 M_2, \ldots M_1 M_\tau.$$

Denn diese eben angegebenen sind in der That lauter verschiedene Multiplicatorsysteme für gerade Formen. Gäbe es nun noch irgend ein weiteres Multiplicatorsystem für gerade Formen, etwa M, so wäre $M \cdot M_1^{-1}$ ein in der Reihe $M_1, M_2, \ldots M_\tau$ nicht aufgezähltes Multiplicatorsystem für ungerade Formen. Also erschöpfen die angegebenen Multiplicatorsysteme in der That alle existirenden Multiplicatorsysteme für gerade Formen.

§ 7.

Beispiele isomorpher Spaltungen.

Auf Seite 34—35 habe ich gelegentlich die Frage nach der isomorphen Spaltung einer Gruppe in allgemeinster Weise wenigstens für die automorphen Gruppen mit einfach zusammenhängendem Gebiete mit beantwortet.

Aus meinem Criterium ergiebt sich ohne Weiteres das von Hrn. Klein gefundene Resultat, dass nämlich von den endlichen Gruppen nur

1) die Kreistheilungsgruppen: $\frac{1}{l_i} = \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}$,

2) die Diedergruppen mit ungeradem n: $\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\nu+1}$

eine isomorphe Spaltung ermöglichen, dass dagegen alle andern endlichen Gruppen:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\nu}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$$

eine isomorphe Spaltung nicht gestatten.

Dagegen ist in den Fällen der Gruppen mit nur einem Grenzpunkte, nämlich:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\infty}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

eine isomorphe Spaltung stets möglich.

Im Falle zweier Grenzpunkte:

$$\frac{1}{l_i} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

ist, wie ich hier ohne Beweis angebe, nur dann eine isomorphe Spaltung möglich, wenn in der secundären Relation

$$(S_2 S_3)^m = 1$$

die Zahl m eine gerade Zahl ist.

Als weiteres Beispiel will ich die Hauptkreisgruppen in Betracht ziehen.

1) Wenn der Hauptkreis Grenzkreis ist, so existiren keine secundären Relationen, und das Kennzeichen von S. 34 ist unmittelbar anwendbar.

2) Wenn der Hauptkreis nicht Grenzkreis ist, und die Gruppe nur positive Substitutionen enthält, so lauten die Relationen für die μ_i mit Rücksicht auf die Formeln $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i'} = +1$:

$$\frac{2\mu_i + 1}{l_i} + \frac{2\mu_{i'} + 1}{l_{i'}} \equiv 0 \pmod 2,$$

oder einfacher:

$$\mu_i + \mu_{i'} + 1 \equiv 0 \pmod{l_i}.$$

Man sieht, dass dieses Congruenzensystem, welches die primäre Relation mit enthält, stets Lösungen hat, und zwar in der Anzahl $l_1 l_2 l_3 \ldots l_n$.

Eine Hauptkreisgruppe vom Geschlechte 0 *ohne negative Erzeugenden, für welche der Hauptkreis nicht Grenzkreis ist, ist stets isomorph spaltbar und besitzt dementsprechend automorphe Formen von ungeradem Grade* (indem ich den erst in § 8 zu beweisenden Existenzsatz einstweilen vorausnehme).

3) In dem Falle derjenigen Hauptkreisgruppen mit negativen Substitutionen, bei denen alle singulären Punkte auf der Symmetrielinie der Mannigfaltigkeit liegen, folgen aus den Formeln von S. 29—30 die Relationen:

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu_1 + 1}{2} + \frac{2\mu_2 + 1}{l_2} + \frac{2\mu_3 + 1}{l_3} + \cdots + \frac{2\mu_{\nu_1} + 1}{2} &\equiv \nu_1 \pmod 2,\\
2\left(\frac{2\mu_2 + 1}{l_2} + \frac{2\mu_3 + 1}{l_3} + \cdots + \frac{2\mu_{\nu_1} + 1}{2}\right) &\equiv 1 \pmod 2,\\
2\left(\frac{2\mu_3 + 1}{l_3} + \cdots + \frac{2\mu_{\nu_1} + 1}{2}\right) &\equiv 1 \pmod 2,\\
&\vdots\\
2\left(\frac{2\mu_{\nu_1 - 1} + 1}{l_{\nu_1 - 1}} + \frac{2\mu_{\nu_1} + 1}{2}\right) &\equiv 1 \pmod 2,\\
2 \cdot \frac{2\mu_{\nu_1} + 1}{2} &\equiv 1 \pmod 2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Die letzte Relation ist identisch erfüllt. Ziehe ich von der zweiten an jede Relation von der vorhergehenden ab, so resultiren, nach Division mit 2 und Multiplication mit $l_2, l_3, \ldots l_{\nu_1 - 1}$ schliesslich die Congruenzen:

$$2\mu_2 + 1 \equiv 0 \pmod{l_2},$$
$$2\mu_3 + 1 \equiv 0 \pmod{l_3},$$
$$\vdots$$
$$2\mu_{\nu_1-1} + 1 \equiv 0 \pmod{l_{\nu_1-1}}.$$

Diese Congruenzen sind dann und nur dann lösbar, und dann nur auf eine Weise, vermittelst

$$\mu_i = \frac{1}{2}(l_i - 1),$$

wenn alle $l_2, l_3, \ldots l_{\nu_1-1}$ ungerade Zahlen sind.

Setzt man endlich diese Lösungen in die erste Relation ein, so geht dieselbe über in:

$$\mu_1 + \mu_{\nu_1} + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Diese gestattet zwei Lösungen, nämlich:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_{\nu_1} = 0$$

und

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_{\nu_1} = 1.$$

Genau dasselbe gilt für jedes andere der ϱ Bedingungssysteme, in welche das ganze System der secundären Relationen zerfällt.

Ich füge noch dem hiermit gefundenen Satze ohne Beweis hinzu, dass dann, wenn auch noch singuläre Punkte ausserhalb der Symmetrielinie existiren, deren Indices auf das Resultat ohne Einfluss bleiben. Man hat also den Satz:

Damit eine Gruppe der gedachten Art isomorph spaltbar sei, und automorphe Formen von ungeradem Grade existiren, ist hinreichende und nothwendige Bedingung, dass sämmtliche positiven Erzeugenden, welche auf der Symmetrielinie gelegenen singulären Punkten entsprechen, eine ungeradzahlige Periode besitzen. Es giebt dann, wenn 2ϱ negative Erzeugende vorhanden sind, im Ganzen 2^ϱ verschiedene Spaltungen und Multiplicatorsysteme.

Insbesondere ist die Gruppe stets isomorph spaltbar, wenn sie nur negative Erzeugende besitzt.

§ 8.

Darstellung der automorphen Formen durch z_1, z_2.

Bei Untersuchung der automorphen Functionen ergab sich als einfachste automorphe Function die Function $z(\zeta)$, und eine jede andere automorphe Function von ζ war eine rationale Function dieses z.

Kann man in ähnlicher Weise die automorphen Formen von ζ_1, ζ_2, die wir suchen, durch die Variablen z_1, z_2 darstellen und dadurch ihre Existenz in einfachster Weise sicherstellen?

Wie verhalten sich zunächst z_1, z_2 als Formen von ζ_1, ζ_2 bei Anwendung der unimodularen Substitutionen:

$$\mathbf{S}_i) \quad \begin{cases} (\zeta' \alpha_i) = e^{+\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \alpha_i), \\ (\zeta' \beta_i) = e^{-\frac{i\pi}{l_i}} (\zeta \beta_i)? \end{cases}$$

Es zeigte sich auf Seite 20, dass einem geschlossenen Umlauf der z_1, z_2 um e_i', e_i'' die Substitution $\mathbf{S}_i \cdot e^{\frac{i\pi}{l_i}}$ entspricht. Nun geht aber aus dieser Substitution die Substitution $\mathbf{S}_i$ hervor, indem man ζ_1, ζ_2 noch beide mit $e^{-\frac{i\pi^*}{l_i}}$ multiplicirt. Dabei müssen sich aber z_1, z_2 als Formen $\frac{1}{q}^{\text{ten}}$ Grades von ζ_1, ζ_2 mit $e^{-\frac{i\pi}{l_i}\cdot\frac{1}{q}+2i\pi\frac{\sigma}{q}}$ multipliciren, wobei die ganze Zahl σ von der Anzahl der Umkreisungen abhängt, die ζ_1 und ζ_2 gleichzeitig jedes um seinen 0-Punkt ausführen. Das Ergebnis ist also folgendes:

Bei Anwendung der unimodularen Erzeugenden $\mathbf{S}_i$ *unter gleichzeitigem* σ*-maligem Umlauf von* ζ_1 *und* ζ_2 *je um seinen* 0*-Punkt erfahren* z_1, z_2 *beide dieselbe Multiplication mit*

$$e^{-\frac{i\pi}{l_i}\cdot\frac{1}{q}-2i\pi\frac{\sigma}{q}}.$$

z_1 *und* z_2 *sind zwar mehrdeutige, aber unverzweigte automorphe Formen von* ζ_1, ζ_2 *mit gleichen Multiplicatorsystemen.* (K)

Aus der Definition von ζ_1, ζ_2 als Π-Formen von z_1, z_2 geht in der That hervor, dass nicht allein z_1, z_2, sondern sogar schon die Formen:

$$Z_i = (z e_i)^{\frac{1}{l_i}}$$

an den einzig möglichen Verzweigungspunkten a_i unverzweigt sind.

Denn, mögen an irgend einer Stelle x_1, x_2 der z-Ebene für zwei Zweige der Schaar ζ_1, ζ_2 die Entwicklungen existiren:

$$(\zeta\xi) = z_2^{\frac{1}{l}} (a_0 + a_1 (z-x) + a_2 (z-x)^2 + \cdots) \gtrless 0,$$

$$(\zeta\eta) = z_2^{\frac{1}{l}} (b_0 + b_1 (z-x) + b_2 (z-x)^2 + \cdots) \gtrless 0,$$

so folgen hieraus die Entwicklungen:

$$z - x = \left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{l}\left(c_0 + c_1\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{l} + c_2\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{2l} + \cdots\right)$$

$$(zx)\cdot(\zeta\eta)^{-\frac{1}{q}} = d_1(z-x) + d_2(z-x)^2 + \cdots$$

und schliesslich:

$$(zx)\,(\zeta\eta)^{-\frac{1}{q}} = \left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{l}\cdot\left\{A_0 + A_1\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{l} + A_2\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{2l} + \cdots\right\},$$

$$(zx)^{\frac{1}{l}}\cdot(\zeta\eta)^{-\frac{1}{q\cdot l}} = \frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\cdot\left\{B_0 + B_1\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{l} + B_2\left(\frac{(\zeta\xi)}{(\zeta\eta)}\right)^{2l} + \cdots\right\}.$$

Dies heisst aber nach der Definition in § 6 nichts anderes, als: $(zx)^{\frac{1}{l}}$ ist an der Stelle ξ_1, ξ_2 unverzweigt. Da nun für jede nicht singuläre Stelle $l = 1$, für eine Stelle $x = e_i$ dagegen $l = l_i$ ist, so sieht man, dass einmal jede beliebige lineare Form (zx) überall unverzweigt ist, und dass insbesondere von einer der besonderen linearen Formen (ze_i) schon die l_i^{te} Wurzel unverzweigt ist.

Ich will diese letzteren Formen die „Grundformen" nennen.

Die Grundformen

$$Z_i = (ze_i)^{\frac{1}{l_i}}$$

sind die einfachsten unverzweigten automorphen Formen. Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass jede von ihnen nur in einer Ecke des Fundamentalbereichs der ζ-Ebene, — den ich mir so gewählt denke, wie auf Seite 4, — *und in allen dieser Ecke congruenten Punkten je von der* 1. *Ordnung verschwinden.*

Zwischen irgend 3 *der n Grundformen besteht eine identische Relation:*

$$(e_\varkappa e_\lambda)\, Z_i^{l_i} + (e_\lambda e_i)\, Z_\varkappa^{l_\varkappa} + (e_i e_\varkappa)\, Z_\lambda^{l_\lambda} = 0.$$

Für den Fall $l_i = \infty$ bedarf der Begriff der Grundform einer leichten Modification. Man hat dort als einfachste unverzweigte Form:

$$Z_{i'} = \log(ze_{i'}).$$

Diese Form ist aber nicht mehr automorph im gewöhnlichen Sinne, da sie sich bei Anwendung von S_i nicht multiplicativ, sondern additiv verhält. Wohl aber ist eine unverzweigte automorphe Form jede beliebige Potenz

$$(ze_{i'})^{\varepsilon_{i'}}$$

auch mit irrationalem, wenn nur reellem, Exponenten $\varepsilon_{i'}$.

Diese „Grundformen" sind für den Fall der endlichen Gruppen zuerst von Hrn. H. A. Schwarz*), für den Fall der unendlichen Gruppen

*) Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt. (Cr. Journ. Bd. 75, 1872).

im speciellen Falle $n=3$ von Hrn. Halphen*) aufgestellt worden. Die Verallgemeinerung auf beliebige n giebt Hr. Poincaré**), und die homogene Schreibweise, welche ihre Eigenschaften und ihre innere Bedeutung am klarsten hervortreten lässt, hat Hr. Prof. Klein, was die transcendenten Fälle angeht, u. A. in seiner Vorlesung vom Winter 1890/91 zur Geltung gebracht, während er von derselben in den algebraischen Fällen von vorneherein Gebrauch gemacht hat (vergl. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich, Math. Ann. 9, 1875)***).

Um nun einen allgemeinen Ausdruck jeder automorphen Form durch z_1, z_2 zu finden, beweise ich zuerst den Satz:

Eine unverzweigte automorphe Form, welche innerhalb des Fundamentalbereichs weder 0 *noch* ∞ *wird, ist nothwendig vom Grade* 0 *und eine Constante.*

Giebt es eine unverzweigte automorphe Form ohne 0- oder ∞-Stellen von irgend einem von 0 verschiedenen Grade, so giebt es solche sicher auch von jedem beliebigen Grade. Denn man kann eine solche durch geeignete Potenzirung der gegebenen erhalten, wobei keine Verzweigungspunkte auftreten können, da ja die gegebene Form keine besitzt und weder 0 noch ∞ wird. Insbesondere müsste es dann eine solche automorphe Form ohne 0- oder ∞-Stellen vom Grade $-\frac{1}{q}$ geben, etwa $\varphi_{-\frac{1}{q}}(\xi_1, \xi_2)$. Dann wäre aber

$$z_2 \cdot \varphi_{-\frac{1}{q}}(\xi_1, \xi_2)$$

eine im Allgemeinen uneigentlich automorphe Function von ζ, jedenfalls also eine algebraische Function einer eigentlich automorphen Function, etwa von $z(\zeta)$. Da diese Function nirgends ∞ werden soll, muss sie nothwendig eine Constante sein, und zwar, da sie an der Stelle $z_2 = 0$ verschwindet, identisch 0.

Es bleiben also nur noch automorphe Formen vom Grade 0 übrig, und diese müssen sich, wenn sie nirgends ∞ werden, als automorphe Functionen nothwendig auf eine Constante reduciren. —

Wird nun eine beliebige unverzweigte automorphe Form $F_R(\xi_1, \xi_2)$ in jeder Ecke des Fundamentalbereichs je ε_i-fach (wo wegen der Unverzweigtheit ε_i eine ganze Zahl sein muss) zu 0 (resp. $(-\varepsilon_i)$-fach zu ∞), und sonst an den Stellen $\xi_1', \xi_2'; \xi_1'', \xi_2''; \ldots; \xi_1^{|\sigma|}, \xi_2^{|\sigma|}$ je einfach 0, an den Stellen $\eta_1', \eta_2'; \eta_1'', \eta_2''; \ldots; \eta_1^{|\sigma|}, \eta_2^{|\sigma|}$ je einfach ∞,

*) Sur les fonctions, qui proviennent de la série de Gauss. (Comptes rendus 92, 1881).

**) Mémoire sur les fonctions fuchsiennes p. 237. (Acta math. Bd. 1).

***) Vergl. auch Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen I, p. 125 ff. [Formentheoretischer Vergleich der Ikosaeder- und der Modulgleichung.]

(wobei auch mehrere dieser Stellen zu mehrfachen 0- bezw. ∞-Stellen zusammenrücken dürfen) so wird die Form

$$F_R(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \left(\prod_{i=1}^{i=n} (z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \frac{(zx')(zx'') \ldots (zx^{|\varrho|})}{(zy')(zy'') \ldots (zy^{|\sigma|})} \right)^{-1}$$

eine automorphe Form ohne 0- und ∞-Stellen und ohne Verzweigungen sein, also nach dem obigen Satze eine Constante. Also:

Die allgemeinste unverzweigte automorphe Form hat in z_1, z_2 den Ausdruck:

$$F_R(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} (z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot Rat_\delta (z_1, z_2), \qquad R \cdot q = \delta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varepsilon_i}{l_i}.$$

Hier bedeutet $Rat_\delta (z_1, z_2)$ eine rationale Form δ^{ten} Grades von z_1, z_2.

Wenn der Fundamentalbereich parabolische Ecken $\alpha_{i'}$ enthält, so ist diesen entsprechend $\varepsilon_{i'}$ statt $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$ zu setzen, und unter $\varepsilon_{i'}$ eine beliebige reelle Zahl zu verstehen. —

Das Verhalten von $F_R(\zeta_1, \zeta_2)$ bei den linearen Substitutionen unserer Gruppe findet man leicht aus dem Verhalten von z_1, z_2 resp. $(z e_i)$.

Einer Substitution $\mathbf{S}_t$ der ζ_1, ζ_2 verbunden mit σ-maligem Umlauf von ζ_1 und ζ_2 um ihre 0-Punkte entspricht als Multiplicator von F:

$$\varrho_t = e^{2i\pi\left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} - \frac{R}{2l_i} + \sigma \cdot R\right)}.$$

Ist der Grad R eine ganze Zahl, so ist der Multiplicator von der Anzahl der Umkreisungen von ζ_1 und ζ_2 um ihre 0-Punkte unabhängig. —

Der allgemeine Ausdruck der unverzweigten automorphen Formen ist jetzt zu specialisiren für die *eindeutigen Formen.*

Das Multiplicatorsystem einer solchen denke ich mir den Bestimmungen des § 6 gemäss gegeben. Es sei

$$\varrho_t = e^{i\pi \cdot \frac{\lambda_i}{l_i}},$$

bezw. für die parabolischen Erzeugenden:

$$\varrho_{i'} = e^{i\pi\lambda_{i'}}.$$

Hieraus kann man leicht die Constanten $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$, bezw. $\varepsilon_{i'}$ bestimmen. Es wird sich zeigen, dass dies bei jedem gegebenen Multiplicatorsystem möglich ist, und zwar wesentlich nur auf eine Weise.

Man hat nur zu setzen:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{R}{2l_i} + \frac{\lambda_i}{2l_i} + \text{ganze Zahl},$$

bezw.
$$\varepsilon_{i'} = \frac{1}{2}\lambda_{i'} \quad + \text{ganze Zahl}.$$

Da ich aber der $Rat_\delta(z_1, z_2)$ auch beliebige Factoren $(z\, c_i)$ anfügen kann, so kann ich die $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$ gern in folgende Grenzen einschliessen:

$$0 \leqq \frac{\varepsilon_i}{l_i} < 1,$$
$$0 \leqq \varepsilon_{i'} < 1 \quad \text{wenn } R > 0 \text{ ist},$$
$$0 < \varepsilon_{i'} \leqq 1 \quad \text{wenn } R < 0 \text{ ist}.$$

Bezeichnet $E[\alpha]$ die grösste in α enthaltene ganze Zahl, derart, dass

$$\alpha - 1 < E[\alpha] \leqq \alpha$$

ist, so wird nach meiner Festsetzung:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{R + \lambda_i}{2 l_i} - E\left[\frac{R + \lambda_i}{2 l_i}\right],$$
$$\delta = R - \frac{1}{2}\left\{R \cdot n + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{l_i}\right\} + \sum_{i=1}^{i=n} E\left[\frac{R + \lambda_i}{2 l_i}\right].$$

Im Falle $l_{i'} = \infty$ hat man in dieser Formel statt $\frac{\varepsilon_{i'}}{l_{i'}}$ und $\frac{\lambda_{i'}}{l_{i'}}$ zu setzen $\varepsilon_{i'}$ bezw. $\lambda_{i'}$, und für $E\left[\frac{R + \lambda_{i'}}{2 l_{i'}}\right]$ den Grenzwerth für sehr grosse $l_{i'}$, d. h. im Allgemeinen $E\left[\frac{\lambda_{i'}}{2}\right]$, dagegen, wenn $\frac{\lambda_{i'}}{2}$ eine ganze Zahl, und zugleich $R < 0$ ist, $\frac{\lambda_{i'}}{2} - 1$.

Diese Festsetzungen wird man später als functionentheoretisch besonders bequem erkennen.

Nach den vorstehenden Formeln kann man zu jedem vorgegebenen Multiplicatorsystem zugehörige automorphe Formen construiren.

Die angegebenen Formeln führen uns zu einer für spätere functionentheoretische Entwicklungen fundamentalen Beziehung zwischen automorphen Formen, zwischen deren Grad und Multiplicatorsystem die einfachen reciproken Beziehungen bestehen:

$$R + R' + 2 = 0, \quad \varrho\, \varrho' = 1.$$

Setze ich nämlich:

$$R' = -R - 2,$$
$$\lambda_i' = 2 l_i - \lambda_i,$$

so wird:

$$E\left[\frac{R' + \lambda_i'}{2 l_i}\right] = E\left[-\frac{R + \lambda}{2 l_i} + \left(1 - \frac{1}{l_i}\right)\right].$$

Da nun der Nenner von $\frac{R + \lambda}{2 l_i}$ höchstens $= l_i$ ist, so ist die rechte Seite dieser Gleichung

$$= E'\left[-\frac{R+\lambda}{2l_i}\right],$$

unter $E'[\alpha]$ diejenige ganze Zahl verstanden, für welche

$$\alpha \leqq E'[\alpha] < \alpha + 1$$

ist. Es ist aber allgemein

$$E'[-\alpha] = -E[\alpha],$$

und also:

$$E\left[\frac{R'+\lambda_i'}{2l_i}\right] = -E\left[\frac{R+\lambda_i}{2l_i}\right].$$

Setzt man diese Identität, die wegen meiner Festsetzungen über die Grenzen der ε_i auch für $l_i = \infty$ bestehen bleibt, in die Formeln für δ' und $\frac{\varepsilon_i'}{l_i}$ ein, so ergiebt sich:

Stehen Grad und Multiplicatoren zweier automorphen Formen in den Beziehungen:

$$R + R' + 2 = 0, \quad \varrho_i \varrho_i' = 1,$$

so ist:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon_i'}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i},$$

$$\delta + \delta' + 2 = 0.$$

Ferner gebe ich zum Schlusse dieses Abschnittes noch einige Sätze über die allgemeinen Grenzen, in denen sich δ bewegt, und zwar für negative q, auf welchen Fall ich ja mein Hauptaugenmerk richte.

Ist R positiv, so ist stets

$$\delta \leqq -1;$$

ist $R < -2$, so ist stets

$$\delta \geqq -1,$$

und ist $R = -2$, so ist für alle uneigentlich automorphen Formen

$$\delta \geqq -1,$$

für alle eigentlich automorphen Formen aber:

$$\delta = -2.$$

Es ist nämlich:

$$\delta = R \cdot q - \sum \frac{\varepsilon_i}{l_i};$$

nun ist aber

$$0 \leqq \frac{\varepsilon_i}{l_i} < 1 - \frac{1}{l_i},$$

also

$$Rq \geqq \delta \geqq Rq - \sum\left(1 - \frac{1}{l_i}\right) = (R+2)\,q - 2.$$

Da nun q negativ sein soll, so muss für positive R in der That δ negativ, also ≤ -1 sein; ist $R+2$ negativ, so muss $\delta > -2$, also ≥ -1 sein. Im Falle $R+2=0$ tritt das Gleichheitszeichen rechts offenbar dann und nur dann in Kraft, wenn sämmtliche

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}$$

und

$$\varepsilon_{i'} = 1$$

sind. Dann sind aber, wenigstens für $R = -2$, alle

$$\varrho_i = 1.$$

Damit sind alle meine Angaben bewiesen.

§ 9.

Sätze über 0- und ∞-Stellen.

Zur Untersuchung des Verhaltens einer automorphen Form in der Umgebung einer Stelle muss man dieselbe in der Umgebung derselben nach Potenzen entwickeln. Ich stelle daher einige Sätze über *Potenzentwicklungen beliebiger Formen* voran:

Eine Form R^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 kann man an einer Stelle ξ_1, ξ_2, welche weder Verzweigungsstelle, noch eine wesentlich singuläre Stelle der Form ist, folgendermassen entwickeln:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=+\infty} a_\lambda \cdot \left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R-\lambda} \cdot (\xi\xi)^\lambda.$$

ξ_1, ξ_2 nenne ich den *Mittelpunkt*, η_1, η_2 den *Grenzpunkt* der Entwicklung, und ich sage, die Form sei nach Potenzen von ξ nach η entwickelt. — Bei der Entwicklung einer Function von ζ nach Potenzen in der Umgebung einer Stelle ξ entspricht ξ dem Mittelpunkte ξ_1, ξ_2, der Punkt $\zeta = \infty$ dem Grenzpunkte η_1, η_2 der Potenzentwicklung einer Form.

Für die Umsetzung der Entwicklung einer Form von ξ nach η in eine solche von ξ nach η' dient die Formel:

$$a'_{\lambda'} = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=\lambda'} a_\lambda \cdot (R-\lambda)_{\lambda'-\lambda} \cdot \left(\frac{(\eta'\eta)}{(\xi\eta)(\xi\eta')}\right)^{\lambda'-\lambda}.$$

Hieraus geht hervor, dass in jeder Entwicklung der erste Coefficient a_m, sowie der Coefficient a_{R+1} von der Wahl des Grenzpunktes η_1, η_2 unabhängig ist.

Man kann daher insbesondere den ersten Coefficienten a_m als *Coefficienten der betreffenden Stelle* bezeichnen, ohne sich dabei auf eine bestimmte Entwicklung stützen zu müssen. —

Nun kehre ich zu den automorphen Formen zurück.

Eine automorphe Form vom Grade R und der Functionalgleichung:

$$F_R(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}) = \varrho_\varkappa \cdot F_R(\xi_1, \xi_2), \quad \begin{pmatrix} \xi_1^{(\varkappa)} = \alpha_\varkappa \xi_1 + \beta_\varkappa \xi_2, \\ \xi_2^{(\varkappa)} = \gamma_\varkappa \xi_1 + \delta_\varkappa \xi_2 \end{pmatrix}$$

habe an einer Stelle ξ_1, ξ_2, welche keine Bereichecke sei, die Entwicklung:

$$(1) \qquad F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=+\infty} a_\lambda \left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R-\lambda} \cdot (\xi\xi)^\lambda.$$

Dann besitzt $F_R(\xi_1, \xi_2)$ an irgend einer mit ξ_1, ξ_2 congruenten Stelle $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ die Entwicklung

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=+\infty} \varrho_\varkappa a_\lambda \cdot \left(\frac{(\xi\eta^{(\varkappa)})}{(\xi^{(\varkappa)}\eta^{(\varkappa)})}\right)^{R-\lambda} \cdot (\xi\xi^{(\varkappa)})^\lambda.$$

Also:

Wenn eine Stelle ξ_1, ξ_2 eine 0- oder ∞-Stelle von bestimmter Ordnung m mit dem Coefficienten a_m ist, so ist jede zu ξ_1, ξ_2 congruente Stelle eine 0- bezw. ∞-Stelle von derselben Ordnung mit dem Coefficienten $\varrho_\varkappa \cdot a_m$.

In einer elliptischen Ecke α_i muss $F_R(\xi_1, \xi_2)$, wenn dasselbe bei Anwendung von $\mathbf{S}_i$ den Factor $\varrho_i = e^{i\pi \cdot \frac{\lambda_i}{l_i}}$ erhalten soll, eine Entwicklung folgender Gestalt besitzen:

$$(2) \quad F_R(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{(\xi\beta_i)}{(\alpha_i\beta_i)}\right)^{R-\varepsilon_i} (\xi\alpha_i)^{\varepsilon_i} \cdot \sum_{\lambda=m}^{\lambda=+\infty} a_\lambda \cdot \left(\frac{(\xi\alpha_i)^{l_i}}{(\xi\beta_i)^{l_i}} (\alpha_i\beta_i)^{l_i}\right)^\lambda.$$

Man erinnere sich jetzt, dass man nach Riemann (Theorie der Abel'schen Functionen, Nr. 2) eine Function in einem Punkte der betreffenden Mannigfaltigkeit (Riemann'sche Fläche, Fundamentalbereich) unendlich klein von der μ^{ten} Ordnung nennt, wenn ihr Logarithmus bei einem positiven auf der Mannigfaltigkeit geschlossenen Umlauf um den Punkt um $\mu \cdot 2\pi i$ wächst.

Nach diesem Princip darf man eine 0- oder ∞-Stelle in einer Ecke mit dem Winkel $\frac{2\pi}{l_i}$ nur mit dem l_i^{ten} Theile ihrer Ordnung in der ξ-Ebene zu dem Fundamentalbereiche zählen.

Es muss demnach unsere automorphe Form in einer Ecke α_i im Fundamentalbereiche $\left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + m\right)$-fach verschwinden bezw., wenn m negativ ist, $\left(-\frac{\varepsilon_i}{l_i} - m\right)$-fach ∞ werden.

In einer parabolischen Ecke $\alpha_{i'}$ laute die zugehörige Substitution:

$$\mathbf{S}_{i'}) \quad \begin{cases} (\xi'\alpha_{i'}) = (\xi\alpha_{i'}), \\ (\xi'\beta_{i'}) = 2i\pi \cdot (\xi\alpha_{i'}) + (\xi\beta_{i'}). \end{cases}$$

Man nennt eine Ecke dann eine 0- oder ∞-Stelle der Form $F_R(\zeta_1, \zeta_2)$, wenn bei Annäherung an die Ecke vom Innern des Bereiches her die Form verschwindet oder ∞ wird.

Bei einer solchen Annäherung an die Ecke wird der reelle Theil von $Z = \frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}$ negativ ∞ gross.

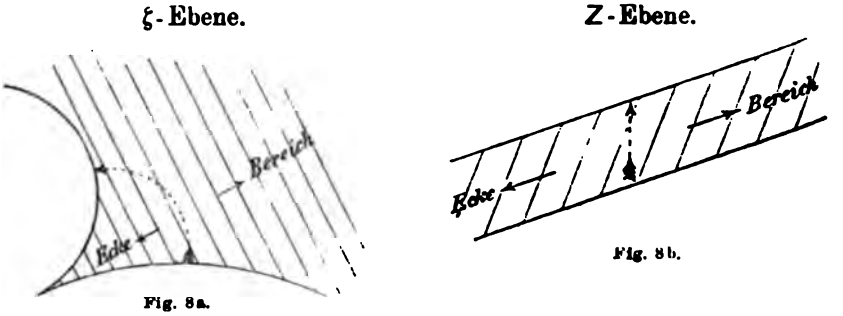


Fig. 8a. Fig. 8b.

Nämlich der Eckpunkt muss, wie alle Ecken des Bereichs, links von der Bahncurve*) der zugehörigen Substitution

$$S_{i'}) \quad \frac{(\zeta'\beta_{i'})}{(\zeta'\alpha_{i'})} = 2i\pi + \frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}$$

liegen. Dieses Verhältniss muss ungeändert bleiben, wenn man den ζ-Bereich durch die Substitution

$$Z = \frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}$$

transformirt. Dabei streckt sich die Bahncurve der Fig. 8a in den verticalen Pfeil der Fig. 8b, und der Eckpunkt rückt in's Unendliche, und zwar, da er links von der Bahncurve bleibt, so, dass der reelle Theil von Z in demselben negativ ∞ wird.

In Folge dessen verschwindet

$$t = e^{\frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}}$$

bei Annäherung an die Ecke.

Man sagt dann, ebenfalls der Riemann'schen Festsetzung gemäss, eine Form werde in der parabolischen Ecke μ-fach 0, wenn sie sich verhält wie t^μ.

Wenn nun eine automorphe Form in einer Ecke höchstens von endlicher Ordnung verschwinden oder ∞ werden und sich bei

*) Wegen des Ausdrucks „Bahncurve" vergleiche man Klein-Fricke, Modulfunctionen I, p. 165 ff.

Anwendung von $S_{i'}$ auf ζ_1, ζ_2 mit $\varrho_{i'} = e^{i\pi\lambda_{i'}}$ multipliciren soll, so muss sie eine Entwicklung haben:

$$(3) \qquad F_R(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta\alpha_{i'})^R \cdot \left(e^{\frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}}\right)^{\varepsilon_{i'}} \cdot \sum_{\lambda=m}^{\lambda=+\infty} a_\lambda \cdot \left(e^{\frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}}\right)^{\lambda}.$$

In einer parabolischen Ecke kann eine automorphe Form von jeder Ordnung $(m + \varepsilon_{i'})$ *verschwinden, bezw. von der* $(-m - \varepsilon_{i'})^{\text{ten}}$ *Ordnung* ∞ *werden*, unter $\varepsilon_{i'}$ einen beliebigen echten Bruch verstanden.

Aus der Definition der ζ_1, ζ_2 folgt, dass die Entwicklungen von $(\zeta\zeta)$, $\left(\frac{(\zeta\alpha_i)}{(\zeta\beta_i)}\right)^{\lambda_i}$, $e^{\frac{(\zeta\beta_{i'})}{(\zeta\alpha_{i'})}}$ je mit der ersten Potenz von (zx), (ze_i), $(ze_{i'})$ beginnen, und dass die Entwicklung von $(\zeta\alpha_{i'})$ mit der 0^{ten} Potenz von $(ze_{i'})$ anfängt.

Hieraus folgt, dass einer Entwicklung (1) *ein Factor* $(zx)^m$, *einer Entwicklung* (2) *ein Factor* $(ze_i)^{\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i}+m}$, *einer Entwicklung* (3) *ein Factor* $(ze_{i'})^{\varepsilon_{i'}+m}$ *des Ausdrucks durch* z_1, z_2 *entspricht.*

Im einzelnen dieser 3 *Fälle enthält die Form* $Rat_\delta(z_1, z_2)$ *also den Factor* $(zx)^m$ *bezw.* $(ze_i)^m$, $(ze_{i'})^m$.

Zählt man die 0- und ∞-Stellen in ζ_1, ζ_2, nur mit dem in den einzelnen Fundamentalbereich fallenden Antheil, in z_1, z_2 dagegen vollständig, so hat man den einfachen Satz:

Den 0- *und* ∞-*Stellen von* $F_R(\zeta_1, \zeta_2)$ *im Fundamentalbereiche entsprechen* 0- *oder* ∞-*Stellen derselben Ordnung im Ausdruck durch* z_1, z_2.

Der Ueberschuss der Anzahl der 0-*Stellen über die Anzahl der* ∞-*Stellen im Fundamentalbereiche ist* $= R \cdot q$.

Es ist hier der Platz, dass ich kurz das Verhältniss meiner allgemeinen automorphen Formen zu den „fonctions théta" des Hrn. Poincaré beleuchte.

Die Poincaré'schen Functionen entsprechen nur einem speciellen Falle meiner automorphen Formen, nämlich den eigentlich automorphen Formen von geradzahligem Grade.

Da aber Hr. Poincaré keine „Formen" benutzt, so gehen seine Θ-Functionen erst durch Multiplication mit ζ_2^{-R} aus diesen Formen hervor. Es ist:

$$\Theta(\zeta) = \zeta_2^{-R} \cdot F_R(\zeta_1, \zeta_2).$$

Daher auch die weniger einfache Functionalgleichung bei Hrn. Poincaré.

Den letzten von mir angegebenen Satz über die Anzahl der 0- und ∞-Stellen in einem Bereiche, der sich bei mir ohne Weiteres

aus dem Ausdruck durch z_1, z_2 ablesen lässt, leitet Poincaré durch Integration (nach ζ) um den Fundamentalbereich herum ab.

Bei mir gilt der Satz ganz allgemein, für jeden Fundamentalbereich, bei Poincaré dagegen muss für den ∞-fernen Punkt, wenn derselbe im Bereiche liegt, eine besondere Ausnahme gemacht werden, eine Folge der unhomogenen Schreibweise.

Während ich jede Form direct als eine gewisse algebraische Form von z_1, z_2 darstellen kann, kann Poincaré seine Θ-Functionen nur mit Hülfe eines Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{dz}$ durch z ausdrücken. Infolgedessen lässt sich auch das Verschwinden und ∞-Werden aus seinem Ausdruck nicht so unmittelbar ablesen, wie bei mir.

Man sieht, dass alle diese Vereinfachungen eine Folge des Gebrauchs der homogenen Variablen sind. Aus demselben Princip fliesst aber nicht nur die Vereinfachung, sondern auch die ganze Verallgemeinerung, welche in der Hereinziehung der uneigentlich automorphen Formen, sowie der Formen von ungeradzahligem Grade besteht. —

Ich will an dieser Stelle noch, wegen der Wichtigkeit für spätere Betrachtungen, angeben, wie sich der erste Coefficient der Entwicklung einer Form nach Potenzen von (zx) aus dem entsprechenden der Entwicklung nach $(\zeta\xi)$ berechnet, wenigstens für den Fall, dass ξ_1, ξ_2 keine Polygonecke ist.

Aus der Definition der ξ_1, ξ_2 folgt, dass der erste Coefficient der Entwicklung von $(\zeta\xi)$ nach (zx) lautet

$$c^2 \cdot \prod (x e_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)}.$$

Daraus folgt der Satz:

Lautet der erste Coefficient der Entwicklung einer Form nach (zx) a_m, *so lautet der erste Coefficient der Entwicklung nach* $(\zeta\xi)$:

$$a_m = a_m \cdot \left(c^{-2} \prod (x e_i)^{+\left(1-\frac{1}{l_i}\right)}\right)^m.$$

Formen mit vorgegebenen Unendlichkeitsstellen.

Kennt man die ∞-Stellen einer automorphen Form und ihre Multiplicitäten, so kennt man den Nenner der Form $\mathrm{Rat}_\delta(z_1, z_2)$ in dem Ausdruck durch z_1, z_2.

Es habe $F_R(\xi_1, \xi_2)$ in einem Polygone ε vorgegebene ∞-Stellen (von denen gegebenenfalls mehrere zu einer ∞-Stelle höherer Ordnung zusammenfallen können). Dann ist

$$\mathrm{Rat}_\delta(z_1, z_2) = \frac{G_{\delta+\varepsilon}(z_1, z_2)}{(zx')(zx'')\ldots(zx^{(\varepsilon)})}.$$

Die ganze Form $G_{\delta+\varepsilon}(z_1, z_2)$ hat noch $\delta + \varepsilon + 1$ willkürliche Con-

stanten. Infolgedessen gelten die Sätze (wobei ich der Kürze halber ∞-Stellen von der Ordnung μ immer als μ einfache ∞-Stellen zähle):

Alle eindeutigen automorphen Formen vom Grade R und gleichem Multiplicatorsystem mit ε vorgegebenen ∞-Stellen lassen sich durch $(\delta + \varepsilon + 1)$ unter ihnen linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen.

Automorphe Formen von positivem Grade R müssen, da δ für dieselben negativ ist, sicher ∞-Stellen besitzen, mindestens in der Zahl $(-\delta)$.

Formen ohne ∞-Stellen — ich will solche als „holotypische Formen" benennen (K) — sind nur möglich für negative R, und zwar in der Anzahl $(\delta + 1)$, jedenfalls unmöglich, wenn $\delta \leqq -1$ ist.

Im Falle, dass der Grad R negativ ist, und zwar < 2, existiren für jedes Multiplicatorsystem Formen mit nur einer vorgegebenen ∞-Stelle, und zwar in der Anzahl $(\delta + 2)$.

Ist der Grad $R = -2$, so existiren beliebige uneigentlich automorphe Formen mit nur einer vorgegebenen ∞-Stelle; dagegen müssen eigentlich automorphe Formen vom Grade (-2) stets mindestens 2 ∞-Stellen besitzen.

Man kann aber auch ausser der Anzahl und Multiplicität der ∞-Stellen sämmtliche Coefficienten der ∞ werdenden Glieder in den betreffenden Entwicklungen vorgeben. Dann ist die Willkür in den Coefficienten von $G_{\delta+s}(z_1, z_2)$ noch weiter beschränkt. Man findet:

Es giebt $\delta + 1$ linear unabhängige automorphe Formen, die in gegebener Weise ∞ werden.

Ist $\delta + 1$ negativ, so müssen zwischen den Coefficienten der ∞-Stellen noch $-(\delta + 1)$ Relationen erfüllt sein, damit eine solche automorphe Form überhaupt möglich ist.

Ist $(\delta + 1) \leqq 0$, so ist eine automorphe Form durch die Art ihres ∞-Werdens eindeutig bestimmt.

Ich füge noch einen wichtigen für alle eigentlich automorphen Formen vom Grade (-2) gültigen Satz bei:

Zunächst erinnere ich an den auf S. 46 ausgesprochenen Satz, dass in der Entwicklung einer Form vom R^{ten} Grade:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty} a_\lambda \cdot \left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R-\lambda} \cdot (\xi\xi)^\lambda$$

der Coefficient a_{R+1} von der Wahl des Grenzpunktes η unabhängig ist. Bei der Entwicklung einer beliebigen Form $(-2)^{\text{ten}}$ Grades in der Umgebung einer ∞-Stelle ist also der Coefficient a_{-1} von der Wahl des Grenzpunktes unabhängig und stimmt überein mit dem Residuum dieser ∞-Stelle für die Function $\xi_2^2 F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$.

Ich nenne daher im Falle einer Form vom Grade -2 den Coefficienten a_{-1} das *Residuum der betreffenden* ∞*-Stelle.*

Speciell bei den automorphen Formen will ich unter dem *Residuum eines Systems congruenter* ∞*-Stellen* das Residuum einer einzelnen ∞-Stelle des Systems verstehen, wenn die Stellen des Systems keine Bereichecken sind, dagegen den l_i^{ten} Theil davon, wenn die ∞ Stellen singuläre Ecken mit dem Winkel $\frac{2\pi}{l_i}$ sind

Der allgemeine Ausdruck einer eigentlich automorphen Form $(-2)^{\text{ten}}$ Grades durch z_1, z_2 lautet:

$$F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} (z e_i)^{1-\frac{1}{l_i}} Rat_{-2}(z_1, z_2).$$

Es gilt nun der bemerkenswerthe Satz:

Ist $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ *ein System congruenter* ∞*-Stellen von* $F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ *mit dem Residuum* α_{-1}, *so ist* x_1, x_2 *eine* ∞*-Stelle gleicher Ordnung von* $Rat_{-2}(z_1, z_2)$ *mit dem Residuum* $a_{-1} = \alpha_{-1} \cdot c^{-2}$.

Sind nämlich die $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ nur einfache ∞-Stellen, so folgt nach S. 50 aus dem Residuum α_{-1} für den Coefficienten a'_{-1} einer Entwicklung der ganzen rechten Seite an der Stelle x_1, x_2 der Werth:

$$a'_{-1} = \alpha_{-1} \cdot c^{-2} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (x e_i)^{1-\frac{1}{l_i}}.$$

Daraus folgt als Residuum von $Rat_{-2}(z_1, z_2)$ an derselben Stelle:

$$a_{-1} = \alpha_{-1} \cdot c^{-2}.$$

Es ist nun, wenn eine ∞-Stelle höherer Ordnung vorliegt, nur noch zu beweisen, dass die Entwicklungsglieder

$$\left(\frac{(\zeta\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{-2-\lambda} \cdot (\zeta\xi)^{\lambda} \qquad \lambda \gtrless -1$$

von $F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ auf das Residuum von $Rat_{-2}(z_1, z_2)$ ohne Einfluss sind, d. h. dass

$$\left(\frac{(\zeta\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{-2-\lambda} \cdot (\zeta\xi)^{\lambda} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (z e_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \qquad \lambda \gtrless -1$$

in der Umgebung von x_1, x_2 entwickelt kein einfach ∞ werdendes Glied aufweist. In der That kann man, wie man aus der Definition der ζ_1, ζ_2 herleitet, für diesen Ausdruck setzen:

$$\frac{c^{-2}}{\lambda+1} \cdot \left(\frac{(zy)}{(xy)}\right)^{-2} \cdot \frac{d\left[\left((\zeta\xi) \cdot \frac{(\xi\eta)}{(\zeta\eta)}\right)^{\lambda+1}\right]}{d\left[(zx)\frac{(xy)}{(zy)}\right]},$$

und da hierin $\left((\xi\xi)\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{\lambda+1}$ eine nach aufsteigenden Potenzen von $(sx)\left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)$ fortschreitende Potenzreihe ist, so kann die Ableitung derselben nach $(sx)\frac{(xy)}{(sy)}$ kein Glied $\left((sx)\frac{(xy)}{(sy)}\right)^{-1}$, das Ganze also kein Glied $\left(\frac{(sy)}{(xy)}\right)^{-1}(sx)^{-1}$ enthalten, womit der ausgesprochene Satz auch für ∞-Stellen höherer Ordnung bewiesen ist.

Auch wenn die $\xi_1^{(x)}, \xi_2^{(x)}$ Bereichecken sind, bleibt der Satz bestehen, wie ich hier nicht näher ausführe.

Nun besteht für die rationalen Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades bekanntlich der Satz, dass die Summe der Residuen aller ∞-Stellen gleich Null ist. Daraus folgt mit Hülfe des vorangegangenen Satzes für die automorphen Formen der wichtige Satz:

Die Summe der Residuen aller verschiedenen Systeme congruenter ∞-Stellen einer eigentlich automorphen Form vom Grade (-2) ist gleich Null.

Man sieht jetzt auch den tieferen Grund dafür ein, dass die eigentlich automorphen Formen vom Grade (-2) mindestens 2 ∞-Stellen haben müssen. —

Der Residuensatz ist übrigens von der Beschränkung auf $p = 0$ frei, und gilt also, wie bekannt, z. B. auch für die doppelperiodischen Functionen von ζ, die man ja nach Multiplication mit ζ_2^{-2} stets als automorphe Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades ansehen kann.

§ 10.

Ueber die zu dem Fundamentalbereiche gehörigen Integrale.

Die eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 haben noch eine ganz besondere functionentheoretische Bedeutung durch den engen Zusammenhang, in dem sie mit den Integralen der eindeutigen Functionen des Fundamentalbereichs stehen.

Bildet man nämlich, unter $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ eine eigentlich automorphe Form $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von ξ_1, ξ_2 verstanden, das Integral:

$$\int^{\zeta_1, \zeta_2} F_{-2}(\xi_1, \xi_2)\,(\xi, d\xi), \quad (\xi, d\xi) = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1,$$

so ist dieses eine Form 0^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2, d. h. eine Function von ζ, die ich $J(\zeta)$ nennen will.

Man sieht leicht, dass den ∞-Stellen von $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$, deren Residuum gleich 0 ist, algebraische ∞-Stellen von $J(\zeta)$ von einer um 1 niedrigeren Ordnung entsprechen, dass dagegen, wenn das Residuum $a_{-1} \gtrless 0$ ist, in der Entwicklung von $J(\zeta)$ an der betreffenden Stelle

ausserdem noch ein logarithmisch unendlich werdendes Glied mit dem Coefficienten $-a_{-1}$ auftritt.

Die analytische Natur der Functionen $J(\xi)$ erkennt man am besten, indem man sie durch z_1, z_2 ausdrückt. Es folgt nämlich aus der Formel:

$$\xi_2 = c \cdot \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (z c_i)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2$$

die Differentialformel:

$$(\xi, d\xi) = c^2 \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (z c_i)^{-\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot (z, dz).$$

Also ist mit Rücksicht auf den allgemeinen Ausdruck der Form $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ durch z_1, z_2:

$$J(\xi) = \int^{\xi_1, \xi_2} F_{-2}(\xi_1, \xi_2) \cdot (\xi, d\xi) = \int^{z_1, z_2} c^2 \cdot Rat_{-2}(z_1, z_2) \cdot (z, dz).$$

Man sieht also:

Das Integral $J(\xi)$ ist das allgemeinste Abel'sche Integral der durch den Fundamentalbereich vorgestellten Mannigfaltigkeit.

Ich werde die Abel'schen Integrale des Fundamentalbereichs einer automorphen Function allgemein als *„automorphe Integrale"* benennen.

Im vorliegenden Falle $p = 0$ sind dieselben folgendermassen zu charakterisiren:

Wenn die Residuen aller ∞-Stellen von $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ gleich Null sind, so sind die automorphen Integrale $J(\xi)$ eindeutige automorphe Functionen.

Wenn $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ ∞-Stellen mit nicht verschwindenden Residuen besitzt, die alle im Innern der Bereiche liegen, so sind die $J(\xi)$ logarithmisch verzweigte automorphe Functionen, d. h. die Gesammtheit der Werthe von $J(\xi)$ an irgend einer Stelle stimmt mit der Gesammtheit der Werthe an jeder congruenten Stelle überein.

Wenn $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ ∞-Stellen mit nicht verschwindenden Residuen in singulären Bereichecken besitzt, so sind die $J(\xi)$ „homomorphe Functionen" von ξ, d. h. sie erleiden bei Anwendung einer Substitution S auf ξ selbst lineare Substitutionen, und zwar in unsern Fällen Additionen gewisser Constanten.

Besonders bemerkenswerth ist der Fall, *wenn nur in parabolischen Ecken logarithmische Verzweigungspunkte von $J(\xi)$ liegen; dann ist nämlich $J(\xi)$ eine eindeutige homomorphe Function von ξ.*

Ich füge noch einige Bemerkungen über die automorphen Integrale bei höherem p hinzu.

Dort sind die automorphen Integrale — die man übrigens in derselben Weise, wie bei $p=0$ aus den automorphen Formen $(-2)^{ten}$ Grades

gewinnen kann — im Allgemeinen auch dann additiv homomorphe Functionen von ζ, wenn sie unverzweigt sind, abweichend vom Falle $p = 0$.

Insbesondere ist die Function s, die wir durch das Schwarz-Neumann'sche Verfahren gewinnen, für $p > 0$ immer ein sich additiv substituirendes automorphes Integral. *Die automorphen Integrale gehen also nach unserm Klein'schen Ansatz den automorphen Functionen voran*, was bei $p = 0$ nur wegen der Identität der unverzweigten Integrale mit den Functionen nicht in Erscheinung tritt.

III. Theil.

Darstellung der automorphen Formen durch ξ_1, ξ_2.

§ 11.

Vorbemerkungen.

In diesem dritten Theile meiner Arbeit will ich die automorphen Formen, deren Eigenschaften ich bisher nur aus ihrem Begriffe und allgemeinen functionentheoretischen Principien abgeleitet habe, auch nach der Seite ihrer expliciten Darstellbarkeit durch die Variablen ξ_1, ξ_2 untersuchen.

Hier ist es nun, wo ich wesentlich die Ideen des Hrn. Poincaré benutze, indem ich die von ihm aufgestellten Reihen einer gewissen leichten Erweiterung unterwerfe, durch welche sie geschickt werden, auch meine uneigentlich automorphen Formen darzustellen.

Schon Seite 49 habe ich auseinandergesetzt, inwiefern meine automorphen Formen Hrn. Poincaré's „fonctions thétafuchsiennes" und „fonctions thétakleinéennes" entsprechen. Für diese seine „Θ-Functionen" hat nun Hr. Poincaré gewisse Darstellungen durch unendliche Reihen gegeben, oder vielmehr, er hat die Θ-Functionen durch die unendlichen Reihen definirt..

Diese Reihen hat er ebenso wie die dadurch dargestellten Functionen mit dem Namen der Herren Fuchs und Klein in Verbindung gebracht: er nennt sie „séries thétafuchsiennes" bezw. „séries thétakleinéennes", je nachdem die zu Grunde gelegte Gruppe eine Hauptkreisgruppe mit nur positiven Substitutionen ist oder nicht. Auf das Unzutreffende dieser persönlichen Benennungen hat insbesondere Hr. Klein mehrfach hingewiesen, zuerst in der Zusatznote zu Hrn. Poincarés Bericht über seine Ergebnisse auf diesem Gebiete in Math. Ann. XIX, S. 564 (1881). Was speciell die in Rede stehenden Reihen betrifft, so ist deren Erfindung das allereigenste Verdienst von Hrn. Poincaré selbst,

und ich will daher diese Reihen, mit Einschluss der von mir einzuführenden Verallgemeinerung fortan als „*Poincaré'sche Reihen*" bezeichnen. Dabei habe ich zugleich den Vortheil gewonnen, die erwähnte functionentheoretisch durchaus unwesentliche Trennung der Gruppen in zwei Classen in der Benennung beseitigt zu haben.

§ 12.

Ueber die Convergenz der Poincaré'schen Reihen.

Will man unter Zugrundelegung einer Gruppe mit einer endlichen Anzahl von Substitutionen eine eindeutige automorphe Form von bestimmtem Grade construiren, so braucht man nur alle Substitutionen der Gruppe auf eine beliebige rationale Form des betr. Grades anzuwenden und die Summe zu bilden:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum \varrho_\varkappa^{-1} \cdot \varphi_R(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}).$$

Dann ist diese Form, sofern sie nicht identisch verschwindet, eine eindeutige automorphe Form mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$.

Will man dasselbe Verfahren bei unendlichen Gruppen anwenden, so muss man noch dafür sorgen, dass die so gebildete Summe absolut, d. h. unabhängig von der Reihenfolge, convergirt.

Dies ist nach dem Convergenzsatze von Hrn. Poincaré*), der sich unmittelbar auf die hier zu bildenden uneigentlich automorphen Reihen übertragen lässt, in der That dann immer der Fall, wenn

$$R \leqq -4$$

ist.

Voraussetzung ist dabei, dass keine der ∞-Stellen der Form $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ mit einem der Grenzpunkte der Gruppe zusammenfällt.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so convergirt die Summe für jedes Werthsystem ξ_1, ξ_2, dessen Quotient ζ in das von den Fundamentalbereichen überdeckte Gebiet fällt, sie wird, wenn ζ in einen derjenigen Punkte rückt, die den ∞-Stellen von $\varphi_R(\xi_1; \xi_2)$ congruent sind, durch ∞-Werden einzelner Glieder, unbeschadet der Convergenz der Summe der übrigen Glieder, unendlich, und sie hört überhaupt auf zu convergiren, wenn ζ in einen Grenzpunkt rückt.

Ich brauche den Beweis an dieser Stelle nicht wiederzugeben; er beruht darauf, dass die Summe der Flächeninhalte aller den unendlich fernen Punkt nicht enthaltenden Fundamentalbereiche der ζ-Ebene endlich ist.

Mit $R = -4$ ist aber sicher nicht in allen Fällen die äusserste Grenze der Convergenz erreicht; vielmehr hat man beispielsweise für die Gruppen mit Hauptkreis den Satz:

*) Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. (Acta math. I).

Im Hauptkreisfalle convergiren, sofern der Hauptkreis Grenzkreis ist, die automorphen Reihen dann und nur dann, wenn

$$R < -2,$$

liegen dagegen auf dem Hauptkreise nur isolirte Grenzpunkte, so convergiren die Reihen für

$$R \leqq -2.$$

Der Beweis des ersten Theils meiner Behauptung ist in dem zweiten Poincaré'schen Convergenzbeweis für $R = -4$, der sich auf nichteuklidische Geometrie stützt, mit enthalten, aber da Formen vom Grade -3 bei Poincaré nicht vorkommen, von diesem nicht weiter hervorgehoben worden. Den zweiten Theil meines Satzes aber hat Hr. Poincaré bei Abfassung seiner Abhandlungen sicher nicht gekannt, wie aus den Auseinandersetzungen in seiner Abhandlung: „Sur les groupes des équations linéaires", § 19 hervorgeht. Um so bemerkenswerther ist mein Resultat, als Hr. Poincaré an jener Stelle sagt: „Lorsqu'on l'aura fait (nämlich die Convergenz der betr. Hauptkreisreihen vom Grade -2 bewiesen haben wird) cette démonstration dispensera dans tous les cas de l'application de la méthode de continuité."

Ich will hier den Beweis nicht ausführlich angeben, sondern nur bemerken, dass er auf dem Nachweise beruht, dass die Summe der Umfänge aller Fundamentalbereiche endlich ist; und dies weist man dadurch nach, dass man zeigt, dass die Summe aller in den Polygonen liegenden Theile des Hauptkreises eine angebbare endliche Grösse ist, nämlich die einfache oder doppelte Länge des Hauptkreises selbst.

Sicher aber ist dies nur ein Beispiel unter vielen andern, in denen die Convergenz weiter reicht, als bis $R = -4$. Ein anderes Beispiel bilden die Gruppen, auf welche sich die Arbeiten von Weber und von Schottky beziehen*), und bei welchen ebenfalls die Reihen für $R = -2$ convergiren. Zwar kommen diese Beispiele, da sie einem höheren p entsprechen, für uns nicht in Betracht, doch ist bei diesen Convergenzfragen das Geschlecht p überhaupt unwesentlich.

Ferner convergiren im Falle eines einzigen Grenzpunktes, wenn man von der Gruppe der Wiederholungen einer einzigen parabolischen Substitution, sowie von der Gruppe $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\infty}$ absieht, die Reihen dann und im Allgemeinen nur dann, wenn

$$R < -2$$

ist, im Falle zweier Grenzpunkte aber, wenn

$$R < 0$$

ist.

*) Weber: Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen. Gött. Nachr. 1886. Schottky: Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes ungeändert bleibt. Crelle's Journ. 101 (1887).

Allgemein die Grenze der Convergenz festzustellen, ist mir noch nicht gelungen. Dagegen kann man einen negativen Satz allgemein aussprechen:

Sind die Grenzpunkte der Gruppe längs irgend welcher Curvenstücke gehäuft, so können die automorphen Reihen vom Grade — 2 sicher nicht convergiren.

Es ist dann nämlich die Summe der Umfänge aller Fundamentalbereiche ∞ gross, wie man folgendermassen leicht einsieht.

Es sei der Umfang des Ausgangsbereiches P_0; ich umgebe denselben mit einem Kranze weiterer Bereiche, derart, dass an der Umgrenzung des so erweiterten Gebietes die Umgrenzung P_1 nicht mehr theilnimmt. Den Umfang dieses erweiterten Gebietes nenne ich P_1; dieses umgebe ich wieder mit einem Kranze weiterer Polygone, und nenne den Umfang P_2, u. s. w.

Bei unbegrenzter Erweiterung kann P_n nicht ∞klein werden, da ja immer noch endliche Curvenstücke, nämlich die Grenzcurven, in dem unbedeckten Gebiete liegen. Daher kann die Reihe:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

nicht convergiren, und also noch viel weniger die Summe aller Polygonumfänge, von der ja diese Reihe nur ein Theil ist.

§ 13.

Die Poincaré'schen Reihen als automorphe Formen.

Eine Reihe, wie ich sie auf S. 56 aufgestellt habe, mit dem Bildungsgesetz:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varrho_\varkappa^{-1} \cdot \varphi_R(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})$$

nenne ich eine *„Poincaré'sche Reihe"*. Dieselbe stellt eine eindeutige automorphe Form R^{ten} Grades mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$ dar.

Diese „Poincaré'schen Reihen" sind, wie ich schon in § 11 betonte, eine Verallgemeinerung von Hrn. Poincaré's „séries thetafuchsiennes", welche folgendermassen gebildet sind:

$$\Theta(\xi) = \sum_{\varkappa} \text{Rat}\,(\xi^{(\varkappa)})\,(\gamma_\varkappa \xi + \delta_\varkappa)^{-2m}.$$

Multiplicire ich eine solche Reihe mit ξ_2^{-2m}, so wird aus ihr die Reihe:

$$\xi_2^{-2m}\Theta(\xi) = \sum_{\varkappa} (\xi_2^{(\varkappa)})^{-2m} \cdot \text{Rat}\,(\xi^{(\varkappa)}).$$

Dies ist aber eine Reihe des oben angegebenen Bildungsgesetzes, nur mit der *Beschränkung auf das Multiplicatorsystem* $\varrho_\varkappa = 1$ *und auf geradzahlige* R.

Die Form $F_R(\xi_1, \xi_2)$ kann nur an denjenigen Stellen ∞ werden, welche mit den innerhalb des Polygonnetzes fallenden ∞-Stellen der Form $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ congruent sind. Doch können sich mehrere einander congruente ∞-Stellen von $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ bei der Summation ganz oder theilweise aufheben.

Die Coefficienten des ∞-Werdens von $F_R(\xi_1, \xi_2)$ an einer Stelle ξ_1, ξ_2 bestimmt man daraufhin, wie folgt:

Es sei unter ξ_1, ξ_2 etwa ein Punkt des Ausgangsbereiches verstanden. Wenn dann $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ an den ν einander congruenten Stellen:

$$\xi_1^{(\varkappa_1)}, \xi_2^{(\varkappa_1)}; \xi_1^{(\varkappa_2)}, \xi_2^{(\varkappa_2)}; \cdots; \xi_1^{(\varkappa_\nu)}, \xi_2^{(\varkappa_\nu)}$$

unendlich wird, so wird an der Stelle ξ_1, ξ_2 offenbar nur das $\varkappa_1^{\text{te}}, \varkappa_2^{\text{te}}, \ldots, \varkappa_\nu^{\text{te}}$ Glied der Summe unendlich. Man bilde also aus $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ die ebenfalls rationale Form:

$$\psi_R(\xi_1, \xi_2) = \varrho_{\varkappa_1}^{-1} \cdot \varphi_R(\xi_1^{(\varkappa_1)}, \xi_2^{(\varkappa_1)}) + \varrho_{\varkappa_2}^{-1} \cdot \varphi_R(\xi_1^{(\varkappa_2)}, \xi_2^{(\varkappa_2)}) + \cdots$$
$$\cdots + \varrho_{\varkappa_\nu}^{-1} \cdot \varphi_R(\xi_1^{(\varkappa_\nu)}, \xi_2^{(\varkappa_\nu)}),$$

und entwickle diese Form in der Umgebung der Stelle ξ_1, ξ_2, so dass man etwa erhält:

$$a_{-m}\left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R+m}(\xi\xi)^{-m} + a_{-m+1}\left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R+m-1}\cdot(\xi\xi)^{-m+1} + \cdots$$
$$\cdots + a_{-1}\left(\frac{(\xi\eta)}{(\xi\eta)}\right)^{R+1}(\xi\xi)^{-1} + \cdots.$$

Die Coefficienten a_{-m} bis a_{-1} sind dann zugleich die Coefficienten der ∞ werdenden Glieder der Entwicklung von $F_R(\xi_1, \xi_2)$ von ξ nach η. —

An einer Polygonecke α_i zeigt die Summe natürlich genau dasselbe Verhalten, wie nach den früheren Angaben jede automorphe Form mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$. Es heben sich eben diejenigen Glieder der Entwicklung, welche nicht von der Form $a_\lambda \cdot \left(\frac{(\xi\beta_i)}{(\alpha_i\beta_i)}\right)^{R-(s_i+t_i\lambda)} \cdot (\xi\alpha_i)^{s_i+t_i\lambda}$ sind, bei der Summation gegenseitig auf, wie man auch leicht verificiren kann.

Eine ∞-Stelle kann in einer Ecke α_i natürlich nur dann liegen, wenn eine der ∞-Stellen von $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ mit α_i congruent ist.

Die Coefficienten des ∞-Werdens bestimmt man in genau derselben Weise, wie oben bei einer gewöhnlichen ∞-Stelle.

Mit einer parabolischen Ecke darf, da diese ein Grenzpunkt der Gruppe ist, keine ∞-Stelle der Form $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ congruent sein. Andernfalls würde die Reihe nicht convergiren können.

Daher wird eine convergente Reihe, wenn man ζ_1, ζ_2 mit *endlichen* absoluten Werthen in die Ecke hineinrücken lässt, nicht ∞ werden können.

Dabei nähern sich z_1, z_2 mit ihrem Quotienten dem Werthe e_i, werden aber selbst ∞ gross. Will man fordern, dass bei Annäherung an die parabolische Ecke z_1, z_2 *endlich bleiben*, so muss man ζ_1, ζ_2 logarithmisch ∞ gross werden lassen. Dann nähert sich aber der Werth der automorphen Reihe der 0, da ihr Grad ein negativer ist.

Daraus geht hervor, dass der allgemeine Ausdruck der Reihe durch z_1, z_2 für $(z e_i) = 0$ (bei endlichen z_1, z_2) verschwinden muss. Ich habe also in der That zweckmässig verfügt, als ich in § 8 bei negativem R die Festsetzung traf:

$$0 < \varepsilon_i \leqq 1.$$

Denn in Folge dessen habe ich den einfachen Satz:

Damit eine Form:

$$F_R(\zeta_1, \zeta_2) = \prod (z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{i_i}} \operatorname{Rat}_\delta (z_1, z_2)$$

durch eine Poincaré'sche Reihe darstellbar sei, darf keine ∞-Stelle der $\operatorname{Rat}_\delta(z_1, z_2)$ mit einem der etwaigen logarithmischen Verzweigungspunkte e_i zusammenfallen.

Das ist natürlich zunächst nur eine nothwendige Bedingung; dass sie auch ausreichend ist, wird sich erst später ergeben.

§ 14.

Ausdruck der Reihen durch z_1, z_2.

Nachdem man so überhaupt eindeutige automorphe Formen von ζ_1, ζ_2 dargestellt hat, ist natürlich die Hauptfrage, *welche Formen man überhaupt dargestellt hat*, d. h. *welchen Ausdruck in z_1, z_2 die dargestellte Form besitzt?*

Wir kennen von der Form:

1) Grad, Gruppe und Multiplicatorsystem,

2) die Art des Unendlichwerdens.

Es werde jetzt angenommen, man könne zu jedem ζ das zugehörige z bestimmen, z. B. durch die conforme Abbildung des § 2.

Zuweilen will ich auch voraussetzen, dass man zu jedem Werthepaar ζ_1, ζ_2 das zugehörige Werthepaar z_1, z_2 bestimmen kann. Dies ist zwar nicht eindeutig durch ζ_1, ζ_2 festgelegt, doch unterscheiden sich die verschiedenen Werthepaare nur durch Factoren, die bei den hier darzustellenden Formen, da sie in ζ_1, ζ_2 eindeutig sind, wieder in Wegfall kommen, so dass es für meine Zwecke gleichgültig ist, welches der verschiedenen einem Werthepaare ζ_1, ζ_2 entsprechenden Werthsysteme z_1, z_2 man wählt.

Und endlich gehe ich hin und wieder mit meinen Voraussetzungen noch weiter, indem ich annehme, man kenne auch eine beliebige Zahl der Coefficienten der Reihenentwicklung von ζ_1, ζ_2 nach z_1, z_2 in der Umgebung eines beliebigen Punktes.

In Folge der Kenntniss von 1) haben wir für den Ausdruck

$$\prod (z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \operatorname{Rat}_\delta (z_1, z_2)$$

einer unserer Reihen die Zahlen $\frac{\varepsilon_i}{l_i}$ und δ, in Folge der Kenntniss der ∞-Stellen und ihrer Multiplicität den Nenner der Form $\operatorname{Rat}_\delta(z_1, z_2)$.

Es mögen sich nach dem vorigen Paragraphen innerhalb eines Fundamentalbereiches ε ∞-Stellen ergeben haben:

$$\xi_1', \xi_2'; \xi_1'', \xi_2''; \cdots; \xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|},$$

wobei eine ν-fache ∞-Stelle im Innern ν-mal, eine $(\mu l_i - \varepsilon_i)$-fache in einer Ecke α_i μ-mal zu zählen ist. Den Quotienten $\xi', \xi'', \cdots, \xi^{|\varepsilon|}$ mögen die Quotienten $x', x'', \cdots, x^{|\varepsilon|}$ entsprechen.

Dann ist der allgemeinste Ausdruck für die vorliegende automorphe Reihe:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \prod (z e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \frac{g_{\delta+\varepsilon}(z_1, z_2)}{(zx')(zx'')\cdots(zx^{|\varepsilon|})}.$$

Die ganze Form $g_{\delta+\varepsilon}(z_1, z_2)$ enthält noch $\delta + \varepsilon + 1$ linear vorkommende Constanten, die bei der ersten Annahme, dass man nur zu jedem ζ das zugehörige z kenne, völlig unbestimmt bleiben.

Kennt man dagegen die Entwicklung von ζ_1, ζ_2 nach z_1, z_2 an jeder Stelle, so kann man aus den bekannten Coefficienten des ∞-Werdens der Reihe diejenigen des ∞-Werdens in z_1, z_2 berechnen. Dann bleiben nur noch $\delta + 1$ Coefficienten in $g_{\delta+\varepsilon}(z_1, z_2)$ willkürlich. Wir stellen folgende Sätze zusammen:

Es giebt $\infty^{\delta+1}$ verschiedene automorphe Formen von gegebenem Grade und Multiplicatorsysteme, die in gegebener Weise ∞ werden.

Die Mannigfaltigkeit der Poincaré'schen Reihen, die in derselben Weise ∞ werden, ist aber eine sehr viel grössere.

Es müssen daher unendlich viele mit verschiedenen Formen $\varphi_R(\zeta_1, \zeta_2)$ gebildete Reihen identische Formen liefern und unendlich viele holotypische Reihen identisch verschwinden.

Ist insbesondere $\delta = -1$, so liefern alle Formen $\varphi_R(\zeta_1, \zeta_2)$, die zu gleichen ∞-Stellen Anlass geben, identische Formen $F_R(\zeta_1, \zeta_2)$, und alle holotypischen Reihen verschwinden identisch.

Um direct zu entscheiden, ob irgend zwei Reihen identisch sind, müsste man sie in der Umgebung irgend eines Punktes ξ_1, ξ_2 nach Potenzen

von $\frac{(\xi\bar{\xi})}{(\xi\eta)}$ entwickeln, und ihre Coefficienten vergleichen. Diese Coefficienten sind aber selbst, mit Ausnahme derjenigen der ∞ werdenden Glieder, unendliche Summen.

Statt an einer Stelle die $\delta + \varepsilon + 1$ ersten Coefficienten zu vergleichen, kann man bequemer die ε Coefficienten der ∞-Stellen und ausserdem noch $\delta + 1$ sonstige durch Summation zu berechnende Coefficienten vergleichen. In jedem Falle sind aber mindestens $(\delta + 1)$ unendliche Reihen auszuwerthen.

Auf dieselbe Weise hat man zu entscheiden, ob eine Reihe ohne ∞-Punkte identisch verschwindet.

Ob man aber durch geeignete Wahl der Form $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ jede unter der allgemeinen Gestalt enthaltene automorphe Form erhalten kann, insbesondre, ob nicht etwa alle holotypischen Reihen identisch verschwinden, können wir ohne Ausführung der Summation für jetzt nicht entscheiden; doch werde ich später im Anschluss an Poincaré in der Darstellung der Formen von positivem Grade durch ihre ∞-Stellen Mittel finden, zu beweisen, dass man in der That jede mögliche Form der hier in Betracht kommenden negativen Grade durch eine Poincaré'sche Reihe darstellen kann, sofern nur keine ∞-Stelle der $\mathrm{Rat}_\delta(z_1, z_2)$ auf einen logarithmischen Verzweigungspunkt e_r fällt.

§ 15.

Eigentlich automorphe Reihen vom Grade $R = -2$.

Wenn unsere Poincaré'schen Reihen convergiren, so definiren diejenigen mit nur einem ∞-Punkte eine automorphe Form mit nur einer ∞-Stelle. Diese Reihen können daher nur dann convergiren, wenn $\delta \geqq -1$ ist.

Für $R \geqq -3$ ist diese Bedingung in der That immer erfüllt.

Für $R = -2$ kann dagegen δ auch gleich -2 sein, nämlich für alle eigentlich automorphen Formen, und nur für diese.

Wenn man daher eigentlich automorphe Reihen vom Grade -2 construiren kann, die formell nur einen ∞-Punkt aufweisen, so können die Poincaré'schen Reihen vom Grade -2 nicht convergiren.

Es folgt daher auch hieraus, was früher schon geometrisch bewiesen wurde, dass für Gruppen mit Grenzcurven Reihen vom Grade -2 nie convergiren können; denn, wenn Grenzcurven existiren, kann man stets eigentlich automorphe Reihen mit formell nur einem ∞-Punkte bilden.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass man, *wenn das Polygonnetz der Gruppe die ganze Ebene überdeckt, eigentlich automorphe Reihen vom Grade -2, die formell nur einen ∞-Punkt besässen, nicht construiren kann.*

Zum Beweise erinnere ich zunächst an den § 9 gegebenen Begriff des Residuums einer ∞-Stelle einer Form $(-2)^{\text{ten}}$ Grades. Es gilt, wie für Functionen, der Satz:

Die Summe der Residuen einer rationalen Form vom Grade -2 ist $= 0$.

Nun findet man leicht den Satz:

Das Residuum einer eigentlich automorphen Reihe vom Grade -2:

$$F_{-2}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varphi_{-2}(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})$$

an einer ∞-Stelle ξ_1, ξ_2 ist formell (d. h. abgesehen von der Convergenz) *gleich der Summe der Residuen von $\varphi_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ an seinen mit ξ_1, ξ_2 congruenten ∞-Stellen.*

Es sei etwa:

$$\varphi_{-2}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\psi(\xi_1, \xi_2)}{(\zeta\,\xi^{(\varkappa_1)})^{m_1}(\zeta\,\xi^{(\varkappa_2)})^{m_2}\ldots(\zeta\,\xi^{(\varkappa_\sigma)})^{m_\sigma}}.$$

Dann ist nach den früher gegebenen Regeln das Residuum der Reihe an der Stelle ξ_1, ξ_2 gleich dem Residuum der Summe:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma} \frac{\psi(\xi_1^{(\varkappa_\nu)}, \xi_2^{(\varkappa_\nu)})}{(\xi^{(\varkappa_1)}\,\xi^{(\varkappa_1)})^{m_1}(\xi^{(\varkappa_2)}\,\xi^{(\varkappa_2)})^{m_2}\ldots(\xi^{(\varkappa_\nu)}\,\xi^{(\varkappa_\sigma)})^{m_\sigma}}$$

an der Stelle ξ_1, ξ_2. Das Residuum des ν^{ten} Gliedes dieser Summe an der Stelle ξ_1, ξ_2 ist dasselbe, wie das Residuum desselben Gliedes, als Form von $\xi_1^{(\varkappa_\nu)}$, $\xi_2^{(\varkappa_\nu)}$ betrachtet, an der Stelle $\xi_1^{(\varkappa_\nu)}$, $\xi_2^{(\varkappa_\nu)}$; dieses stimmt aber überein mit dem Residuum der Form $\varphi_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ an der Stelle $\xi_1^{(\varkappa_\nu)}$, $\xi_2^{(\varkappa_\nu)}$.

Es ist daher in der That das Residuum von $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ formell gleich der Summe der Residuen von $\varphi_{-2}(\xi_1, \xi_2)$.

Nun folgt aus diesem Satze:

Wenn das Polygonnetz die ganze Ebene bedeckt, so ist die Summe der Residuen aller incongruenten ∞-Stellen von $F_{-2}(\xi_1, \xi_2)$ gleich der Summe der Residuen aller ∞-Stellen von $\varphi_{-2}(\xi_1, \xi_2)$, also $= 0$.

Dieser Satz für die Poincaré'schen Reihen stimmt überein mit dem auf S. 53 bewiesenen Residuensatz für die eigentlich automorphen Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades; nur ist der dort gegebene Beweis allgemeiner, weil er nicht die Darstellbarkeit der Form durch eine Poincaré'sche Reihe voraussetzt.

Aus diesem Residuensatz für die Reihen folgt unmittelbar, was zu beweisen war, dass man für Gruppen ohne Grenzcurven eigentlich automorphe Reihen vom Grade -2, die formell nur einen ∞-Punkt besitzen, nicht construiren kann.

§ 16.

Unendliche Reihen und Producte für die automorphen Integrale.

In § 10 habe ich auf den Zusammenhang aufmerksam gemacht, der zwischen den eigentlich automorphen Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades und zwischen den *automorphen Integralen* besteht: *die letzteren sind die Integralfunctionen der ersteren.*

Es fragt sich, ob man durch gliedweise Integration der Poincaré'schen Reihen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades wieder convergente Reihen erhalten kann, welche dann natürlich automorphe Integrale vorstellen müssen? Ich werde in diesem Paragraphen zeigen, dass dies in der That immer möglich ist, wenn die Poincaré'schen Reihen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades convergiren.

Diese neuen Reihen können natürlich nicht genau das Bildungsgesetz der Poincaré'schen Reihen haben; denn Poincaré'sche Reihen vom 0^{ten} Grade können sicher nicht convergiren. Sie unterscheiden sich von einer Poincaré'schen Reihe 0^{ten} Grades dadurch, dass zu jedem Gliede eine von ζ-unabhängige, aber mit $\varkappa$ wechselnde Constante hinzutritt, welche erst die Convergenz erzeugt. Ich will diese jetzt aufzustellenden Reihen wegen ihrer engen Beziehung zu den Poincaré'schen Reihen als *„Poincaré'sche Integralreihen"* bezeichnen, obwohl Hr. Poincaré selbst diese Reihen in ihrer Allgemeinheit ebensowenig behandelt hat, als die Poincaré'schen Reihen vom $(-2)^{\text{ten}}$ Grade*).

Wohl aber kommen solche Reihen für eine specielle Art von Gruppen, von einem etwas anderen Ausgangspunkte her gewonnen, in der schon oben genannten Arbeit von Hrn. Schottky vor, nämlich aus Productdarstellungen abgeleitet, während ich hier umgekehrt von ihnen aus zu den Producten gelange.

Es liege eine convergente eigentlich automorphe Poincaré'sche Reihe vom $(-2)^{\text{ten}}$ Grade vor:

$$F_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\varkappa} \varphi_{-2}(\zeta_1^{(\varkappa)}, \zeta_2^{(\varkappa)}).$$

Ich behaupte nun:

In demselben Masse, wie die vorgelegte Reihe, convergirt auch die Reihe der Integrale:

---

*) Nur ganz gelegentlich (Sur les groupes des équations linéaires, § 18—19) kommt der reelle Theil einer ganz speciellen Integralreihe vor, und an gleicher Stelle wird die Möglichkeit erörtert, wann im Hauptkreisfalle auch Poincaré'sche Reihen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades convergiren können; dabei kommt aber Herr Poincaré nicht etwa zu meinem einfachen Satze, dass sie immer dann convergiren, wenn der Hauptkreis nicht Grenzkreis ist, sondern er giebt ein complicirtes thatsächlich im einzelnen Falle kaum ausführbares Verfahren zur Entscheidung über diese Frage an.

$$\sum_{\varkappa} \int_{z_1, z_2}^{\zeta_1, \zeta_2} \varphi_{-2}(\zeta_1^{(\varkappa)}, \zeta_2^{(\varkappa)})\,(\zeta, d\zeta),$$

und muss daher nothwendigerweise die Integralfunction darstellen.

Ich zerlege, um den Beweis zu erbringen, zunächst die Form $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ in Partialbrüche

$$\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\lambda} \sum_{\xi} a_{\xi,\lambda} \cdot \frac{(\xi\eta)^{-2-\lambda}}{(\xi\eta)^{-2-\lambda}} \cdot (\xi\xi)^{\lambda}, \qquad \lambda \leqq -1$$

wo unter η_1, η_2 eine Stelle verstanden ist, an welcher $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ nicht ∞ wird, wo λ nur eine endliche Zahl negativer ganzer Zahlen durchläuft, und für ξ der Reihe nach alle ∞-Stellen von $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ zu setzen sind.*)

Ich fasse jetzt ein einzelnes Element der Partialbruchzerlegung und die aus demselben hervorgehende Poincaré'sche Reihe

$$\sum_{\varkappa} a_{\lambda} \cdot \frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)^{-2-\lambda}}{(\xi\eta)^{-2-\lambda}} (\zeta^{(\varkappa)}\xi)^{\lambda}$$

ins Auge.

Mit Rücksicht auf die Formeln

$$(\zeta, d\zeta) = (\zeta^{(\varkappa)}, d\zeta^{(\varkappa)}) = -\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)^2}{(\xi\eta)} \cdot d\left(\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)}{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}\right) = +\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)^2}{(\xi\eta)} \cdot d\left(\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)}\right)$$

erhält man hieraus die Integralreihe:

$$\text{I)} \qquad \sum_{\varkappa} \frac{a_{\lambda}(\xi\eta)^{1+\lambda}}{-1-\lambda} \cdot \left\{\left(\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)}\right)^{-1-\lambda} - \left(\frac{(Z^{(\varkappa)}\eta)}{(Z^{(\varkappa)}\xi)}\right)^{-1-\lambda}\right\}, \qquad \lambda < -1,$$

bezw., wenn $\lambda = -1$ ist:

$$\text{II)} \qquad \sum_{\varkappa} a_{-1} \left\{\log \frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)} - \log \frac{(Z^{(\varkappa)}\eta)}{(Z^{(\varkappa)}\xi)}\right\}.$$

Es ist nachzuweisen, dass beide Reihen in demselben Mass, wie eine Poincaré'sche Reihe vom Grade (-2) convergiren.

Ich schreibe zur Abkürzung

$$-1-\lambda = m > 0,$$

$$\frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)} = \zeta^{(\varkappa)}, \qquad \frac{(Z^{(\varkappa)}\eta)}{(Z^{(\varkappa)}\xi)} = Z^{(\varkappa)}.$$

Es seien sowohl ζ, wie Z so gewählt, dass sie weder mit ξ, noch mit η congruent sind; dann existirt für die absoluten Werthe von

*) Die Glieder der Ordnung $\lambda = -1$ der Summe rechts werden zwar für $(\xi\eta) = 0$ einzeln ∞, aber man sieht leicht, dass wegen $\Sigma a_{-1} = 0$ ihre Summe endlich bleibt, dass also in der That die ξ die einzigen ∞-Stellen sind.

$\zeta^{(\varkappa)}$ und $Z^{(\varkappa)}$, wie gross man auch $\varkappa$ wähle, eine obere und eine untere Grenze, so dass

$$A < |\zeta^{(\varkappa)}| < B, \qquad A < |Z^{(\varkappa)}| < B.$$

Nun schreibe ich unsere beiden Reihen in folgender Gestalt:

$$\sum_{\varkappa} a_\lambda \cdot (\xi\eta)^{-m} \cdot (\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}) \cdot \frac{(\zeta^{(\varkappa)})^m - (Z^{(\varkappa)})^m}{m(\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)})},$$

$$\sum_{\varkappa} a_{-1} \cdot (\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}) \cdot \frac{\log(\zeta^{(\varkappa)}) - \log Z^{(\varkappa)})}{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}.$$

Jetzt ist, um die erste Reihe weiter zu betrachten:

$$\left| \frac{(\zeta^{(\varkappa)})^m - (Z^{(\varkappa)})^m}{m(\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)})} \right| = \left| \frac{(\zeta^{(\varkappa)})^{m-1} + (\zeta^{(\varkappa)})^{m-2} \cdot (Z^{(\varkappa)})^1 + \cdots + (Z^{(\varkappa)})^{m-1}}{m} \right| < B^{m-1}.$$

Die erste Reihe convergirt daher mindestens ebenso stark wie die Reihe:

$$\sum_{\varkappa} (\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}).$$

Nun sieht man aber leicht, dass, unter $(-\varkappa)$ die zur Substitution $(\varkappa)$ inverse Substitution verstanden,

$$\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)} = \frac{(\zeta^{(\varkappa)}\eta)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)} - \frac{(Z^{(\varkappa)}\eta)}{(Z^{(\varkappa)}\xi)} = \frac{(\xi\eta^{(-\varkappa)})}{(\xi\xi^{(-\varkappa)})} - \frac{(Z\eta^{(-\varkappa)})}{(Z\xi^{(-\varkappa)})}$$

$$= - \frac{(\xi Z) \cdot (\xi\eta)}{(\xi\xi^{(-\varkappa)})(Z\xi^{(-\varkappa)})}$$

ist, dass also

$$\sum_{\varkappa} (\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}) = - (\xi Z) \cdot (\xi\eta) \cdot \sum_{\varkappa} \frac{1}{(\xi\xi^{(\varkappa)})} \frac{1}{(Z\xi^{(\varkappa)})}$$

ist. Die letzte Summe ist aber als Function von ξ_1, ξ_2 eine Poincaré'sche Reihe vom Grade -2, also absolut convergent.

Die Summen I) sind also in der That absolut convergent.

Um dasselbe von der Summe II) zu beweisen, reicht es offenbar hin, zu zeigen, dass der absolute Werth des Ausdrucks:

$$\frac{\log(\zeta^{(\varkappa)}) - \log(Z^{(\varkappa)})}{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}$$

eine endliche obere Grenze besitzt.

Da die Reihe

$$\sum_{\varkappa} (\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)})$$

convergirt, so kann man durch Abtrennung einer *endlichen* Anzahl von Gliedern von der Reihe II) bewirken, dass für alle übrigen Glieder etwa

$$|\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}| < \frac{1}{2} A$$

ist. Für alle diese Glieder ist

$$\frac{\log(\zeta^{(\varkappa)}) - \log(Z^{(\varkappa)})}{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}} = \frac{\log\left(1 + \frac{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}{Z^{(\varkappa)}}\right)}{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}$$

$$= \frac{1}{Z^{(\varkappa)}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}{Z^{(\varkappa)}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}{Z^{(\varkappa)}}\right)^2 - + \cdots\right).$$

Da nun

$$|\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}) < \tfrac{1}{2} A,$$

$$|Z^{(\varkappa)}| > A$$

ist, so ist die Reihe in der Klammer in der That convergent, und ihr absoluter Werth kleiner als

$$1 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots = \frac{\log\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\log 2.$$

Daher ist für alle $\varkappa$, mit Ausnahme höchstens einer endlichen Anzahl:

$$\left|\frac{\log(\zeta^{(\varkappa)}) - \log(Z^{(\varkappa)})}{\zeta^{(\varkappa)} - Z^{(\varkappa)}}\right| < \frac{2\log 2}{A}.$$

Also convergirt auch die zweite Reihe absolut; dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass, wenigstens für die höheren $\varkappa$, für beide Logarithmen derselbe Zweig gewählt ist, was auch keine Schwierigkeit macht, da bei höherem $\varkappa$ $\zeta^{(\varkappa)}$ und $Z^{(\varkappa)}$ hinlänglich nahe rücken, um jeden Zweifel über die Wahl des Zweiges zu beseitigen.

Die Reihe I) hört nur dann auf zu convergiren, wenn man ζ oder Z in einen mit ξ congruenten Punkt rücken lässt, die Reihe II) dagegen auch, wenn man ζ oder Z in einen mit dem Hülfspunkt η congruenten Punkt rücken lässt; dies ist kein Wunder, da ich für das einzelne logarithmische Element η_1, η_2 als zweite ∞-Stelle adjungiren musste. Wenn ich nun aber über alle ∞-Stellen ξ_1, ξ_2 summire, so kommt in der Summe

$$\sum_{\xi} a_{\xi,-1} \cdot \log\frac{(Z^{(\varkappa)}\xi)}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)}$$

η_1, η_2 gar nicht mehr vor. Diese Summe hätte ich aber auch aus Elementen mit einem von η_1, η_2 verschiedenen Hülfspunkte η_1', η_2' zusammensetzen können, welche in η_1, η_2 sämmtlich convergiren.

Die Convergenz der Summe

$$\sum\{\varphi(\zeta^{(\varkappa)}) - \varphi(Z^{(\varkappa)})\}$$

ist daher der einzigen Beschränkung unterworfen, dass ζ oder Z nicht mit einem der ∞-Punkte ξ der Function $\varphi(\zeta)$ congruent sein darf.

Ich kann jetzt meine „Poincaré'schen Integralreihen" ganz unabhängig von ihrer Entstehung durch Integration definiren:

Unter einer „Poincaré'schen Integralreihe" verstehe ich ganz allgemein eine Reihe von folgendem Bildungsgesetze:

$$F(\xi) = \sum_{\varkappa} \{\varphi(\xi^{(\varkappa)} - \varphi(Z^{(\varkappa)})\},$$

wo unter $\varphi(\xi)$ das Integral irgend einer rationalen Function verstanden ist.

Die Poincaré'schen Integralreihen convergiren immer dann, wenn die Poincaré'schen Reihen $(-2)^{ten}$ Grades convergiren.

Durch Poincaré'sche Integralreihen kann man jedes automorphe Integral, insbesondere also auch jede automorphe Function darstellen.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für Fundamentalbereiche von höherem Geschlechte anstellen, und führen dann zur Darstellung der Abel'schen Integrale der Mannigfaltigkeit durch Poincaré'sche Integralreihen, freilich immer nur dann, wenn die Poincaré'schen Reihen $(-2)^{ten}$ Grades convergiren.

Von diesen Poincaré'schen Integralreihen ist dann der Uebergang zu den Weber-Schottky'schen Productdarstellungen für die eindeutigen automorphen Functionen*) leicht zu finden.

Um für eine automorphe Function:

$$F(\xi) = \frac{(sx')(sx'')\ldots(sx^{|s|})}{(sy')(sy'')\ldots(sy^{|s|})}$$

eine Productdarstellung zu finden, stelle man $\log F(\xi)$ durch eine Poincaré'sche Integralreihe dar, die dann natürlich nur logarithmische Glieder enthält, und bilde dann $e^{\log F(\xi)}$. Man gelangt so zu einer Productdarstellung der Gestalt:

$$\frac{F(\xi)}{F(Z)} = \prod_{\varkappa} \left\{ \frac{(\xi^{(\varkappa)}\xi')(\xi^{(\varkappa)}\xi'')\ldots(\xi^{(\varkappa)}\xi^{|s|})}{(\xi^{(\varkappa)}\eta')(\xi^{(\varkappa)}\eta'')\ldots(\xi^{(\varkappa)}\eta^{|s|})} : \frac{(Z^{(\varkappa)}\xi')(Z^{(\varkappa)}\xi'')\ldots(Z^{(\varkappa)}\xi^{|s|})}{(Z^{(\varkappa)}\eta')(Z^{(\varkappa)}\eta'')\ldots(Z^{(\varkappa)}\eta^{|s|})} \right\}.$$

Man sieht übrigens leicht, dass man hierfür ebensogut schreiben kann:

$$\frac{F(\xi)}{F(Z)} = \prod_{\varkappa} \left\{ \frac{(\xi\xi'^{(\varkappa)})(\xi\xi''^{(\varkappa)})\ldots(\xi\xi^{|s|(\varkappa)})}{(\xi\eta'^{(\varkappa)})(\xi\eta''^{(\varkappa)})\ldots(\xi\eta^{|s|(\varkappa)})} : \frac{(Z\xi'^{(\varkappa)})(Z\xi''^{(\varkappa)})\ldots(Z\xi^{|s|(\varkappa)})}{(Z\eta'^{(\varkappa)})(Z\eta''^{(\varkappa)})\ldots(Z\eta^{|s|(\varkappa)})} \right\}.$$

Diese Productentwicklungen werden bei Hrn. Schottky übrigens nicht aus den Integralreihen hergeleitet, sondern umgekehrt die Integralreihen aus den Producten, die nur mit logarithmischen Gliedern durch einfaches Logarithmiren, die mit rationalen Gliedern durch Vergleichung von Reihenentwicklungen eines Logarithmus.

*) Vgl. S. 57.

Andere Productdarstellungen, mit transcendenten convergenzerzeugenden Factoren, geben die Herren v. Mangoldt und H. Stahl.*) Beide bilden erst, wie ich, automorphe Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades, und von diesen aus die Producte. Die ersteren gewinnt aber Hr. v. Mangoldt indem er eine holotypische Reihe ($R \leqq -4$)$^{\text{ten}}$ Grades mit einer der im § 17 zu besprechenden Darstellungen einer Form vom Grade $(-R-2)$ multiplicirt, Hr. Stahl, indem er eine Poincaré'sche Reihe R^{ten} Grades durch eine Reihe $(R+2)^{\text{ten}}$ Grades dividirt. —

So interessant auch ein längeres Verweilen bei den Reihen- und Productdarstellungen dieses Paragraphen sein würde, so ist es doch hohe Zeit, wieder zu den allgemeinen Betrachtungen zurückzukehren, die den eigentlichen Kern meiner Untersuchung bilden.

§ 17.

Die Elementarformen und ihre Verwendung in der Theorie der automorphen Formen.

Wir wissen, dass automorphe Formen von negativem Grade $R \leqq -2$ mit nur einer ∞-Stelle immer möglich sind, mit Ausnahme der eigentlich automorphen Formen vom Grade -2.

Es fragt sich, ob man stets auch Poincaré'sche Reihen — innerhalb der für die Convergenz nothwendigen Grenzen für den Grad R — mit nur einer beliebigen ∞-Stelle construiren kann?

Wenn die Gruppe Grenzcurven besitzt, so ist das ohne Weiteres klar; man braucht nur eine Reihe zu bilden:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varrho_\varkappa^{-1} \cdot \frac{\varphi_{R+1}(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})}{(\xi^{(\varkappa)}\xi)},$$

mit einer Form $\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)$, deren ∞-Stellen sämmtlich ausserhalb der Grenzcurven liegen.

Schwieriger ist dies einzusehen, wenn die Fundamentalbereiche die ganze Ebene überdecken. Dann muss man dem $\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)$ noch eine Reihe scheinbarer ∞-Stellen beilegen, welche sich aber gegenseitig aufheben müssen. Man kann dies auf unendlich verschiedene Weise anordnen; ich will nur an einem Beispiele die Möglichkeit beweisen.

Ich setze, unter $\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)$ eine ganze Form vom Grade $(R+\sigma+1)$ verstanden:

*) v. Mangoldt: Ueber ein Verfahren zur Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte nebst einer Ausdehnung dieses Verfahrens auf allgemeinere Functionen. Gött. Nachr. 1886, S. 1 ff. — H. Stahl: Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte. Math. Ann. 33, S. 291 ff (1888).

$$\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)}{(\xi\eta^{(\varkappa_1)})(\xi\eta^{(\varkappa_2)})\cdots(\xi\eta^{(\varkappa_\sigma)})}.$$

Die Bedingung dafür, dass der Punkt η_1, η_2 kein ∞-Punkt der Reihe sein soll, lautet dann:

$$A_\eta = \sum_{\nu=1}^{\nu=\sigma} \varrho_{\varkappa_\nu}^{-1} \cdot \frac{\psi_{R+\sigma+1}\left(\eta_1^{(\varkappa_\nu)}, \eta_2^{(\varkappa_\nu)}\right)}{(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_1)})(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_2)})\cdots(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_\sigma)})} \cdot \frac{1}{(\eta^{(\varkappa_\nu)}\xi)} = 0.$$

Diese stellt eine homogene lineare Gleichung vor, welcher die $(R+\sigma+2)$ Coefficienten der ganzen Form $\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)$ genügen müssen. Damit sie durch nicht verschwindende Coefficienten lösbar sei, muss man σ so gross wählen, dass

$$R + \sigma + 2 \geq 2$$

ist, d. h.

$$\sigma \geq -R.$$

Lösbar ist dann die Gleichung immer, aber im allgemeinen nur so, dass die Coefficienten der Form $\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)$ Formen von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ werden.

Wollte man sie so bestimmen, dass sie von ξ_1, ξ_2 unabhängig würden, so müsste man die Gleichung mit $(\xi\eta^{(\varkappa_1)})(\xi\eta^{(\varkappa_2)})\ldots(\xi\eta^{(\varkappa_\sigma)})$ multipliciren, nach ξ_1, ξ_2 ordnen, und den Coefficienten jedes Gliedes für sich $=0$ setzen. Man erhielte dann statt *einer* Gleichung σ homogene lineare Gleichungen, und um diesen durch nicht verschwindende $a_0, a_1, \ldots$ zu genügen, müsste man σ so gross wählen, dass

$$R + \sigma + 2 \geq \sigma + 1,$$

d. h.

$$R \geq -1$$

wäre, was ja nicht möglich ist.

Dies schadet auch nichts, dass die Coefficienten von ξ_1, ξ_2 abhängig werden. Aber es kann ein anderer Umstand eintreten, welcher die etwa gefundenen Coefficienten unbrauchbar machen würde, ein Umstand, der von Hrn. Poincaré, der übrigens eine etwas andere weniger einfache Anordnung der sich aufhebenden ∞-Stellen hat, nicht berücksichtigt worden ist*).

Es könnte nämlich der Fall eintreten, dass alle Lösungssysteme der Gleichung auch das ∞-Werden an der Stelle ξ_1, ξ_2 in Wegfall bringen würden, d. h. auch die Relation erfüllten:

$$A_\xi = \frac{\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)}{(\xi\eta^{(\varkappa_1)})(\xi\eta^{(\varkappa_2)})\cdots(\xi\eta^{(\varkappa_\sigma)})} = 0.$$

In der That muss dies bei eigentlich automorphen Formen vom Grade -2 immer eintreten.

*) Acta math. Bd. 1, p. 281—285.

Ich beweise, dass das nur in diesem Falle eintritt, und dass in allen andern Fällen die ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 sonst gewisse nicht identische Relationen erfüllen müssten, deren Erfülltsein man immer durch geeignete Wahl der η_1, η_2 vermeiden kann.

Ich ordnè A_η und A_ξ nach den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ von ψ:

$$A_\eta = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{R+\sigma+1} f_{R+\sigma+1},$$
$$A_\xi = a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_{R+\sigma+1} g_{R+\sigma+1}$$

wo die f und g Formen von ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 sind.

Soll nun jedes System $a_0, a_1, \ldots$ welches $A_\eta = 0$ macht, auch A_ξ verschwinden lassen, so muss A_ξ z. B. auch verschwinden, wenn man $a_0 = f_1$, $a_1 = -f_1$ setzt. Daraus folgt aber

$$\frac{f_0}{g_0} = \frac{f_1}{g_1}$$

und in derselben Weise folgt überhaupt

$$\frac{A_\eta}{A_\xi} = \frac{f_0}{g_0} = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \cdots = h(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$$

unter h eine von $a_0, a_1, \ldots, a_{R+\sigma+1}$ unabhängige Form von ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 verstanden.

Ich muss also dieselbe Form h auch erhalten, wenn ich $\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2)$ irgendwie specialisire, z. B. wenn ich setze:

$$\psi_{R+\sigma+1}(\xi_1, \xi_2) = (\xi\eta^{\varkappa - R})\,(\xi\eta^{(\varkappa - R+1)}) \cdots (\xi\eta^{(\varkappa\sigma)}).$$

Dann wird aber:

$$h(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=-R-1} \varrho_{\varkappa_\nu}^{-1} \cdot \frac{(\xi\eta^{(\varkappa_1)})}{(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_1)})} \cdot \frac{(\xi\eta^{(\varkappa_2)})}{(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_2)})} \cdots \frac{(\xi\eta^{(\varkappa_{-R-1})})}{(\eta^{(\varkappa_\nu)}\eta^{(\varkappa_{-R-1})})}.$$

Das Gleiche muss man aber erhalten, wenn man die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{-R-1}$ in irgend einer andern Weise aus den $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\sigma$ auswählt; durch Gleichsetzung dieser verschiedenen Ausdrücke erhält man als Bedingung für das Eintreten des vermutheten Ausnahmefalles eine grosse Zahl nicht identischer Gleichungen, welche in ξ_1, ξ_2 vom $(-R-2)^{\text{ten}}$ Grade sind.

Nur wenn $R = -2$ ist, enthalten diese Gleichungen ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 nicht; sie lauten dann

$$-\varrho_{\varkappa_1}^{-1} = -\varrho_{\varkappa_2}^{-1} = -\varrho_{\varkappa_3}^{-1} = \cdots = -\varrho_{\varkappa_\sigma}^{-1}.$$

Diese Gleichungen sind nur im Falle der eigentlich automorphen Formen identische, sonst aber kann man sie immer durch geeignete Wahl der Substitutionen $\mathbf{S}_{\varkappa_1}, \mathbf{S}_{\varkappa_2}, \ldots$ vermeiden.

Hiermit wissen wir, dass man, *ausser im Falle der eigentlich automorphen Reihen vom Grade* -2, *stets eine automorphe Reihe mit*

nur einer ∞-Stelle in jedem Bereiche construiren kann, von der Gestalt:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varrho_\varkappa^{-1} \cdot \frac{\varphi_{R+1}(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})}{(\xi^{(\varkappa)}\xi)}.$$

Die Coefficienten der rationalen Form $\varphi_R(\xi_1, \xi_2)$ sind im Allgemeinen rationale Formen von ξ_1, ξ_2; denn dies kann man der Allgemeinheit halber auch im Falle der Existenz von Grenzcurven annehmen, und muss es sogar, wenn man scheinbare ∞-Stellen, die sich gegenseitig aufheben sollen, adjungiren will.

Fassen wir nun den Coefficienten des ∞-Werdens an jeder ∞-Stelle ins Auge, so erweist sich derselbe bei unsern Summen im Allgemeinen als von ξ_1, ξ_2 abhängig, so dass er seinen Werth ändert, wenn man, ohne die Gestalt der Form $\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)$ zu ändern, ξ_1, ξ_2 variirt.

Der Coefficient des ∞-Werdens an einer Stelle $\xi_1^{(\varkappa)}$, $\xi_2^{(\varkappa)}$ ist nämlich:

$$\varrho_\varkappa \cdot \varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2).$$

Ein einfacheres Verhalten zeigen also unsere Summen, wenn man sie noch durch die rationale Form $\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)$ dividirt.

Ich nenne eine automorphe Form von ξ_1, ξ_2, welche nur an einer Stelle ξ_1, ξ_2 des Fundamentalbereiches von der ersten Ordnung mit dem Coefficienten **1** *unendlich wird, eine „Elementarform" und bezeichne sie mit:*

$$\Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varrho_\varkappa^{-1} \cdot \frac{\varphi_{R+1}(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)})}{(\xi^{(\varkappa)}\xi) \cdot \varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)}.$$

Die Elementarformen sind, wenn sie in ξ_1, ξ_2 vom Grade R sind, als Formen der ∞-Stelle ξ_1, ξ_2 vom Grade

$$R' = -R - 2.$$

Irgend zwei Elementarformen von gleichem Grade und Multiplicatorsysteme können sich nur um eine holotypische automorphe Reihe von ξ_1, ξ_2 unterscheiden.

Irgend eine beliebige automorphe Form von ξ_1, ξ_2 vom Grade R mit nur einfachen ∞-Stellen lässt sich aus Elementarformen und $(\delta+1)$ linear unabhängigen holotypischen Formen linear zusammensetzen.

Die Elementarformen zeigen also ein ganz ähnliches Verhalten, wie in der Theorie der Abel'schen Functionen für die Bildung beliebiger Integrale 2. Gattung mit nur einfachen ∞-Stellen die Integrale mit nur einer ∞-Stelle, wobei als Analogon der Integrale 1. Gattung sich hier die $\delta + 1$ linear unabhängigen holotypischen Formen einstellen.

Nun will ich aber die Elementarformen statt als Formen von ξ_1, ξ_2 auch als solche von ξ_1, ξ_2 ansehen, und ihr Verhalten bei Aenderung von ξ_1, ξ_2 beobachten. Es zeigt sich:

Während die Elementarformen in ξ_1, ξ_2 in dem System congruenter Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ unendlich wurden mit den Coefficienten $\varrho_\varkappa$, werden sie als Formen von ξ_1, ξ_2 in dem System congruenter Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ unendlich mit den Coefficienten $-\varrho_\varkappa^{-1}$, und ausserdem werden sie nur noch an einer endlichen Anzahl nicht periodisch gelegener Stellen unendlich wie eine rationale Form.

Diese nicht periodisch gelegenen ∞-Stellen will ich secundäre ∞-Stellen nennen. Sie kommen für unsere weiteren Betrachtungen nicht in Belang, und stören dieselben auch nicht.

Das Verhalten an den periodisch gelegenen ∞-Stellen ist dagegen dasselbe, wie es eine für den Grad R' mit dem reciproken Multiplitorsysteme $\varrho'_\varkappa = \varrho_\varkappa^{-1}$ gebildete Elementarform, negativ genommen,

$$-\Omega_{R'}(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$$

falls sie möglich wäre, zeigen müsste.

Dieses automorphe Verhalten der ∞-Stellen legt es nahe, die Aenderung von $\Omega(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ bei Anwendung einer Substitution der Gruppe auf ξ_1, ξ_2 zu untersuchen.

Eine leichte Ueberlegung ergiebt:

$$\Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) = \varrho_i' \cdot \Omega^{(i)}(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2) \quad (\varrho_i' = \varrho_i^{-1}),$$

wo $\Omega^{(i)}$ eine genau ebenso wie Ω gebildete Elementarform bedeutet, nur dass statt der Form $\varphi_{R+1}(\xi_1, \xi_2)$ diejenige Form $\varphi_{R+1}^{(i)}(\xi_1, \xi_2)$ benutzt ist, welche entsteht, wenn man in φ_{R+1} für $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2$ bezw. $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}; \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$ einsetzt.

Die Differenz

$$\Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) - \varrho_i' \Omega(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$$

ist daher eine holotypische Poincaré'sche Reihe von ξ_1, ξ_2, sowie eine nirgends (mit Ausnahme höchstens der secundären ∞-Stellen) ∞ werdende Form R'^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2.

Man könnte vermuthen, dass $\Omega(\xi_1, \xi_2; \eta_2, \eta_2)$ eine automorphe Form R'^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho'_\varkappa$ wäre, und dass also die Differenz identisch verschwände. Das ist aber im Allgemeinen nicht so. Denn erinnern wir uns der Beziehung, dass, wenn

$$R + R' + 2 = 0, \qquad \varrho_i \varrho_i' = 1$$

ist, dass dann stets

$$\delta + \delta' + 2 = 0$$

ist, so zeigt sich, dass der vermuthete Fall nur eintreten kann, wenn $\delta = -1$ ist. Denn nur, wenn $\delta = -1$ ist, ist $\delta' = -1$, und nur dann existiren wirklich automorphe Formen R'^{ten} Grades mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho'_\varkappa$ und nur einem Systeme congruenter ∞-Stellen.

In diesem Falle ist aber auch unsere Differenz wirklich identisch 0, da sie eine holotypische Reihe von ζ_1, ζ_2 sein würde, und diese, wenn $\delta = -1$ ist, alle identisch verschwinden. Also:

Wenn $\delta = -1$ ist, so ist jede Elementarform:

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$$

automorph sowohl in ζ_1, ζ_2 mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$, wie in ξ_1, ξ_2 mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho'_\varkappa$.

Diese reciproke Beziehung zwischen den ζ_1, ζ_2 und ξ_1, ξ_2 drückt sich auch in dem Ausdruck durch z_1, z_2 und x_1, x_2 aus:

$$\Omega(\overset{R}{\widehat{\zeta_1, \zeta_2}}; \overset{R'}{\widehat{\xi_1, \xi_2}}) = c^{-2} \cdot \frac{\prod (z\, e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \prod (x\, e_i)^{\frac{\varepsilon'_i}{l_i}}}{(zx)},$$

wo

$$R + R' + 2 = 0, \qquad \varrho_\varkappa \varrho'_\varkappa = 1,$$

$$\delta = \delta' = -1, \qquad \frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon'_i}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}$$

ist.

Wenn dagegen $\delta > -1$, $\delta' < -1$ ist, so kann $\Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$ nicht zugleich automorph in ξ_1, ξ_2 sein.

In Folge dessen kann man die Substitution $\varkappa$ so wählen, dass sich Ω bei derselben nicht automorph verhält. Dann ist

die Form:

$$F_R^{(\varkappa)}(\zeta_1, \zeta_2) = \Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}) - \varrho'_\varkappa \cdot \Omega(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$$

das erste Beispiel einer sicher nicht identisch verschwindenden holotypischen Poincaré'schen Reihe von ζ_1, ζ_2.

Die Elementarform kann also im Allgemeinen keine automorphe Form von ξ_1, ξ_2 sein, und zwar nur deswegen, weil eine automorphe Form mehr als eine ∞-Stelle besitzen muss. Denken wir wieder an die Analogie der Abel'schen Functionen: dort kann ein einfaches Integral 2. Gattung darum und darum allein nie eine algebraische Function sein, weil letztere stets mehr als eine ∞-Stelle besitzen müssen; eine Ausnahme, wie hier $\delta = -1$, bildet dort der Fall $p = 0$, wo in der That das einfache Integral 2. Gattung stets eine algebraische Function ist.

Wohl aber kann eine Summe einfacher Integrale 2. Gattung mit geeigneten Coefficienten eine algebraische Function sein. Die Coefficienten muss man nur so bestimmen, dass die Perioden der Summe verschwinden.

Genau ebenso ist es hier.

Einem Integrale 2. Gattung entspricht die Elementarform

$$\Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$$

der ∞-Stelle ξ_1, ξ_2, und einer Periode dieses Integrals die holotypische automorphe Form der ∞-Stelle ξ_1, ξ_2:

$$F_R^{(\varkappa)}(\xi_1, \xi_2) = \Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}) - \varrho_\varkappa' \Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2).$$

Man wird also eine lineare Verbindung:

$$A_1 \Omega(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) + A_2 \Omega(\xi_1'', \xi_2''; \xi_1, \xi_2) + \cdots + A_\varepsilon \Omega(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}; \xi_1, \xi_2)$$

$$\varepsilon \geq -\delta' = \delta + 2$$

zu bilden suchen, mit solchen $A_1, A_2, \ldots, A_\varepsilon$, dass, unter $F_R(\xi_1, \xi_2)$ irgend eine holotypische Reihe von ξ_1, ξ_2 vom Grade R und dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$ verstanden, stets die Gleichung:

$$A_1 F_R(\xi_1', \xi_2') + A_2 F_R(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon F_R(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0$$

erfüllt ist.

Dies ist in der That möglich, sobald ε grösser ist als die Zahl der existirenden linear unabhängigen holotypischen Reihen, — ich sage absichtlich nicht Formen, denn ich habe früher noch die Möglichkeit offen gelassen, dass die Zahl der linear unabhängigen Reihen eine geringere sei, als die der Formen überhaupt.

Es sei also

$$\sigma < \delta + 1$$

die Zahl der linear unabhängigen Reihen, und diese selbst seien etwa:

$$F_R^{(1)}(\xi_1, \xi_2), \; F_R^{(2)}(\xi_1, \xi_2), \ldots, F_R^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2).$$

Dann ist jede holotypische Reihe:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = a_1 F_R^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + a_2 F_R^{(2)}(\xi_1, \xi_2) + \cdots + a_\sigma F_R^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2),$$

Man muss daher die $A_1, A_2, \ldots, A_\varepsilon$ so bestimmen, dass sie dem Gleichungssysteme genügen:

$$\begin{aligned}
&A_1 F_R^{(1)}(\xi_1', \xi_2') + A_2 F_R^{(1)}(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon F_R^{(1)}(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0, \\
&A_1 F_R^{(2)}(\xi_1', \xi_2') + A_2 F_R^{(2)}(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon F_R^{(2)}(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0, \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&A_1 F_R^{(\sigma)}(\xi_1', \xi_2') + A_2 F_R^{(\sigma)}(\xi_1'', \xi_2'') + \cdots + A_\varepsilon F_R^{(\sigma)}(\xi_1^{|\varepsilon|}, \xi_2^{|\varepsilon|}) = 0.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nun in der That immer dann vermittelst nicht verschwindender $A_1, A_2, \ldots, A_\varepsilon$ lösbar, wenn:

$$\varepsilon \geq \sigma + 1$$

ist.

Die kleinstmögliche Anzahl von ∞-Stellen einer aus einfachen Formen zusammengesetzten automorphen Form von ξ_1, ξ_2 wäre danach $= \sigma + 1$. Nun wissen wir aber, dass die Anzahl den Unendlichkeitsstellen stets $\geq \delta + 2$ sein muss. Es muss also

$$\sigma \geq \delta + 1$$

sein. Andererseits ist aber

$$\sigma \leq \delta + 1.$$

Es ist also nothwendig:

$$\sigma = \delta + 1,$$

d. h.

Damit ist bewiesen, dass genau ebensoviel linear unabhängige holotypische Poincaré'sche Reihen existiren, als es linear unabhängige holotypische Formen giebt.

Es lässt sich daher eine jede beliebige automorphe Form von geeignetem negativen Grade durch eine Poincaré'sche Reihe darstellen.

Wir haben aber zugleich eine Darstellungsweise für die allgemeinste automorphe Form von ξ_1, ξ_2 vom *positiven* Grade R', und dem Multiplicatorsysteme $\varrho'_\varkappa$ erzielt, vorausgesetzt, dass sie nur einfache ∞-Stellen besitzt.

Da nämlich die $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ im Ganzen $\delta + 1$ homogenen linearen Gleichungen genügen müssen, so enthält die Form:

$$\alpha) \quad F_R(\xi_1, \xi_2) = A_1\Omega(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) + A_2\Omega(\xi_1'', \xi_2''; \xi_1, \xi_2) + \cdots + A_\sigma\Omega(\xi_1^{|\sigma|}, \xi_2^{|\sigma|}; \xi_1, \xi_2)$$

mindestens $\varepsilon - \delta - 1 = \varepsilon + \delta' + 1$ linear vorkommende willkürliche Constanten. Genau ebensoviel lineare Parameter enthält aber der allgemeine Ausdruck:

$$\beta) \quad F_R(\xi_1, \xi_2) = \prod (x e_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}} \cdot \frac{g_{\delta'+1}(x_1, x_2)}{(xz')(xz'')\ldots(xz^{|\sigma|})}.$$

Es muss also die Mannigfaltigkeit der Ausdrücke α) übereinstimmen mit derjenigen der Ausdrücke β).

Auch noch in anderer Weise kann man einsehen, dass sich jede automorphe Form vom Grade R' als Summe von Elementarformen darstellen lässt.

Es sei gegeben der allgemeine Ausdruck:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \prod (x e_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}} \cdot \frac{g_{\delta'+2}(x_1, x_2)}{(xz')(xz'')\ldots(xz^{|\sigma|})}.$$

Der Coefficient des ∞-Werdens an der Stelle $z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}$ ist:

$$\prod (z^{|\nu|} e_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}} \cdot \frac{g_{\delta'+\sigma}(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|})}{(z^{|\nu|}z')(z^{|\nu|}z'')\ldots(z^{|\nu|}z^{|\sigma|})},$$

also der Coefficient des ∞-Werdens an der Stelle $\xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}$ nach S. 50:

$$-A_\nu = c^2 \cdot \prod (z^{|\nu|} e_i)^{-\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \frac{g_{\delta'+\sigma}(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|})}{(z^{|\nu|}z')(z^{|\nu|}z'')\ldots(z^{|\nu|}z^{|\sigma|})} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon_i'}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i}\right).$$

Es braucht jetzt nur gezeigt zu werden, dass die so bestimmten A_ν auch den Relationen auf S. 75 genügen.

Zu dem Zwecke genügt es zu zeigen, dass, unter $F_R(\xi_1, \xi_2)$ eine beliebige holotypische automorphe Form vom R^{ten} Grade und dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa = \varrho'^{-1}_\varkappa$ verstanden, immer

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu F_R(\xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}) = 0$$

ist.

Für $F_R(\xi_1, \xi_2)$ hat man die allgemeine Formel:

$$F_R(\xi_1, \xi_2) = \prod (\varepsilon e_i)^{\frac{e_i}{l_i}} \cdot G_\delta(z_1, z_2).$$

Es ist also zu beweisen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=s} \frac{g_{\delta'+s}(z_1^{|\nu|}, z_2^{|\nu|}) \cdot G_\delta(z_1, z_2)}{(z^{|\nu|} z')(z^{|\nu|} z'') \dots (z^{|\nu|} z^{|s|})} = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als der bekannte Residuensatz für die rationale Form $(-2)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{g_{\delta'+s}(z_1, z_2) \cdot G_\delta(z_1, z_2)}{(zz')(zz'') \dots (zz^{|s|})}.$$

Wir haben also den Satz:

Man kann jede automorphe Form von geeignetem positiven Grade mit nur einfachen ∞-Stellen als Summe von Elementarformen ihrer einzelnen ∞-Stellen darstellen.

Unsere Elementarformen dienen also in gleicher Weise zur Darstellung automorpher Formen ihres ersten Argumentpaares, wie ihres zweiten Argumentpaares, durch die ∞-Stellen. Dabei sind im ersten Falle die Coefficienten derselben keinen Beschränkungen unterworfen, ja es bleiben noch $\delta + 1$ Constanten der darzustellenden Form unbestimmt, im zweiten Falle dagegen müssen sie noch $-(\delta' + 1) = \delta + 1$ lineare homogene Gleichungen befriedigen, damit die dargestellte Form automorph sei.

Hier liegt auch der Grund, warum die Elementarform im Allgemeinen nur in Bezug auf das erste Argumentpaar automorph ist. Allgemein wird man die Argumentpaare ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 als gleichberechtigt ansehen dürfen. Dann *ist die Elementarform immer in Bezug auf dasjenige Argumentpaar automorph, in welchem es von solchem Grade ist, dass automorphe Formen des betr. Grades mit nur einer ∞-Stelle möglich sind.*

Dieses eben ausgesprochene allgemeine Princip lässt z. B. auch sofort übersehen, wie sich die Theorie der Elementarformen bei den von mir meist unbeachtet gelassenen endlichen Gruppen gestaltet; da

dort wegen $q > 0$ gerade die entgegengesetzten Verhältnisse herrschen, *so werden die einfachen Formen für die endlichen Gruppen so zu bilden sein, dass sie in demjenigen Argumentpaar automorph sind, in dem sie von positivem Grade sind.* Die Bildung derselben hat keine Schwierigkeiten.

§ 18.

Vergleich der Elementarformen mit Hrn. Poincaré's „éléments simples."

Die Betrachtungen des § 17 sind bei Hrn. Poincaré wenigstens ihrer Idee nach in der Abhandlung über die Fuchs'schen Functionen enthalten, dort aber nicht sehr übersichtlich angeordnet, ohne Hervorhebung des wesentlichen dabei benutzten Princips. Diess letztere ist theilweise nachgeholt in der Abhandlung: „Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes" (Acta math. Bd. V) Seite 252—257, wo auch zuerst die Analogie des Verfahrens mit der Zerlegung einer rationalen Function in Partialbrüche, oder einer algebraischen Function in Integrale zweiter Gattung betont wird. Man sieht dass die an der letzten Stelle als besonders wichtig erkannte Relation

$$\psi(h) = \varphi(h+1)$$

(wo unter $\psi(h)$ die um 1 verminderte Mindestanzahl der ∞-Stellen einer automorphen Form vom Grade $+2h$, unter $\varphi(h+1)$ die Anzahl der linear unabhängigen holotypischen Formen vom Grade $-2(h+1)$ verstanden ist) im Falle $p = 0$ identisch ist mit meiner Relation:

$$\delta + \delta' + 2 = 0.$$

In der That entspricht, was Hr. Poincaré allgemein als ein „élément simple" bezeichnet, genau dem, was ich im vorliegenden Falle der automorphen Formen eine „Elementarform" nenne. Aber in der Aufstellung dieser Elementarformen schlage ich gerade den entgegengesetzten Weg ein, als Hr. Poincaré, wie ich glaube, zum Vortheil für die Allgemeinheit und für die Einsicht in das Wesen der Sache.

Hr. Poincaré nämlich nimmt a priori eine automorphe Form $F_R(\xi_1, \xi_2)$ von positivem Grade an (es sei mir gestattet meine formentheoretische Bezeichnungsart anzuwenden), stellt dieselbe als Summe von ∞ vielen Partialbrüchen dar, und beweist nachträglich, dass diese Zerlegung die Form wirklich erschöpft. Bei diesem letzteren Beweise stellt sich heraus, dass die Zusammenfassung derjenigen Partialbrüche, welche einem einzelnen System congruenter ∞-Stellen entsprechen, eine automorphe Form vom Grade $R = -R' - 2$ der ∞-Stelle ξ_1, ξ_2 liefert, und dieser Umstand führt eben zum gesuchten Beweise. Obwohl hier ∞ viele Zerlegungen in einfache Elemente möglich sind, so kommt Hr. Poincaré hierdurch nur zu einer speciellen Zerlegung,

die er allerdings im Falle, wo eine Grenzcurve existirt, dadurch etwas verallgemeinert, dass er anstatt $F_{R'}(\xi_1, \xi_2)$ das Product dieser Form mit einer rationalen Function von ξ darstellt, welche nur in dem von den Bereichen nicht überdeckten Gebiete unendlich wird.

Mein Verfahren dagegen ist das umgekehrte: Nachdem zuvor nur von automorphen Formen negativen Grades von ξ_1, ξ_2 und ihren Darstellungen durch Poincaré'sche Reihen die Rede gewesen ist, untersuche ich eine solche Form mit nur einem System congruenter ∞-Stellen $\Omega(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ als Function der ∞-Stelle ξ. Dabei stellt sich heraus, dass Ω eine Form R'^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 ist, welche an den Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ ebenso ∞ wird, wie eine automorphe Form von ξ_1, ξ_2 mit den ∞ Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}$ es werden müsste. Dies führt nun darauf, die Form

$$\Omega(\overset{R}{\frown}\xi_1, \xi_2; \overset{R'}{\frown}\xi_1, \xi_2)$$

nicht allein, wie zuerst, als einfaches Zerlegungselement einer automorphen Form R^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2, sondern auch einer solchen R'^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 zu betrachten.

Ich habe so den Vortheil, in meiner Elementarform wirklich das allgemeinste einfache Element gefunden zu haben, und zugleich das Wesen derselben vollständig einzusehen: es ist nämlich in der Definition Seite 72 ausgesprochen.

Es entsteht eine Schwierigkeit für die Construction solcher Elementarformen, wenn die Gruppe keine Grenzcurve besitzt: man muss dann ausser der einen wirklichen ∞-Stelle noch weitere scheinbare ∞-Stellen adjungiren, die sich gegenseitig aufheben. Diess kann natürlich auf unendlich viele Arten geschehen, und ich bezeichne die von mir in dieser Hinsicht befolgte Methode ausdrücklich nur als ein Beispiel, zum Beweise, dass es überhaupt möglich ist.

Auch Hr. Poincaré führt zu demselben Zwecke gegenseitig sich aufhebende ∞-Stellen ein, aber es erweckt den Anschein, als ob seine Anordnung die einzig mögliche Weise wäre, und doch ist sie, wie mir scheint, gerade so complicirt als möglich.

Welch grossen Umweg Hr. Poincaré macht, wird man am leichtesten erkennen, wenn ich seine Formeln (Acta math. Bd. 1, Seite 282 ff.) in homogene Schreibweise umsetze.

Für Hrn. Poincaré's Variable z führe ich ξ_1, ξ_2, für a ξ_1, ξ_2 ein; seinem Punkte $z = 0$ ertheile ich die homogenen Coordinaten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, dem Punkte $z = \infty$ die Coordinaten η_1, η_2.

Zunächst wird nun l. c. eine Poincaré'sche Reihe von ξ_1, ξ_2 vom R^{ten} Grade $(R \leqq -4)$ construirt, welche nur an den Stellen $\eta_1^{(\varkappa)}, \eta_2^{(\varkappa)}$ je $(-R-\lambda)$-fach ∞ wird, und zwar so, dass sie an der Stelle η_1, η_2 die Entwicklung hat

$$(1) \qquad \Theta_\lambda(\xi_1, \xi_2) = 1 \cdot \left(\frac{(\xi\varepsilon)}{(\eta\varepsilon)}\right)^{-\lambda} \cdot (\xi\eta)^{R+\lambda} + P_R(\xi_1, \xi_2),$$

unter $P_R(\xi_1, \xi_2)$ eine an der Stelle η_1, η_2 nicht unendlich werdende Form verstanden. Dann bildet er eine Reihe von der Gestalt:

$$(2) \qquad \Phi(\overset{R}{\wedge}(\xi_1, \xi_2); \overset{R'}{\wedge}(\xi_1, \xi_2)) = \sum_{\varkappa} \frac{(\xi^{(\varkappa)}\eta)^{R+1}}{(\xi\xi^{(\varkappa)})\,(\xi\eta)^{R+1}}.$$

Die Reihe (2) wird aber als Form von ξ_1, ξ_2 nicht nur an den Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}$, $\xi_2^{(\varkappa)}$, sondern auch an den Stellen $\eta_1^{(\varkappa)}$, $\eta_2^{(\varkappa)}$ ∞, z. B. an der Stelle η_1, η_2, wie das Glied

$$\frac{(\xi\eta)^{R+1}}{(\xi\xi)\,(\xi\eta)^{R+1}}$$

d. h. wie:

$$-\sum_{\lambda=0}^{\lambda=R'} \left(\frac{(\xi\varepsilon)}{(\eta\varepsilon)}\right)^{\lambda} \cdot (\xi\eta)^{R'-\lambda} \cdot \left(\frac{(\zeta\varepsilon)}{(\eta\varepsilon)}\right)^{-(1+\lambda)} \cdot (\zeta\eta)^{R+(1+\lambda)}.$$

In Folge dessen ist folgendes eine Elementarform:

$$(3) \quad \Omega(\overset{R}{\wedge}(\xi_1, \xi_2); \overset{R'}{\wedge}(\xi_1, \xi_2)) = \Phi(\overset{R}{\wedge}(\xi_1, \xi_2); \overset{R'}{\wedge}(\xi_1, \xi_2)) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=R'} \left(\frac{(\xi\varepsilon)}{(\eta\varepsilon)}\right)^{\lambda} \cdot (\xi\eta)^{R'-\lambda} \cdot \Theta_{1+\lambda}(\overset{R}{\wedge}(\xi_1, \xi_2)).$$

Bei diesem Verfahren sieht man sofort, dass Hr. Poincaré dasselbe Ziel viel rascher erreicht hätte, wenn er gleich eine Form $\Theta_1(\xi_1, \xi_2)$ als Elementarform benutzt hätte. Aber es entging ihm auf irgend welche Weise, was man bei Anwendung der homogenen Schreibweise durchaus sehen muss, dass der ∞-ferne Punkt η_1, η_2 so gut wie irgend ein Punkt ξ_1, ξ_2 ist. In seiner eigenen, nichthomogenen Schreibweise wäre das richtige Verfahren also das folgende gewesen:

Zuerst ist die vorliegende Gruppe G vermöge einer Substitution welche ε nach ∞ wirft, in eine Gruppe G' zu transformiren, dann für diese Gruppe G' eine Reihe $\Theta_1(a)$ zu bilden, und endlich wieder auf a die inverse Substitution anzuwenden.

Schlussbemerkungen.

Wenn ich in der Einleitung einen gewissen Unterschied meiner auf Hrn. F. Klein's Ideen fussenden Darstellung von derjenigen des Hrn. Poincaré betonte, indem ich statt von speciellen Reihenentwicklungen vielmehr von dem allgemeinen Riemann'schen, durch die Herren Schwarz und Neumann bewiesenen Existenztheorem ausgehen wollte, so wird es hier am Schlusse angebracht sein, die Tragweite dieses Klein'schen allgemein functionentheoretischen Ansatzes mit dem zu vergleichen, was man von der Poincaré'schen Reihendarstellung aus erreicht.

Die Existenz der automorphen Functionen kann man entweder, wie ich es gethan und wie es Hr. Klein vorschlug, functionentheoretisch darthun, oder durch die Aufstellung der Reihen, wie es bei Hrn. Poincaré geschieht. Da bemerken wir vor allen Dingen, dass die erste Methode, da sie sämmtliche auch beliebig vieldeutigen automorphen Functionen umfasst, weiter trägt, als die auf eindeutige Functionen beschränkte Reihendarstellung.

Was nun die verschiedenen Sätze über das Verhalten der automorphen Formen in Bereichecken, in 0- und ∞-Stellen angeht, so kann man diese gewiss aus der Reihendarstellung ableiten, bekommt aber so diese Sätze nur für die wirklich darstellbaren Formen, also im Allgemeinen für $R \leqq -4$; viel einfacher, und ganz allgemein dagegen gewinnt man die Sätze functionentheoretisch, also aus dem Begriffe der automorphen Formen. In noch höherem Masse gilt diess von den Sätzen über die Beziehungen der Formen untereinander, über die Anzahl der 0-Stellen und ∞-Stellen u. s. w.; bei diesen Sätzen nützen die Reihen als solche gar nichts, aus dem Grunde, weil sie dieselbe Form in unendlich vielen verschiedenen Gestalten uns zeigen, deren Identität man gar nicht direct erkennen kann. Aus derselben Quelle fliesst auch der Mangel, dass man nur in den seltensten Fällen weiss, welche Form durch eine vorgelegte Reihe dargestellt ist, oder wie man die Reihe wählen muss, um eine vorgelegte Form zu erhalten.

Dazu kommt, dass die Reihen theils wegen ihrer langsamen Convergenz, theils wegen des bislang noch ganz unübersichtlichen Bildungsgesetzes der Coefficienten in den Substitutionen zu numerischen Rechnungen ungeeignet, und auch für Umformungen zum Zwecke der Herleitung theoretischer Sätze zu ungelenk sein dürften.

Worin liegt nun aber bei diesen unleugbaren Missständen die Bedeutung der Poincaré'schen Reihendarstellungen?

Zunächst sind sie für Hrn. Poincaré natürlich ein Ersatz für den Existenzbeweis, indem sie ihm als *Definition* der automorphen Formen, bez. Functionen dienen.

Zweitens beweist Hr. Poincaré an ihnen, was für andere Untersuchungen (Acta IV) fundamental ist, dass die automorphen Functionen *stetig* von den Constanten der Gruppe abhängen. Man kann diess freilich ohne Zweifel auch von dem Riemann'schen Existenzsatze aus beweisen, was aber bislang noch nicht geschehen ist.

Endlich aber sind sie doch wenigstens eine *vorläufige* Rechenvorschrift, an die man weiter anknüpfen kann, um sie auszubilden: Es mag vielleicht einmal möglich sein, das arithmetische Bildungsgesetz der Substitutionen zu überblicken, und mit Hülfe desselben von den Poincaré'schen Reihen aus zu Potenzentwicklungen oder andern bequemeren Darstellungen der automorphen Formen zu gelangen.

Diese Bemerkungen, wie die gesammten vorausgehenden Entwicklungen der vorliegenden Arbeit haben natürlich nicht den Zweck, dem ausserordentlichen Verdienste, welches sich Hr. Poincaré um die Theorie der automorphen Functionen erworben hat, irgend etwas abzubrechen.

Cassel, Neujahr 1892.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Einleitung 1

I. Theil: Functionentheoretische und gruppentheoretische Grundbegriffe.

§ 1. Die Gruppe einer automorphen Function vom Geschlechte 0. . . 4
§ 2. Die eindeutigen Functionen des gegebenen Bereichs und der Nachweis ihrer Existenz 8
§ 3. Spaltung von z und ζ in homogene Variable 16
§ 4. Spaltung der linearen Substitutionen von ζ in ganze binäre Substitutionen 21
§ 5. Beispiel der Hauptkreisgruppen 25

II. Theil: Allgemeine Sätze über die eindeutigen uneigentlich automorphen Formen.

§ 6. Die Multiplicatorsysteme der eindeutigen automorphen Formen. . 30
§ 7. Beispiele isomorpher Spaltungen 37
§ 8. Darstellung der automorphen Formen durch z_1, z_2 39
§ 9. Sätze über 0- und ∞-Stellen. 46
§ 10. Ueber die zu dem Fundamentalbereiche gehörigen Integrale. . . 53

III. Theil: Darstellung der automorphen Formen durch ζ_1, ζ_2.

§ 11. Vorbemerkungen. 55
§ 12. Ueber die Convergenz der Poincaré'schen Reihen 56
§ 13. Die Poincaré'schen Reihen als automorphe Formen 58
§ 14. Ausdruck der Reihen durch z_1, z_2 60
§ 15. Eigentlich automorphe Reihen vom Grade -2 62
§ 16. Unendliche Reihen und Producte für die automorphen Integrale 64
§ 17. Die Elementarformen und ihre Verwendung in der Theorie der automorphen Formen. 69
§ 18. Vergleich der Elementarformen mit Hrn. Poincaré's „éléments simples". 78

Schlussbemerkungen 80

Ueber Systeme höherer complexer Zahlen.

Von

THEODOR MOLIEN in Dorpat.

Einleitung.

Vorliegende Abhandlung betrifft diejenigen Zahlensysteme, deren Zahlen dem associativen und commutativen Gesetz der Addition und dem associativen und beiderseitig distributiven Gesetz der Multiplication unterliegen.

Es handelt sich um solche Eigenschaften, denen gemäss eine Charakterisirung und Aufzählung der Zahlensysteme erfolgen kann: die Auffindung einer Normalform, aus der leicht die Gleichheit oder Verschiedenheit gegebener Zahlensysteme geschlossen werden kann, ferner die Möglichkeit, Zahlensysteme ähnlichen Aufbau's, in Categorien vereint, gemeinsamer Behandlung zu unterwerfen. Ein weiterer Ansatz zur Aufzählung schien entbehrlich, setzt ja die grosse Mannigfaltigkeit möglicher Formen überhaupt jedem Aufzählungsversuch seine Grenzen. Diese Stellungnahme ist um so berechtigter, wenn erreicht ist, dass Zahlensysteme, die wohlbekannt und vielbehandelt sind, sich in charakteristischer Weise unter den andern hervorheben. In der That thut dies eine Categorie von Zahlensystemen, die ich ursprüngliche nenne und zu denen nächst Hamilton's Quaternionen auch die Nonionen Sylvester's gehören.

Von einschneidender Bedeutung kann, wie ein besonderer Fall zeigt, die Deutung eines Zahlensystems werden. Herr Dedekind*) hat eine ganze Classe von Zahlensystemen mit commutativer Multiplication**) durch den Hinweis auf ihre Identität mit Zahlkörpern erledigt. Aus diesem Gesichtspunkt sind die Grundzahlen dieser Zahlensysteme gewöhnliche mehrdeutige Grössen. Gleichen Erfolg haben bisherige Deutungsversuche der allgemeinen Zahlensysteme nicht aufzuweisen, wenngleich durch sie wirksame Hilfsmittel aufgedeckt worden sind.

*) Dedekind, Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Grössen. Gött. Nachr. 1887, pg. 1 ff.

**) Betrachtet zunächst von Weierstrass, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. Nachr. 1884 pg. 395 ff.; sodann von Schwarz ebenda pg. 516, Dedekind dgl. 1885 pg. 141, Hölder 1886 pg. 241 Petersen dgl. 1887 pg. 489.

In erster Linie steht hier Herrn Cayley's Theorie der Matrices*). Ihrem Wesen nach ist diese eine Theorie der linearen Transformationen, legt aber den Nachdruck mehr auf die Schicksale der Substitutionscoefficienten als der Veränderlichen. Die Matrix bildet die Zusammenfassung der Coefficienten der Transformation. Die Matrix lässt sich in Folge der Operationsdefinitionen in doppelter Weise zu einem Zahlensystem in Beziehung setzen. Es giebt jede operative Verbindung von Matrices, deren Elemente gleichen linearen homogenen Relationen unterworfen sind, eine Matrix derselben Art. So lassen sich einerseits die unabhängigen Elemente solcher Matrices als Parameter einer Zahl eines complexen Zahlensystems betrachten, andererseits lässt sich aber auch ein vollständiges System linear unabhängiger Matrices der eben geschilderten Art als System der Grundzahlen eines complexen Zahlensystems auffassen. Herr Cayley hat ein solches System von 4 binären Matrices angegeben, das das gegenseitige Verhalten der vier Grundzahlen der Quaternionen zeigt.**) Bei sonstiger Gleichartigkeit beider Auffassungen besitzt die erste den Vorzug, dass sie für die Anwendung bequemer ist. — Auf einen besondern Satz aus der in Rede stehenden Abhandlung komme ich weiter unten zu sprechen.

Legt man den Nachdruck, statt auf die Matrix der Coefficienten, auf die lineare Transformation selbst, so bemerkt man, dass lineare Transformationen, die zu einem Zahlensystem Veranlassung geben, eine Gruppe bilden. Der erste Hinweis auf die Gruppeneigenschaft der Zahlen eines Systems ist wohl die vielgenannte Stelle bei Herrn Poincaré***). Ausführliche Darlegungen der Beziehungen von Zahlensystemen zu Transformationsgruppen sind insbesondere gegeben in 2 Abhandlungen der Herren Scheffers†) und Study††). Von Interesse ist noch ein fernerer Punkt. Die algebraische Form, in die die Grunddefinitionen der Eigenschaften complexer Zahlensysteme herkömmlicher Weise eingekleidet werden, geht auf die Fassung von Eigenschaften des gewöhnlichen complexen Systems und der Quaternionen zurück. Die Erkenntniss der allgemeinern Form, die der

*) Cayley, A memoir on the Theory of Matrices. Phil. Trans. vol. 148. 1858, pg. 17 ff. Erwähnt werden müssen auch: Laguerre, Sur le calcul des systèmes linéaires. Journ. de l'Ecole pol. t. 25. 1867 und die Arbeit von Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's Journ. Bd. 84. 1877.

**) S. hierzu Éd. Weyr, Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices. Prager Sitzungsber. 1887, pg. 616 ff.

***) Poincaré, Sur les nombres complexes. Comptes rendus t. 99, 1884, pg. 740.

†) Scheffers, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 290 ff.

††) Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 176 ff.

Addition vermöge des associativen und commutativen Gesetzes zukommt, ergiebt sich erst aus der Theorie der Transformationsgruppen. Es bildet aber, wie Herr Schur*) gezeigt hat, der üblich gewordene Ausdruck die „canonische Form" des allgemeinen Ausdrucks.

Berechnungen und Aufzählungen von Zahlensystemen sind unternommen worden von B. Peirce**), von Herrn Study***) und von Herrn Scheffers†). Peirce giebt Tabellen von Zahlensystemen, nach den Anzahlen der Grundzahlen geordnet, erkennt übrigens die Unzulänglichkeit dieses Standpunktes ausdrücklich an. Zahlensysteme mit eindeutiger Division und ohne solche werden von ihm als gleichwerthig erachtet. Bei Herrn Study und Herrn Scheffers treten die Zahlensysteme ohne eindeutige Division, mehr den Forderungen der Gruppentheorie entsprechend, in den Hintergrund. Vollständig aufgezählt werden von Herrn Study alle Zahlensysteme mit 4 und weniger Einheiten, wodurch Lücken, die bei Peirce sich finden, ausgefüllt werden. Ich habe mehrfach Gelegenheit gehabt, den Werth dieser Tabellen schätzen zu lernen. Herr Scheffers geht einen Schritt weiter, insofern er Regeln sucht, mit Hilfe deren aus den Zahlensystemen mit geringerer Anzahl von Grundzahlen solche mit grösserer Anzahl von Grundzahlen herzuleiten sind. Die Methode ist geeignet, alle Zahlensysteme zu finden, aber der Nachweis ist ungenügend geführt; es hätte gezeigt werden sollen, dass auch diejenigen Bedingungen, die der Discussion nicht unterworfen worden sind, einander nicht widersprechen.††) Seine Eintheilung der Zahlensysteme in Kegelschnittsysteme und Nichtkegelschnittsysteme lässt sich übrigens wohl verwenden zu Zwecken, auf die ich sogleich komme.

Herr Lie†††) lenkt gelegentlich die Aufmerksamkeit auf Zahlen-

---

*) Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33. 1888, pg. 99 ff.

**) B. Peirce, Linear Associative Algebra. Wash. 1870 und Am. Journ. of Math. vol. IV. 1881, pg. 97 ff.

***) Study, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. N. 1889, pg. 237 ff.

†) Scheffers, Berechnung von Zahlensystemen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 400 ff.

††) In einer neuern Abhandlung: Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, in den Math. Ann., behandelt Herr Scheffers das gleiche Thema. Die Theorie der Nichtkegelschnittsysteme ist weiter als früher durchgeführt. — Seinen frühern Beweis aber, dass jedes „Kegelschnittsystem" auch „Quaternionsystem" sei, erklärt Hr. Scheffers für ungenügend. Die Ursache des Misslingens dieses Beweises liegt darin, dass Hr. Scheffers den nicht richtigen Satz zu beweisen sucht, jede Kegelschnittuntergruppe sei Untergruppe einer Quaternionuntergruppe. (Mai 1892.)

†††) Lie, Ueber irreductible Berührungstransformationsgruppen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 326.

systeme, deren zugeordnete Gruppe G_n eine einfache Untergruppe G_{n-1} besitzt. Diess sind dieselben Zahlensysteme, die ich im folgenden *ursprüngliche Zahlensysteme* nenne. Ich gehe allerdings von einer andern Definition aus; ich charakterisire sie dadurch, dass, wie auch die Productgleichungen eines solchen Zahlensystems transformirt werden mögen, unter diesen niemals die Productgleichungen eines Zahlensystems mit weniger Grundzahlen anzutreffen sind. Herr Lie hat bemerkt, dass solche Zahlensysteme mit 5, 6, 7, 8 Grundzahlen nicht existiren.

Meine Untersuchungen ergeben nun den Satz, *dass jedes ursprüngliche Zahlensystem nur eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt*, und weiter, *dass die einem solchen zugeordnete Gruppe identisch mit der Parametergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe ist.* In anderer Ausdrucksweise heisst dies: jedes ursprüngliche Zahlensystem wird durch eine quadratische Matrix repräsentirt, deren Elemente von einander unabhängig sind.

Ein weiteres Hauptergebniss meiner Arbeit besteht in der Auffindung einer *Normalform* für jedes Zahlensystem. Diese Normalform gestattet *alle Zahlensysteme* derart *in Classen einzutheilen*, dass alle, unendlich vielen, Systeme jeder Classe durch ein System der Classe bestimmt sind. *Jeder Classe gehört ein einziges nach Scheffers'scher Terminologie „Nichtkegelschnittsystem" an, so dass die Nichtkegelschnittsysteme Repräsentanten aller Classen von Zahlensystemen werden.* In dieser Classification repräsentirt das gewöhnliche Zahlensystem die Classe der ursprünglichen Zahlensysteme.

Uebrigens muss ich bemerken, dass ich Herrn Lie's Definition der ursprünglichen Zahlensysteme, sowie den Ausdruck „Nichtkegelschnittsystem" nur an dieser Stelle gebrauche, zur grösseren Verdeutlichung meiner Resultate für diejenigen, denen diese Terminologie vertraut ist; im Verlaufe meiner Arbeit komme ich an keiner Stelle auf diese Ausdrucksform und die damit verbundenen Vorstellungen zurück.

Ich habe eine Eintheilung meiner Abhandlung in vier Abschnitte vollzogen, von denen der erste die allgemeine Discussion der Productgleichungen eines Zahlensystems bezweckt, während der zweite der Hauptsache nach die ursprünglichen Systeme, der dritte die zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen und der vierte die Matrixdarstellung behandelt. Eingeleitet wird jeder Abschnitt von einem Paragraphen, der ein Résumé bereits bekannter Theorien bildet. Es schien diess Verfahren am geeignetsten die Einheitlichkeit der Untersuchungen zu wahren. Den Eingang des ersten Abschnitts bildet eine in der herkömmlichen Form gehaltene Darstellung der Definitionen und wesentlichsten Eigenschaften der Zahlensysteme; im dritten Abschnitt ist über das unentbehrlichste aus Herrn Lie's Theorie der stetigen Transformationsgruppen referirt worden, im vierten über die Haupteigen-

schaften der Matrices. Etwas mehr habe ich über den zweiten Abschnitt zu sagen. Von den Sätzen des ersten Paragraphen dieses Abschnitts ist der erste von Herrn Cayley in der schon genannten Abhandlung vom Jahre 1858 ohne Beweis mitgetheilt worden; Beweise desselben sind hernach von Herrn Sylvester*), Herrn Ed. Weyr**) und andern gegeben worden. Der zweite Satz geht, wie ich glaube, auf Herrn Killing***) zurück. Auf Grund dieser Sätze ergiebt sich für den zweiten Abschnitt als Fragestellung ein Eliminationsproblem, ähnlich demjenigen, das sich Herr Killing†) gestellt hat. Der Zweck der Entwicklungen ist, auf Grund von Irreductibilitätsbetrachtungen zu erweisen, dass ein ursprüngliches Zahlensystem eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt. Dann ist der weitere Satz über die ursprünglichen Zahlensysteme eine sehr einfache Folgerung aus dieser Eigenschaft. In den Bezeichnungen weiche ich an einigen Stellen von Herrn Killing ab. Ich habe mir gestattet, eine von ihm „charakteristische Gleichung" genannte Gleichung nach seinem Namen zu benennen und jene Bezeichnung auf zwei andere Gleichungen anzuwenden. Ausserdem sollte der Name „Ranggleichung" nicht so sehr an Herrn Killing's Rangbegriff erinnern; in dem von mir gemeinten Sinne wäre der Rang eines Zahlensystems identisch mit der Anzahl der linear unabhängigen Potenzen einer Zahl.

Inhalt.

Seite

Einleitung 83

I. Abschnitt. Zahlensysteme und bilineare Formen.

§ 1. Definition der Zahlensysteme und unmittelbare Folgerungen . . . 88
§ 2. Die begleitenden Zahlensysteme 92
§ 3. Formen mit Polareigenschaft 96
§ 4. Anhang. Auffindung aller ursprünglichen Zahlensysteme, die ein gegebenes System begleiten 100

II. Abschnitt. Zahlensysteme und algebraische Gleichungen.

§ 1. Lehnsätze 103
§ 2. Die charakteristischen Gleichungen eines Zahlensystems 106
§ 3. Die Theiler der charakteristischen Gleichungen 109
§ 4. Die Ranggleichung eines Zahlensystems 112
§ 5. Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems 114

*) Sylvester, Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. CR. 94, 1883, pg. 55.

**) Ed. Weyr, O základní větě *v* theorii matric. Prager Sitzungsber. 1884, pg. 148 ff.

***) Killing, Die Zusammensetzung der endlichen stetigen Transformationsgruppen, Math. Ann. 31. 1888, insbesondere pg. 271 ff.

†) Killing, l. c. pg. 259.

Seite
§ 6. Die charakteristischen Gleichungen und Ranggleichungen begleitender Zahlensysteme 117
§ 7. Die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems . . 120
§ 8. Die Normalform des ursprünglichen Zahlensystems 123
III. Abschnitt. Zahlensysteme und zu ihnen gehörige Gruppen.
§ 1. Beziehungen zur Theorie der Transformationsgruppen 125
§ 2. Begleitende Gruppen 129
§ 3. Transitivität und Intransitivität 131
§ 4. Die ursprünglichen Gruppen 134
§ 5. Untersuchung einer besondern Gruppe 138
§ 6. Die Normalform der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen . . . 142
IV. Abschnitt. Zahlensysteme und Matrices.
§ 1. Eigenschaften der Matrices 148
§ 2. Darstellung der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen durch Matrices 150
§ 3. Die Normalform der Zahlensysteme 152
§ 4. Eine Classification der Zahlensysteme 153

I. Abschnitt.

Zahlensysteme und bilineare Formen.

§ 1.

Definition der Zahlensysteme und unmittelbare Folgerungen.

Sind $e_1 \dots e_n$ die r Grundzahlen, aus denen ein Zahlensystem hergeleitet wird, so wird jede Zahl x des Systems in folgender Weise geschrieben:

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

Die Grössen $x_1 \dots x_n$ sind gewöhnliche, reelle oder complexe Zahlen; sie mögen die Parameter der Zahl x heissen. Als Basis des Zahlensystems werde die Gesammtheit der Zahlen $e_1 \dots e_n$ bezeichnet.

Addition zweier gegebener complexer Zahlen ist definirt als Bildung einer complexen Zahl, deren Parameter die Summen der entsprechenden Parameter der vorgelegten Zahlen sind. Ist also

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \\ y &= y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \end{aligned} \tag{2}$$

so ist ihre Summe:

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + \cdots + (x_n + y_n) e_n. \tag{3}$$

Subtraction ist die zur Addition inverse Operation; es ist

$$x - y = (x_1 - y_1) e_1 + \cdots + (x_n - y_n) e_n. \tag{4}$$

Multiplication einer complexen Zahl mit einer gewöhnlichen Zahl ist die Multiplication aller Parameter der complexen Zahl mit der gewöhnlichen Zahl.

In Stelle von $e_1 \dots e_n$ können jede beliebigen n von einander linear unabhängigen Zahlen $e_1' \dots e_n'$ des Systems als Grundzahlen gewählt werden.

Sind

$$e_i' = \sum_k \alpha_{ki} e_k \quad (i, k = 1 \ldots n) \tag{5}$$

n derartige Zahlen, so verschwindet die Determinante

$$|\alpha_{ki}| \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

nicht. Werden diese als Grundzahlen gewählt, so erhält die Zahl

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

die Form

$$y_1 e_1' + \cdots + y_n e_n'$$

und die Parameter $x_1 \cdots x_n$ lassen sich durch $y_1 \ldots y_n$ in folgender Weise darstellen:

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} y_k \qquad (i, k = 1 \cdots n). \tag{6}$$

Eine Veränderung der Basis eines Zahlensystems ist also gleichbedeutend mit einer linearen Transformation der Parameter jeder dem Zahlensystem angehörigen Zahl. —

Bezüglich der *Bildung eines Productes aus complexen Zahlen* gilt *das distributive Gesetz:*

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv \tag{7}$$

und *das associative Gesetz*

$$(xu) \cdot v = x \cdot (uv), \tag{8}$$

während vom Bestehen eines commutativen Gesetzes ausdrücklich abgesehen wird.

Das distributive Gesetz der Multiplication verlangt, dass das Product zweier complexer Zahlen eine Zahl sei, deren Parameter sich als bilineare Formen darstellen, die mit Hilfe constanter Grössen aus den beiden Reihen der Parameter der Factoren gebildet sind. Setzt man

$$x' = xu, \tag{9}$$

so lassen sich $x_1' \ldots x_n'$ durch die Gleichungen

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{I}$$

darstellen*), die die Productgleichungen des Zahlensystems heissen mögen. Das associative Gesetz der Multiplication findet seinen Ausdruck in den Bedingungsgleichungen

$$\sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots n), \tag{II}$$

*) Der eine der 3 Indices jedes Coefficienten ist nach oben geschrieben worden. Dass später gelegentlich symbolische Potenzen in ebenderselben Weise geschrieben werden, wird hoffentlich zu Verwechselungen keine Veranlassung geben.

denen die constanten Coefficienten der Gleichungen (I) unterworfen sind.

Die *Division* als zur Multiplication inverse Operation wird durch Auflösung der Gleichungen (I) nach $x_1 \ldots x_n$ oder nach $u_1 \ldots u_n$ vollzogen; *damit dieselbe im Allgemeinen eindeutig sei, ist es nothwendig, dass keine der beiden Determinanten*

$$\text{(III)} \qquad \left|\sum_i a_{kl}^i u_l\right|, \quad \left|\sum_k a_{kl}^i x_k\right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

identisch verschwinde. —

Der Begriff einer *Potenz* als eines Products einer Anzahl gleicher Factoren lässt sich zugleich mit der Bezeichnungsweise auf complexe Zahlen übertragen. So lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 &= x \,.\, x \\ &\vdots \qquad \vdots \\ x^\nu &= x^{\nu-1} \,.\, x \qquad (\nu = 3, 4 \ldots) \end{aligned}$$

und es gilt die Gleichung:

$$\text{(10)} \qquad x^{\mu+\nu} = x^\mu \cdot x^\nu.$$

Demzufolge werden auch lineare Formen, gebildet aus den Potenzen einer Zahl x, so mit einander sich multipliciren lassen, als wären sie ganze rationale Functionen einer gewöhnlichen veränderlichen Grösse. —

Aus der Forderung der Eindeutigkeit der Division folgt:

Satz 1. *In jedem Zahlensystem giebt es eine feste Zahl u^0, die jede Gleichung*

$$\text{(11)} \qquad x = x u^0$$

und ebenso jede Gleichung

$$\text{(12)} \qquad x = u^0 x$$

befriedigt.

Denn ist die Zahl z so beschaffen, dass keine der Determinanten (III) für dieselbe verschwindet, so muss diejenige Zahl u^0, die der Gleichung

$$\text{(13)} \qquad z = z u^0$$

genügt, auch jeder Gleichung

$$x = x u^0$$

genügen, da sich immer eine Zahl y finden lässt, dass $x = yz$ wird. Desgleichen folgt aus (14) durch Multiplication mit einer beliebigen Zahl x:

$$zx = z u^0 x$$

und wenn durch z dividirt wird:

$$x = u^0 x.$$

Schreibt man die Zahl u^0:

$$u^0 = (u^0)_1 e_1 + \cdots + (u^0)_n e_n,$$

so bestehen die beiden Gleichungensysteme:

$$x_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k (u^0)_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

$$x_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} (u^0)_k x_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

unbeschränkt. Dies giebt das

Corollar. *Die Parameter der Zahl u^0 befriedigen die beiden Systeme von Gleichungen*

$$\sum_l a^i_{kl} (u^0)_l = \delta_{ik} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

$$\sum_l a^i_{lk} (u^0)_l = \delta_{ik} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n). \tag{14}$$

Hier bezeichnet δ_{ik}, wie üblich die Null oder Eins, je nachdem i und k verschieden oder gleich sind.

Kann durch die Zahl u dividirt werden, so giebt es eine Zahl $\bar{u}$, die der Gleichung

$$\bar{u} \,.\, u = u^0 \tag{15}$$

genügt; diese mag als *zu u reciproke Zahl* bezeichnet werden. Sie genügt auch der Gleichung

$$u \,.\, \bar{u} = u^0, \tag{16}$$

wie man sieht, wenn man (15) mit u einerseits multiplicirt, und andererseits dividirt.

Die Zahlen u^0 und $\bar{u}$ lassen sich füglich auch als nullte und erste negative Potenz von u betrachten. —

Die Darlegungen dieses einleitenden Paragraphen lassen erkennen, wodurch die Unterschiede zwischen verschiedenen Zahlensystemen bedingt sind. Charakteristisch für ein Zahlensystem sind die beständigen Grössen, mit Hilfe deren das Product zweier Zahlen des Systems gebildet wird, also die Coefficienten der mit (I) bezeichneten Gleichungen. Es bildet jedes System von Gleichungen (I), dessen Coefficienten den Bedingungen (II) und (III) unterworfen sind, das System der Productgleichungen eines Zahlensystems. Gleichheit der Productgleichungen zweier Zahlensysteme bedingt, wofern nicht ausdrücklich eine andere Unterscheidung vorliegt, die Gleichheit der Zahlensysteme selbst.

Eine Veränderung der Basis eines Zahlensystems bewirkt eine lineare Transformation der Parameter jeder dem Zahlensystem angehörigen Zahl; auf die Productgleichungen des Zahlensystems wirkt

sie derart, dass die drei Reihen der Parameter $x_1' \ldots x_n'$; $x_1 \ldots x_n$; $u_1 \ldots u_n$ gleichzeitig einer und derselben linearen Transformation unterworfen werden.

Betrachtet man auch solche Zahlensysteme als gleich, deren Productgleichungen durch Aenderung der Basis des einen Systems gleich werden, so lässt sich die Aufgabe, alle Zahlensysteme anzugeben, dahin formuliren, dass alle Systeme von Gleichungen (I), deren Coefficienten den Bedingungen (II) und (III) unterliegen und die durch lineare Transformationen, die gleichzeitig auf alle drei Reihen von Parametern ausgeführt werden, nicht in einander übergehen, angegeben werden sollen.

Um diese Aufgabe lösen zu können, hat man eine Normalform des Systems der Gleichungen (I) zu definiren; eine solche auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der Zahlensysteme aufzufinden, damit beschäftigt sich die ganze folgende Untersuchung. Es zeigt sich, dass die schliesslich gefundene Normalform allgemein genug ist, um die mühelose Aufstellung aller Zahlensysteme zu ermöglichen.

§ 2.

Die begleitenden Zahlensysteme.

Jedes System von Gleichungen

$$(1) \qquad x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

dessen Coefficienten den Bedingungen

$$(2) \qquad \sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots n)$$

genügen und so beschaffen sind, dass keine der Determinanten

$$(3) \qquad \left|\sum_l a_{kl}^i u_l\right|, \quad \left|\sum_k a_{kl}^i x_k\right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

identisch verschwindet, lässt sich als System der Productgleichungen eines Zahlensystems betrachten und kann in diesem Sinne als zu einem Zahlensysteme gehörig bezeichnet werden. Diese Bemerkung veranlasst eine Begriffsbildung mit Hilfe folgenden Satzes:

Satz 2. *Lässt sich die Basis eines Zahlensystems so wählen, dass die r ersten Parameter des Productes zweier Zahlen bilinearen Formen gleich sind, die ausschliesslich mit Hilfe der r ersten Parameter der Factoren gebildet sind, so gehören diese r Gleichungen einem Zahlensystem zu.*

Denn falls die Productgleichungen des gegebenen Zahlensystems die Form

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k,l} a_{kl}^{i} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r) \\ x_{r+i}' &= \sum_{k,l} a_{kl}^{r+i} x_k u_l \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n-r \\ k, l = 1 \ldots n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzen, so gehen die Gleichungen (2) für $i < r+1$ unmittelbar in die Gleichungen

$$\sum_{s} a_{sm}^{i} a_{kl}^{s} = \sum_{s} a_{ks}^{i} a_{lm}^{s} \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots r)$$

über. Desgleichen ist die eindeutige Auflösbarkeit der r ersten Gleichungen (4) nothwendige Bedingung der eindeutigen Auflösbarkeit des Systems aller Gleichungen (4). Die r ersten Gleichungen (4) gehören somit zu einem Zahlensystem mit r Grundzahlen. Construirt man dieses Zahlensystem, so ist jede Zahl desselben durch eine Zahl des gegebenen Systems eindeutig bestimmt.

Ein solches Zahlensystem soll als ein das gegebene System begleitendes bezeichnet werden.

Es ergeben sich aus dieser Definition unmittelbar folgende Bemerkungen:

1) Besitzt ein Zahlensystem, das ein gegebenes Zahlensystem begleitet, ebenso viel Grundzahlen wie dieses, so ist es mit ihm identisch.

2) Ein Zahlensystem, das ein begleitendes System eines gegebenen Zahlensystems begleitet, begleitet auch das gegebene Zahlensystem.

3) Unter den begleitenden Systemen eines jeden Zahlensystems muss es ein solches geben, das von keinem weitern System ausser von sich selbst begleitet wird.

Jedes Zahlensystem, das, ausser sich selbst, kein begleitendes Zahlensystem besitzt, soll ein ursprüngliches Zahlensystem genannt werden. —

So lange ein Zahlensystem noch in beliebiger Form vorliegt, sind die Parameter einer Zahl eines begleitenden Systems lineare Formen der Parameter der entsprechenden Zahl des gegebenen Systems. Sind bei einem gegebenen Zahlensysteme mehrere begleitende Systeme vorhanden, so sind die Beziehungen letzterer zu einander in's Auge zu fassen. Diese sind Gegenstand folgenden Satzes:

Satz 3. *Bestehen zwischen den Parametern der Zahlen zweier begleitender Zahlensysteme eines gegebenen Systems genau q lineare Relationen, so besitzen die beiden begleitenden Systeme ein gemeinsames begleitendes System mit q Grundzahlen.*

Ist die Basis des gegebenen Zahlensystems beliebig gewählt, und besitzt das eine begleitende Zahlensystem r Grundzahlen, das andere

$s+q$ Grundzahlen, so seien die Parameter der der Zahl x entsprechenden Zahl des einen begleitenden Systems die linearen Formen

$$(5) \qquad y_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1 \ldots r;\ k = 1 \ldots n)$$

und die Parameter der entsprechenden Zahl des andern begleitenden Systems:

$$(6) \qquad z_j = \sum_k \beta_{jk} x_k \qquad (j = 1 \ldots s+q;\ k = 1 \ldots n).$$

Bestehen nun die q linearen Relationen

$$(7) \quad \sum_i \mu_{hi} y_i = \sum_j \nu_{hj} z_j \quad (h = 1 \ldots q;\ i = 1 \ldots r;\ j = 1 \ldots s+q)$$

zwischen den Parametern $y_1 \ldots y_r$ und $z_1 \ldots z_{s+q}$, so sind die q linearen Formen von $x_1 \ldots x_n$

$$\sum_{i,k} \mu_{hi} \alpha_{ik} x_k \qquad (h = 1 \ldots q;\ i = 1 \ldots r;\ k = 1 \ldots n)$$

gleichzeitig zur Bildung von $y_1 \ldots y_r$ und $z_1 \ldots z_{s+q}$ verwandt worden. Man kann dann die Basis des Zahlensystems so wählen, dass diese Formen gerade $x_1 \ldots x_q$ werden; die übrigen zur Bildung von $y_1 \ldots y_r$ gebrauchten Formen können, als von jenen unabhängig als Parameter $x_{q+1} \ldots x_r$ und die übrigen zur Bildung von $z_1 \ldots z_{s+q}$ verwandten, als von den bisherigen ebenfalls linear unabhängig als Parameter $x_{r+1} \ldots x_{r+s}$ gewählt werden.

Dann sind von den Productgleichungen des Zahlensystems

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n)$$

die r ersten Gleichungen Productgleichungen des einen begleitenden Zahlensystems: es sind also $x_1' \ldots x_r'$ bilineare Formen nur von $x_1 \ldots x_r$ und $u_1 \ldots u_r$. Desgleichen bilden die q ersten Gleichungen zusammen mit der $r+1^{\text{ten}}$ bis zur $r+s^{\text{ten}}$ Gleichung die Productgleichungen des andern begleitenden Systems, es sind also $x_1 \ldots x_q'$, $x_{r+1}' \ldots x_{r+s}'$ bilineare Formen nur von $x_1 \ldots x_q$, $x_{r+1} \ldots x_{r+s}$ und $u_1 \ldots u_q$, $u_{r+1} \ldots u_{r+s}$. Dann sind aber $x_1' \ldots x_q'$ nur aus $x_1 \ldots x_q$ und $u_1 \ldots u_q$ gebildet; es definiren also die q ersten Productgleichungen des Zahlensystems ein begleitendes System und zwar ein solches, dass jedes der beiden gegebenen begleitenden Systeme begleitet.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz 4. *Haben zwei begleitende Systeme eines gegebenen Zahlensystems ein gemeinsames begleitendes System mit q Grundzahlen, doch keines mit mehr als q Grundzahlen, so bestehen zwischen den Parametern entsprechender Zahlen derselben genau q lineare Relationen.*

Es haben die entsprechenden Zahlen der beiden gegebenen begleitenden Systeme die q Parameter der entsprechenden Zahl des gemeinsamen begleitenden Systems gemein, wodurch q Relationen bereits gegeben sind; sollten ausser diesen noch weitere Relationen vorhanden sein, so liesse sich nach dem vorigen Satze ein gemeinsames begleitendes System mit mehr als q Grundzahlen finden, was gegen die Voraussetzung ist.

Im Speciellen hat man

Corollar: *Haben zwei begleitende Systeme eines Zahlensystems kein gemeinsames begleitendes System, so sind die Parameter entsprechender Zahlen derselben linear von einander unabhängig.* —

Man kann des weitern das gegenseitige Verhalten dreier oder mehrer begleitender Systeme betrachten; doch ist es für die nächsten Zwecke überflüssig, mehr zu zeigen als die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 5. *Haben von mehreren begleitenden Systemen eines Zahlensystems keine zwei ein begleitendes System gemein, so sind die Parameter entsprechender Zahlen aller dieser Systeme von einander linear unabhängig.*

Es seien $x_1 \ldots x_r$ die Parameter der der Zahl x entsprechenden Zahl eines der begleitenden Systeme, $x_{r+1} \ldots x_s$ die der entsprechenden Zahl eines andern dieser begleitenden Systeme. Setzt man dann $x' = xu$, so wird jede lineare Form von $x_1' \ldots x_s'$ die Summe einer bilinearen Form von $x_1 \ldots x_r$, $u_1 \ldots u_r$ und einer bilinearen Form von $x_{r+1} \ldots x_s$, $u_{r+1} \ldots u_s$ sein. Für ein drittes begleitendes System seien $y_1 \ldots y_q$ die Parameter derjenigen Zahl, die der Zahl x entspricht; es sind also $y_1 \ldots y_q$ lineare Formen von $x_1 \ldots x_n$. Ersetzt man in irgend einer linearen Form von $y_1 \ldots y_q$ die Zahl x durch die Zahl $x' = xu$, so geht diese Form in eine bilineare Form von $y_1 \ldots y_q$ und $v_1 \ldots v_q$ über, wo $v_1 \ldots v_q$ die Parameter der der Zahl u entsprechenden Zahl sind; diese bilineare Form ist zugleich als bilineare Form von $x_1 \ldots x_n$ und $u_1 \ldots u_n$ darstellbar. Dadurch dass für u irgend eine bestimmte Zahl gewählt wird, wird die bilineare Form wieder eine lineare Form von $x_1 \ldots x_n$ oder $y_1 \ldots y_q$.

Sollte es eine lineare Form von $y_1 \ldots y_q$ geben, die als lineare Form blos von $x_1 \ldots x_r$ oder blos von $x_{r+1} \ldots x_s$ sich darstellen lässt, so besässe nach dem 3. Satz das dritte begleitende System mit einem der beiden ersten begleitenden Systeme ein gemeinsames begleitendes System. Soll dies aber nicht stattfinden, so liesse sich doch noch denken, dass irgend eine lineare Form von $y_1 \ldots y_q$ durch $x_1 \ldots x_s$ darstellbar sei. Ersetzt man dann x durch das Product xu, so geht diese lineare Form in die Summe einer bilinearen Form von

$x_1 \ldots x_r ; u_1 \ldots u_r$ und einer bilinearen Form von $x_{r+1} \ldots x_s$; $u_{r+1} \ldots u_s$ über. Man kann dann u so wählen, dass $u_{r+1} \ldots u_s$ verschwinden. Es wird dann die bilineare Form zu einer linearen Form nur von $x_1 \ldots x_r$ und diese ist zugleich lineare Form von $y_2 \ldots y_q$. Dadurch wäre aber wiederum ein gemeinsames begleitendes System des ersten und dritten begleitenden Systems nachgewiesen; damit kein solches vorhanden sei, müssen $y_1 \ldots y_q$ von $x_1 \ldots x_s$ sonach linear unabhängig sein. Damit ist der Satz für drei begleitende Systeme bewiesen; man erkennt, dass durch Wiederholung derselben Schlussweise derselbe leicht auf mehr als drei begleitende Systeme erstreckt werden kann. —

Insbesondere besitzt dieser Satz Bedeutung für die begleitenden *ursprünglichen* Systeme eines Zahlensystems; *dies sind diejenigen begleitenden Systeme, die nach einer oben angegebenen Definition ausser sich selbst keine weiteren begleitenden Systeme besitzen.* Gemäss dem Satz 5 sind die Parameter der der Zahl x entsprechenden Zahlen aller dieser Systeme linear unabhängig von einander. Man hat also zum Satz 5 das Corollar:

Corollar. *Die Basis eines jeden Zahlensystems kann so gewählt werden, dass die r_1 ersten Productgleichungen die Productgleichungen eines der begleitenden ursprünglichen Systeme werden, die r_2 folgenden die eines zweiten und so fort, bis unter den Productgleichungen des gegebenen Systems sich die Productgleichungen eines jeden begleitenden ursprünglichen Systems vorfinden.*

Die Kenntniss der begleitenden ursprünglichen Systeme ist nothwendig für die Aufsuchung aller begleitenden Systeme; sie ist auch wichtig für die Untersuchung des Zahlensystems selbst.

Der nächste Paragraph wird die Kriterien bringen, aus denen geschlossen werden kann, ob ein Zahlensystem ursprünglich ist oder nicht.

§ 3.

Formen mit Polareigenschaft.

Eine lineare Form der Parameter der Zahl x':

$$g(x') = g_1 x_1' + \cdots + g_n x_n' \tag{1}$$

geht, wenn x' durch das Product der Zahlen x und u ersetzt wird, in eine bilineare Form

$$g(xu) = \sum_{i,k,l} g_i a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{2}$$

der Parameter $x_1 \ldots x_n$ und $u_1 \ldots u_n$ über. Die beiden Formen (1) und (2) bestimmen einander gegenseitig; sie sollen als einander ent-

sprechende Formen bezeichnet werden; *jede der beiden werde als eine dem Zahlensystem*

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

entstammende Form bezeichnet.

Da eine lineare Transformation von $x_1' \ldots x_n'$ nichts anderes als eine Aenderung der Basis des Zahlensystems ist, so wird eine bilineare Form, die einem Zahlensystem entstammt, diese Eigenschaft beibehalten, wenn beide Reihen ihrer Veränderlichen gleichzeitig einer und derselben linearen Transformation unterworfen werden. —

Werden in der Form

$$g(xu) = \sum_{i,k,l} g_i a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots m)$$

die Grössen $g_1 \ldots g_m$ so gewählt, dass:

$$\sum_i g_i (a_{kl}^i - a_{lk}^i) = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{3}$$

ist, so bildet die Form (2) die Polare einer quadratischen Form; sie werde dann als *dem Zahlensystem entstammende Form mit Polareigenschaft* bezeichnet. Discriminante der Form mit Polareigenschaft werde die in Gestalt einer Determinante n^{ten} Grades geschriebene Discriminante derjenigen quadratischen Form genannt, deren Polare die Form mit Polareigenschaft bildet.

Zunächst ist zu beweisen:

Satz 6. *Jedem Zahlensystem entstammt mindestens eine Form mit Polareigenschaft.*

Die Form

$$\sum_{i,k,l,s} a_{si}^i a_{kl}^s x_k u_l \qquad (i, s, k, l = 1 \cdots n) \tag{4}$$

ist eine solche; dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen II:

$$\sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots n)$$

wenn $m = i$ gesetzt und über i summirt wird. Dass die Form (4) nicht identisch verschwindet, sieht man ein, wenn man $xu = u^0$ setzt, Nach dem Corollar des Satzes (1) ist:

$$\sum_k a_{kl}^i (u^0)_k = \delta_{il} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n);$$

es wird also für $xu = u^0$ die Form (4) den Werth n erhalten. —

Die einem Zahlensystem entstammende bilineare Form $g(xu)$ ist

eine lineare Form der Parameter von xu. Ersetzt man die Zahl u durch das Product vw, so entsteht aus der Form eine trilineare Form

$$g(xvw). \tag{5}$$

Diese kann einerseits als bilineare Form der Parameter von x und vw, anderseits als die nämliche bilineare Form der Parameter von xv und w betrachtet werden, zufolge des associativen Gesetzes der Multiplication. Es ist also

$$g(x \,.\, vw) = g(xv \,.\, w). \tag{6}$$

Besitzt die Form $g(xu)$ Polareigenschaft, so folgt hieraus, dass die trilineare Form (5) bei den cyklischen Vertauschungen von x, v, w ungeändert bleibt, insbesondere die Gleichheit der Formen

$$g(x \,.\, vw) = g(w \,.\, xv) = g(v \,.\, wx). \tag{7}$$ —

Die Gesammtheit aller einem Zahlensystem entstammenden Formen mit Polareigenschaft wird durch Auflösung der Gleichungen (3) nach $g_1 \ldots g_n$ gewonnen. Da nun auch den begleitenden Systemen des gegebenen Zahlensystems Formen mit Polareigenschaft entstammen und letztere in jener Gesammtheit enthalten sind, so wird die Beziehung einer bestimmten Form mit Polareigenschaft zu den begleitenden Systemen des näheren zu untersuchen sein.

— Es sei $g(xu)$ eine einem gegebenen Zahlensystem entstammende Form mit Polareigenschaft; die Unterdeterminanten $n - r - 1^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Discriminante mögen sämmtlich verschwinden, ohne dass es alle Unterdeterminanten der nächst höheren Ordnung thun. Dann kann durch gemeinsame lineare Transformation von $x_1 \ldots x_n$ und $u_1 \ldots u_n$ die Form mit Polareigenschaft in die Gestalt:

$$g(xu) = \sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l \qquad (k, l = 1 \ldots r) \tag{8}$$

gebracht werden. Die damit verbundene Basisänderung möge die Productgleichungen des Zahlensystems in die Form

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{9}$$

gebracht haben. Ersetzt man in der Form mit Polareigenschaft (8) u durch vw, so folgt aus den Gleichungen (7) einerseits

$$\sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l = \sum_{k,l} g_{kl} v_k (wx)_l \qquad (k, l = 1 \ldots r) \tag{10}$$

und andererseits:

$$\sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l = \sum_{k,l} g_{kl} w_k (xv)_l \qquad (k, l = 1 \ldots r). \tag{11}$$

Setzt man nun, mit G_{kl} die Adjuncte von g_{lk} in der Determinante $|g_{kl}|$ $(k, l = 1 \ldots r)$ bezeichnend,

$$x^{(i)} = \sum_k G_{ik} e_k, \qquad (i, k = 1 \ldots r),$$

so wird

$$g(x^{(i)} u) = u_i \qquad (i = 1 \ldots r).$$

Aus der Gleichung (10) folgt dann, dass $u_1 \ldots u_r$ lineare Formen von $v_1 \ldots v_r$, aus der Gleichung (11), dass sie lineare Formen von $w_1 \ldots w_r$ sind. Die r ersten Productgleichungen für $u = vw$ sind also

$$u_i = \sum a_{kl}^i v_k w_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r); \tag{12}$$

sie zeigen, dass das gegebene Zahlensystem ein begleitendes System mit r Grundzahlen besitzt.

Dies begleitende System mag mit Beziehung auf seine Herleitung *als ein aus der Form mit Polareigenschaft erzeugtes System bezeichnet werden.* Das Resultat dieser Ueberlegung als Satz gefasst, lautet:

Satz 7. *Verschwinden sämmtliche Unterdeterminanten $n - r - 1^{ter}$ Ordnung der Discriminante einer einem gegebenen Zahlensystem entstammenden Form mit Polareigenschaft, ohne dass alle Unterdeterminanten $n - r^{ter}$ Ordnung verschwinden, so erzeugt die Form mit Polareigenschaft ein begleitendes System mit r Grundzahlen.*

Hierzu kommt als Ergänzung:

Satz 8. *Jede Form mit Polareigenschaft entstammt dem von ihr erzeugten begleitenden System.*

Denn die Form (8) ist bilinear blos in den Parametern der Zahlen des von ihr erzeugten Systems $x_1 \ldots x_r$ und $u_1 \ldots u_r$.

Eine Folge dieser Sätze ist:

Satz 9. *Ein Zahlensystem, dem eine einzige Form mit Polareigenschaft entstammt und das sich aus dieser erzeugen lässt, ist ein ursprüngliches.*

Denn besässe ein derartiges Zahlensystem ein begleitendes System, so müsste die Form mit Polareigenschaft auch diesem entstammen, müsste also ein begleitendes System des gegebenen Systems erzeugen, was gegen die Voraussetzung ist.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz 10. *Einem ursprünglichen Zahlensystem entstammt nur eine Form mit Polareigenschaft.*

Denn da ein ursprüngliches Zahlensystem kein begleitendes System besitzt, so kann jede ihm entstammende Form mit Polareigenschaft wieder nur das ursprüngliche Zahlensystem erzeugen; die Discriminante keiner solchen Form darf also verschwinden. Existirten nun zwei

Formen mit Polareigenschaft g und h, so liesse sich doch aus ihnen eine Form $g + \mu h$ mit verschwindender Discriminante bilden. Da dies nicht geschehen darf, so kann nur eine Form mit Polareigenschaft vorhanden sein.

§ 4.

Anhang.

Auffindung aller ursprünglichen Zahlensysteme, die ein gegebenes System begleiten.

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt hier anhangsweise, da sie, obwohl umfängliche Vorbereitungen erfordernd, zu Betrachtungen, die von den vorhergehenden wesentlich abweichen, keine Veranlassung giebt.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen zeigen, dass die Aufgabe, alle ursprünglichen begleitenden Systeme eines gegebenen Zahlensystems aufzufinden, zurückgeführt werden kann auf die, die erzeugenden Formen mit Polareigenschaft dieser Systeme anzugeben.

Wie schon erwähnt, können durch Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$\sum_i g_i (a^i_{kl} - a^i_{lk}) = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

alle dem Zahlensystem entstammenden Formen mit Polareigenschaft

$$\sum_{i,k,l} g_i a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

gefunden werden. Es mögen $g' \ldots g^{(\varrho)}$ ein vollständiges System von solchen linear unabhängigen Formen bilden. Aus ihnen muss sich linear jede andere Form zusammensetzen, insbesondere eine jede, die ein bestimmtes ursprüngliches begleitendes System erzeugt.

Zunächst ist es nothwendig, das Verhalten der begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme zu den einzelnen Formen $g' \ldots g^{(\varrho)}$ festzustellen. Dies geschieht folgendermassen:

Satz a). Es seien g und h zwei Formen mit Polareigenschaft und das aus h erzeugte System werde von einem ursprünglichen System begleitet, welches das aus g erzeugte System nicht begleitet. Dann wird jedes System, welches aus einer Form mit Polareigenschaft $h + \mu g$ erzeugt wird, von dem in Rede stehenden ursprünglichen System begleitet.

Entsprechend dem Satz 3 kann die Basis des gegebenen Zahlensystems so gewählt werden, dass $x_1 \ldots x_r$ die Parameter einer Zahl des aus g erzeugten Systems, $x_{r+1} \ldots x_s$ die Parameter einer Zahl des ursprünglichen Systems werden. Dann können die Grössen $u_1 \ldots u_n$ so gewählt werden, dass die Form h in eine lineare Form von

$x_{r+1} \ldots x_s$ allein übergeht. Die Form $h + \mu g$ geht dabei in eine lineare Form von $x_1 \ldots x_s$ über, etwa $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s$. Letztere ist eine lineare Form der Parameter einer Zahl des aus $h + \mu g$ erzeugten Systems.

Ersetzt man in dieser linearen Form $x_1 \ldots x_s$ durch $x_1' \ldots x_s'$, so geht sie, weil $x_1' \ldots x_r'$ nur von $x_1 \ldots x_r$, $u_1 \ldots u_r$ und $x_{r+1}' \ldots x_s'$ nur von $x_{r+1} \ldots x_s$; $u_{r+1} \ldots u_s$ abhängen, in die Summe zweier bilinearer Formen über. Diese wird wiederum dadurch, dass $u_1 \ldots u_s$ feste Werthe erhalten, eine lineare Form der Parameter einer Zahl des aus $h + \mu g$ erzeugten Systems, also auch insbesondere, wenn $u_1 \ldots u_r$ verschwinden. Dann aber ist diese Form blos lineare Form von $x_{s+1} \ldots x_r$ und es besitzen nach Satz 3 das aus $h + \mu g$ erzeugte System und das fragliche ursprüngliche System ein gemeinsames begleitendes System; dies aber kann kein anderes sein, als das ursprüngliche System selbst.

Dann folgt weiter:

Satz b). Sind $g' \ldots g^{(\varrho)}$ ein vollständiges System linear unabhängiger einem Zahlensystem entstammender Formen mit Polareigenschaft, und ist ferner f eine Form mit Polareigenschaft, die ein bestimmtes begleitendes ursprüngliches System erzeugt, so muss mindestens eines der aus $g' \ldots g^{(\varrho)}$ erzeugten begleitenden Systeme von dem aus f erzeugten System begleitet werden.

Denn die Form f muss linear aus $g' \ldots g^{(\varrho)}$ gebildet werden können, etwa:

$$f = m' g' + \cdots + m^{(\varrho)} g^{(\varrho)}.$$

Begleitet nun das aus f erzeugte System das aus $g^{(\varrho)}$ erzeugte System nicht, so begleitet es nach Satz a) das aus

$$f - m^{(\varrho)} g^{(\varrho)} = m' g' + \cdots + m^{(\varrho-1)} g^{(\varrho-1)}$$

erzeugte System. Würde es auch das aus $g^{(\varrho-1)}$ erzeugte System nicht begleiten und so fort, so müsste es doch schliesslich das aus g' erzeugte System begleiten.

Für das weitere bedarf es des Hilfssatzes:

Satz c). Sind $g' \ldots g^{(\varrho)}$ Formen mit Polareigenschaft und ist g eine aus ihnen linear zusammengesetzte Form, deren Discriminante nicht verschwindet, so giebt es mindestens eine Form von der Gestalt $g + \mu g^{(i)}$ mit verschwindender Discriminante.

Denn g besitzt die Form

$$g = m' g' + \cdots + m^{(\varrho)} g^{(\varrho)}$$

und die Discriminante dieser Form wird rationale ganze Function von $m' \ldots m^{(\varrho)}$. Von diesen Grössen muss mindestens eine, etwa $m^{(i)}$, wirklich vorkommen. Setzt man dann die Discriminante von $g + \mu g^{(i)}$

gleich Null, so erhält man eine Gleichung in μ, die wenigstens eine Wurzel μ_0 besitzt; es verschwindet also die Discriminante von $g + \mu_0 g^{(i)}$.

Satz d). Erzeugt die Form g ein Zahlensystem, dessen volles System linear unabhängiger Formen mit Polareigenschaft von $g' \ldots g^{(\varrho)}$ gebildet wird, so lässt sich aus jedem Paar $g^{(i)}$, $g^{(k)}$ dieser Formen mindestens eine Form $g^{(i)} + \mu g^{(k)}$ mit verschwindender Discriminante bilden. Ist dann f eine Form, die ein ursprüngliches begleitendes System erzeugt, so giebt es unter den aus den Formen $g^{(i)} + \mu g^{(k)}$ mit verschwindender Discriminante erzeugten Systemen mindestens eines, das von dem aus f erzeugten System begleitet wird.

Dies ist sicher richtig, wenn die Discriminanten aller Formen $g' \ldots g^{(\varrho)}$ verschwinden, da alsdann jedes μ gleich Null gesetzt werden kann, und mithin der Satz sich auf den Satz b) reducirt. Andernfalls muss die Discriminante wenigstens einer Form, etwa von $g^{(\varrho)}$, von Null verschieden sein. Sind dann die Formen:

$$h^{(i)} = g^{(i)} + \mu^{(i)} g^{(\varrho)} \qquad (i = 1 \cdots \varrho - 1)$$

solche, deren Discriminanten verschwinden, und erzeugt keine von ihnen ein System, das von dem aus f erzeugten ursprünglichen System begleitet wird, so bilden $h' \ldots h^{(\varrho-1)}$ mit f zusammen ein vollständiges System linear unabhängiger Formen mit Polareigenschaft; es wird sich dann $g^{(\varrho)}$ durch

$$g^{(\varrho)} = f + h$$

darstellen lassen, wo h eine lineare Form von $h' \ldots h^{(\varrho-1)}$ ist. Dann aber giebt es eine Form $h^{(i)}$ derart, dass die Discriminante von

$$f + h + \mu h^{(i)}$$

oder, was dasselbe ist, von $\mu g^{(i)} + (1 + \mu \mu^{(i)}) g^{(\varrho)}$ verschwindet, wo μ eine bestimmte, von Null verschiedene, Grösse ist. Das aus dieser Form erzeugte System wird aber nach Satz b) von dem aus f erzeugten ursprünglichen System begleitet.

Satz e). Erzeugt die Form g ein Zahlensystem mit ϱ unabhängigen Formen mit Polareigenschaft, und die Form h, deren Discriminante verschwindet, ein begleitendes System desselben, so entstammen letzterem weniger als ϱ unabhängige Formen mit Polareigenschaft.

Denn das aus h erzeugte System besitzt nach dem 7. Satze weniger Grundzahlen als das aus g erzeugte; ihm kann somit die Form g nicht entstammen, weil es sonst von dem aus g erzeugten System begleitet würde.

Es ist nach diesen Sätzen zur Gewinnung der ein gegebenes Zahlensystem begleitenden ursprünglichen Systeme folgendermassen zu verfahren. Man sucht ein volles System linear unabhängiger dem gegebenen Zahlensystem entstammender Formen mit Polareigenschaft $g' \ldots g^{(\varrho)}$ auf. Jede dieser Formen erzeugt ein begleitendes System S_ϱ,

dem höchstens ϱ Formen mit Polareigenschaft entstammen. Zu jedem dieser Systeme bildet man das vollständige System der Formen mit Polareigenschaft $h' \ldots h^{(\sigma)}$. Dann bildet man alle Formen $h^{(i)} + \mu h^{(k)}$, deren Discriminanten verschwinden. Jede dieser Formen erzeugt ein begleitendes System $S_{\varrho-1}$, dem höchstens $\varrho - 1$ Formen mit Polareigenschaft entstammen. Es wird mindestens eines der Systeme S_ϱ, also auch mindestens eines der Systeme $S_{\varrho-1}$ von einem bestimmten ursprünglichen System begleitet, das das gegebene System begleitet. Mit den Systemen $S_{\varrho-1}$ ist in derselben Weise zu verfahren; man erhält Systeme $S_{\varrho-2}$ mit höchstens $\varrho - 2$ Formen mit Polareigenschaft. So fortfahrend gelangt man schliesslich zu Systemen S_1 mit nur einer Form mit Polareigenschaft. Jedes von diesen, als aus der ihm entstammenden Form mit Polareigenschaft erzeugt, ist nach dem 9ten Satze ein ursprüngliches; und zwar wird man so, wie leicht zu sehen ist, alle ursprünglichen Systeme, die das gegebene System begleiten, erhalten haben.

Lässt sich auch die Behandlung der in diesem Paragraphen gestellten Aufgabe in vielen Stücken vereinfachen, so ist doch das Wesentlichste erreicht dadurch, dass gezeigt wurde, wie den Productgleichungen eines Zahlensystems diejenige Form ertheilt werden kann, von der am Schluss des zweiten Paragraphen die Rede ist. Nämlich *nachdem alle ursprünglichen begleitenden Systeme gefunden sind, kann der Basis des gegebenen Zahlensystems eine solche Form ertheilt werden, dass unter den Productgleichungen des gegebenen Systems sich die Productgleichungen aller begleitenden ursprünglichen Systeme vorfinden.*

II. Abschnitt.

Zahlensysteme und algebraische Gleichungen.

§ 1.

Lehnsätze.

Die Grundlage der weiteren Untersuchungen bilden zwei Determinantensätze, deren Beweis an dieser Stelle gegeben sei.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichungen

$$\omega x_i = \sum_k b_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \ldots n) \tag{1}$$

ein nicht verschwindendes Lösungssystem besitzen, besteht in der Gleichung

$$|b_{ik} - \delta_{ik}\omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \cdots n), \tag{2}$$

wo, wie auch sonst üblich, δ_{ik} eine Grösse bedeutet, die Null ist,

wenn i und k verschieden sind, und Eins, wenn i und k gleich sind. Diese Gleichung, nach Potenzen von ω entwickelt, möge

$$\omega^n - B_1\omega^{n-1} + \cdots \pm B_n = 0 \tag{3}$$

sein. Sodann werde folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

$$\begin{aligned} b_{ik}^2 &= \sum_l b_{il} b_{lk}, \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \\ b_{ik}^\nu &= \sum_l b_{il}^{\nu-1} b_{lk}, \qquad (\nu = 3, 4 \ldots) \end{aligned} \tag{4}$$

wozu noch der Symmetrie wegen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} b_{ik}^1 &= b_{ik}, \\ b_{ik}^0 &= \delta_{ik} \end{aligned} \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

kommen mögen.

Dann lautet der erste der zu beweisenden Sätze:

Satz 11. *Die Gleichungen:*

$$b_{ik}^n - B_1 b_{ik}^{n-1} + \cdots \mp B_{n-1} b_{ik}^1 \pm B_n b_{ik}^0 = 0 \tag{5}$$
$$(i, k = 1 \ldots n)$$

sind Identitäten.

Zum Beweise werde zunächst angenommen, die Grössen b_{ik} seien von einander vollkommen unabhängig; dann sind die Wurzeln der Gleichung (3) von einander und von Null verschieden. Wird die zu einer dieser Wurzeln ω_h zugehörige Lösung der Gleichungen (1) mit

$$\alpha_{1h} \ldots \alpha_{nh}$$

bezeichnet, so verschwindet die Determinante

$$|\alpha_{jh}| \qquad (j, h = 1 \ldots n)$$

nicht, wie aus der speciellen Annahme ersichtlich, dass die b_{ii} alle verschieden, die übrigen b_{ik} aber Null seien. Aus den Gleichungen

$$\omega_h \alpha_{ih} = \sum_k b_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k = 1 \ldots n) \tag{6}$$

ergiebt sich unter Anwendung der Bezeichnungen (4)

$$\omega_h^\nu \alpha_{ih} = \sum_k b_{ik}^\nu \alpha_{kh} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1 \ldots n \\ \nu = 0, 1 \ldots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

und wenn

$$\beta_{ik} = b_{ik}^n - B_1 b_{ik}^{n-1} + \cdots \pm B_n b_{ik}^0$$

gesetzt wird, so folgt mit Rücksicht darauf, dass ω_h eine Wurzel der Gleichung (3) ist,

$$0 = \sum_k \beta_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k, h = 1 \ldots n), \tag{8}$$

ein Gleichungssystem, das nur dann bestehen kann, wenn

$$\beta_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n) \tag{9}$$

ist. Da die Grössen β_{ik} aus den von einander unabhängigen Grössen b_{ik} rational gebildet sind, so müssen die Gleichungen (9) für jedes beliebige Werthsystem der b_{ik} bestehen, also auch unter der Annahme beliebiger Beziehungen zwischen den Grössen b_{ik}. Der oben ausgesprochene Satz also ist allgemein richtig.

Der zweite Satz ist der folgende:

Satz 12. *Diejenige Gleichung, deren Wurzeln ϱ die sämmtlichen Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung*

$$|b_{ik} - \delta_{ik}\omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

sind, wird durch Elimination der Grössen c_{ik} aus den Gleichungen

$$\varrho c_{ik} = \sum_l c_{il} b_{lk} - \sum_l b_{il} c_{lk} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{10}$$

erhalten.

Zunächst kann vollständige Unabhängigkeit der Grössen b_{ik} angenommen werden. Da alsdann die aus den Lösungen der Gleichungen (6) gebildete Determinante $|\alpha_{jh}|$ nicht verschwindet, so kann jedem der Elemente α_{jh} eine Adjuncte A_{hj} zugeordnet werden. Mit Hilfe dieser Grössen lässt sich das System der Gleichungen (10) in das ihm äquivalente System von Gleichungen

$$\varrho \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} = \sum_{i,l,k} A_{ji} c_{il} b_{lk} \alpha_{kh} - \sum_{i,l,k} A_{ji} b_{il} c_{lk} \alpha_{kh}$$

umwandeln. Dies letztere aber geht vermöge der Gleichungen (6) nach leichter Umrechnung in:

$$(\varrho - \omega_h + \omega_j) \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} = 0 \qquad (h, j, i, k = 1 \ldots n) \tag{11}$$

über. Durch Elimination der Grössen c_{ik} aus diesen Gleichungen oder, was dasselbe ist, des mit den c_{ik} äquivalenten Grössensystems

$$c'_{jh} = \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k, j, h = 1 \ldots n)$$

ergiebt sich

$$\prod_{j,h} (\varrho - \omega_j + \omega_h) = 0 \qquad (j, h = 1 \ldots n), \tag{12}$$

also eine Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen Differenzen zwischen Wurzeln der Gleichung (2) sind. Wird diese Gleichung nach Potenzen von ϱ entwickelt, so lassen sich ihre Coefficienten als ganze rationale Functionen der Grössen b_{ik} darstellen; sie muss dann wegen

der Aequivalenz der Gleichungensysteme (10) und (11) identisch werden mit derjenigen Gleichung, die durch Elimination der Grössen c_{ik} aus den Gleichungen (10) erhalten wird.

§ 2.

Die charakteristischen Gleichungen eines Zahlensystems.

Die Bedingungen dafür, dass das Product zweier Zahlen einem der Factoren proportional sei, sind durch zwei algebraische Gleichungen gegeben, deren Eigenschaften in folgendem untersucht werden.

Damit, wenn ω eine gewöhnliche Grösse ist, die Gleichung

$$\omega x = xu \tag{1}$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen

$$\omega x_i = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

lösbar seien, muss ω eine Wurzel der Gleichung

$$\left| \sum_l a_{kl}^i u_l - \delta_{ik} \omega \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{2}$$

sein. Ebenso muss, damit die Gleichung

$$\omega x = ux \tag{3}$$

lösbar sei, ω eine Wurzel der Gleichung

$$\left| \sum_l a_{lk}^i u_l - \delta_{ik} \omega \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{4}$$

sein. *Die beiden Gleichungen* (2) *und* (4) *mögen die charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems heissen.* Nach Potenzen von ω entwickelt mögen sie die Formen

$$\omega^n - f_1 \omega^{n-1} + \cdots \pm f_n = 0, \tag{5}$$

$$\omega^n - g_1 \omega^{n-1} + \cdots \pm g_n = 0 \tag{6}$$

annehmen. Der erste Satz des vorigen Paragraphen zeigt die Bedeutung dieser Gleichungen; er giebt nämlich:

Satz 13. *Ersetzt man in einer der charakteristischen Gleichungen die Potenzen von ω durch die gleichhohen Potenzen der Zahl u, so ist die entstehende Gleichung eine Identität.*

Es werde

$$b_{ik} = \sum_l a_{kl}^i u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

gesetzt. Dann lässt sich das Product einer beliebigen Zahl x mit u in folgender Weise schreiben:

$$xu = \sum_{i,k} b_{ik} x_k e_i \qquad (i, k = 1 \ldots n).$$

Daraus ergiebt sich:

$$xu^2 = \sum_{i,k} b_{ik}^2 x_k e_i$$

und allgemein

$$xu^\nu = \sum b_{ik}^\nu x_k e_i. \qquad (i, k = 1 \ldots n).$$

Wird beachtet, dass hier $B_i = f_i$ $(i = 1 \ldots n)$ wird, so ergiebt der angezogene Satz:

$$xu^n - f_1 xu^{n-1} + \cdots \pm f_n x = 0 \tag{7}$$

und hieraus folgt, wenn x durch die vermittelst des Satzes 1 definirte Zahl u^0 ersetzt wird:

$$u^n - f_1 u^{n-1} + \cdots \pm f_n u^0 = 0. \tag{8}$$

Auf demselben Wege erhält man

$$u^n - g_1 u^{n-1} + \cdots \pm g_n u^0 = 0. \tag{9}$$

Damit ist die Existenz der im Satze ausgesprochenen Beziehung erwiesen. —

Es ist nothwendig auf die Coefficienten der charakteristischen Gleichungen näher einzugehen. Dieselben haben nachstehende Eigenschaften:

1) Die Coefficienten der charakteristischen Gleichungen sind ganze rationale und homogene Functionen der Parameter $u_1 \ldots u_n$ desjenigen Grades, der durch den jeweiligen Index angegeben wird.

2) Es werde u durch $u + \lambda u^0$ ersetzt. Da alsdann die Gleichungen

$$\omega x = x(u + \lambda u^0)$$

und

$$(\omega - \lambda) x = xu$$

identisch sind, so lässt sich der charakteristischen Gleichung

$$\omega^n - f_1(u + \lambda u^0)\,\omega^{n-1} + \cdots \pm f_n(u + \lambda u^0) = 0 \tag{10}$$

auch die Form

$$(\omega - \lambda)^n - f_1(u)\,(\omega - \lambda)^{n-1} + \cdots \pm f_n(u) = 0 \tag{11}$$

geben.

3) Multiplicirt man die Gleichung

$$\omega x = xu$$

mit u, so folgt

$$\omega^2 x = xu^2$$

und allgemein

(12) $$\omega^\nu x = x u^\nu .$$

Wird die Zahl u^ν in folgender Weise geschrieben

$$u^\nu = (u^\nu)_1 e_1 + \cdots + (u^\nu)_n e_n ,$$

so folgt aus der Gleichung (2) dass die Wurzeln der Gleichung

$$\left| \sum_i a^i_{kl} (u^\nu)_i - \delta_{ik} \omega' \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

oder

(13) $$\omega'^n - f_1(u^\nu)\omega'^{n-1} + \cdots \pm f_n(u^\nu) = 0$$

die ν^{ten} Potenzen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (5) sind. Es ist also, wenn

$$f_1(u) = p_1 u_1 + \cdots + p_n u_n$$

gesetzt wird, die Grösse

$$f_1(u^\nu) = p_1 (u^\nu)_1 + \cdots + p_n (u^\nu)_n$$

die Summe der ν^{ten} Wurzelpotenzen der charakteristischen Gleichung (5), und somit sind die Coefficienten derselben charakteristischen Gleichung rationale ganze Functionen von

$$f_1(u),\ f_1(u^2) \ldots f_1(u^n).$$

4) Aus der Gleichung

$$\omega x = x u$$

folgt, wenn mit der zu u reciproken Zahl $\bar{u}$ multiplicirt wird:

$$\frac{1}{\omega} \cdot x = x \cdot \bar{u}$$

und hieraus, dass die charakteristische Gleichung auch in der Form

(14) $$\left| \omega \sum_i a^i_{kl} \bar{u}_i - \delta_{ik} \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgen die Relationen:

(15) $$f_i(\bar{u}) = \frac{f_{n-i}(\mu)}{f_n(u)} \qquad (i = 1 \cdots n - 1).$$

Selbstredend lässt sich alles, was hier nur von einer charakteristischen Gleichung gezeigt wurde, auch auf die andre übertragen.

5) Den linearen Coefficienten der charakteristischen Gleichungen $f_1(u)$ und $g_1(u)$ gehören Formen mit Polareigenschaft zu. Von

$$g_1(u) = \sum_{i,k} a^i_{ki} u_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

ist es bereits im Beweise des 6^{ten} Satzes gezeigt worden; auf demselben Wege ist es auch für

$$f_1(u) = \sum_{i,k}^{i} a_{ik}^{i} u_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

nachweisbar.

6) Ersetzt man in der Form $f_1(u)$ die Zahl durch das Product mehrerer Zahlen, so bleibt die entstehende Form zufolge der Polareigenschaft von $f_1(vw)$ bei allen cyklischen Vertauschungen der Zahlen invariant. Wird demgemäss in $f_1(u^r)$ gesetzt

$$u = vw,$$

so resultirt die Form

$$f_1(vwv \ldots w),$$

die durch cyklische Vertauschungen nur in sich oder in

$$f_1(wvw \ldots v)$$

übergeht. Die Form $f_1(u^r)$ erhält also denselben Werth, wenn einmal $u = vw$ und einmal $u = wv$ gesetzt wird. Mit Rücksicht auf das unter Punkt 3 gesagte folgt, dass, wenn in einer charakteristischen Gleichung u durch vw ersetzt wird, die beiden Variabelnreihen $v_1 \ldots v_n$ und $w_1 \ldots w_n$ mit einander vertauschbar sind.

Insbesondere ist noch zu bemerken, dass:

$$f_n(vw) = f_n(v) \cdot f_n(w) \tag{16}$$

ist, nach dem Multiplicationssatz der Determinanten.

§ 3.

Die Theiler der charakteristischen Gleichungen.

Theiler einer charakteristischen Gleichung sei jede Gleichung genannt, deren Coefficienten rationale Functionen von $u_1 \ldots u_n$ sind und deren Product mit einer ebensolchen Gleichung eine charakteristische Gleichung ergiebt. Ein irreductibler Theiler ist ein solcher, der selbst keinen Theiler mit von $u_1 \ldots u_n$ rational abhängigen Coefficienten besitzt.

Es sei ein Theiler einer charakteristischen Gleichung in der Form

$$\omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0 \tag{1}$$

gegeben. *Es lässt sich dann zeigen, dass seine Coefficienten alle oben an den Coefficienten der charakteristischen Gleichungen nachgewiesenen Eigenschaften besitzen.*

Man erkennt leicht, dass dieselben

1) ganze (weil sonst Wurzeln einer charakteristischen Gleichung für endliche Werthe von $u_1 \ldots u_n$ unendlich würden) homogene Functionen von $u_1 \ldots u_n$ des durch den jeweiligen Index angegebenen Grades sind;

2) dass die Gleichungen

$$\omega^m - h_1(u + \lambda u^0)\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u + \lambda u^0) = 0 \tag{2}$$

und

$$(3) \qquad (\omega-\lambda)^m - h_1(u)(\omega-\lambda)^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0$$

identisch sind. Denn die Gleichung (2) muss mit einem Theiler einer charakteristischen Gleichung, deren Unbekannte $\omega - \lambda$ ist, identisch sein. Ist dies etwa

$$(\omega-\lambda)^m - h_1'(u)(\omega-\lambda)^{m-1} + \cdots \pm h_m'(u) = 0,$$

so folgt durch Entwickelung dieser Gleichung und der Gleichung (2) nach Potenzen von λ und Vergleichung der von λ freien Glieder:

$$h_i'(u) = h_i(u) \qquad (i = 1 \ldots m).$$

3) Ersetzt man in der Gleichung (1) u durch u^ν, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln die ν^{ten} Potenzen der Wurzeln von (1) sind. Dies erkennt man folgendermassen. Bildet man die Gleichung

$$(4) \qquad \omega'^m - h_1(u^m)\omega'^{m-1} + \cdots \pm h_m(u^m) = 0,$$

so sind ihre Wurzeln nach dem in Punkt 3 des vorigen Paragraphen gesagten jedenfalls m^{te} Potenzen von gewissen Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_m$ einer charakteristischen Gleichung. Ersetzt man u durch $u + \lambda u^0$ so folgt aus (4)

$$h_1\left((u+\lambda u^0)^m\right) = \sum_i (\omega_i + \lambda)^m \qquad (i = 1 \ldots m)$$

und hieraus durch Entwicklung nach Potenzen von λ und Vergleichung

$$(5) \qquad h_1(u^\mu) = \sum_i \omega_i^\mu \qquad (\mu = 1 \ldots m).$$

Bildet man dann diejenige Gleichung, deren Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_m$ sind.

$$(6) \qquad \omega^m - h_1'(u)\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m'(u) = 0$$

so sind gemäss den Gleichungen (5) die Coefficienten von (6) rationale Functionen von $h_1(u) \ldots h_1(u^m)$ und als solche rational in $u_1 \ldots u_n$; es genügt demzufolge (6) der Definition eines Theilers einer charakteristischen Gleichung. Es gilt ferner für jeden ganzzahligen Exponenten μ die Gleichung

$$(7) \qquad h_1(u^\mu) = \sum_i \omega_i^\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m, m+1 \ldots).$$

Denn wäre für einen Exponenten μ, der grösser als m ist, die Relation (7) nicht erfüllt, sondern $h_1(u^\mu)$ die Summe der μ^{ten} Potenzen irgend welcher anderen Wurzeln $\omega_1' \ldots \omega_m'$ einer charakteristischen Gleichung, so würde auf demselben Wege, auf dem die Gleichungen (5) erhalten werden,

$$h_1(u^k) = \sum_i \omega_i'^k \qquad (k = 1 \ldots, \mu)$$

folgen, was, da μ grösser als m ist, den Gleichungen (5) widersprechen würde.

Aus dem Umstand, dass die Coefficienten von (6) rational durch $h_1(u) \ldots h_1(u^m)$ darstellbar sind, und mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) folgt ferner, dass diejenige Gleichung, die aus (6) vermittelst der Ersetzung von u durch u^ν entsteht, die ν^{ten} Potenzen der Wurzeln von (6) zu Wurzeln hat. Für $\nu = m$ wird diese Gleichung identisch mit der Gleichung (4), zufolge der Voraussetzung über die Wurzeln letzterer Gleichung; daraus folgt, dass auch (6) mit (1) identisch ist. Die Coefficienten von (1) sind also rationale Functionen von

$$h_1(u) \ldots h_1(u^m)$$

und es gehen die Wurzeln von (1), wenn u durch u^ν ersetzt wird, in ihre ν^{ten} Potenzen über.

4) Dass die Wurzeln der Gleichung

$$\omega'^m - h_1(\bar{u})\omega'^{m-1} + \cdots \pm h_m(\bar{u}) = 0 \tag{8}$$

die Reciproken der Wurzeln der Gleichung (1) sind, beweist man durch Entwickelung der zu $u + \lambda u^0$ reciproken Zahl v nach negativen Potenzen von λ. Es ist

$$v = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{u^\nu}{\lambda^{\nu+1}},$$

woraus sich

$$h_1(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{h_1(u^\nu)}{\lambda^{\nu+1}}$$

ergiebt. Andererseits wird durch analoge Reihenentwickelung mit Rücksicht auf die Gleichungen (7)

$$\sum_i \frac{1}{\omega_i + \lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{h_1(u^\nu)}{\lambda^{\nu+1}} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

gefunden. Hiernach ist also $h_1(\bar{u})$ gleich der Summe der Reciproken der Wurzeln von (1); ersetzt man ferner u durch u^ν, so wird $h_1(u^\nu)$ die Summe der ν^{ten} Potenzen dieser Reciproken, und da die Coefficienten von (8) rational von $h_1(\bar{u}) \ldots h_1(\bar{u}^m)$ abhängen, so sind in der That die Wurzeln von (8) zu den Wurzeln von (1) reciprok.

5) Setzt man in der Gleichung (1) in Stelle von u das Product vw, so resultirt eine Gleichung, die sich bei Vertauschung von v mit w nicht ändert. Es kann nämlich, da die charakterischen Gleichungen bereits diese Eigenschaft besitzen, ein Theiler einer derselben bei Vertauschung von v und w nur wieder in einen Theiler übergehen. Da dies unabhängig von v und w geschieht, so findet es auch für $w = u^0$ statt. Hier sind aber die in einander übergehenden Theiler identisch; somit sind sie auch im Allgemeinen identisch. Da das von ω freie Glied eines Theilers Theiler des von ω freien Gliedes der charakte-

ristischen Gleichung ist, und letzteres bei der Substitution $u = vw$ in das Product $f_n(v) f_n(w)$ resp. $g_n(v) g_n(w)$ übergeht, so folgt

$$h_m(vw) = h_m(v) \cdot h_m(w). \tag{9}$$

Die in diesem Punkte erörterte Eigenschaft der Theiler hat in Bezug auf den linearen Coefficienten $h_1(u)$ besondere Wichtigkeit und verdient in Folge dessen als besondrer Satz formulirt zu werden, nämlich:

Satz 14. *Dem linearen Coefficienten eines jeden Theilers einer charakteristischen Gleichung gehört eine Form mit Polareigenschaft zu.*

Die irreductiblen Theiler der charakteristischen Gleichungen behandelt schliesslich der folgende Satz:

Satz 15. *Zwei irreductible Theiler der charakteristischen Gleichungen sind identisch, wenn ihre linearen Coefficienten in constantem Verhältnisse stehen.*

Sind diese Theiler

$$\omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0, \tag{10}$$

$$\omega^{m'} - h_1'(u)\,\omega^{m'-1} + \cdots \pm h_{m'}'(u) = 0, \tag{11}$$

so ist nach Punkt 2

$$h_1(u + \lambda u^0) = h_1(u) + m\lambda,$$
$$h_1'(u + \lambda u^0) = h_1'(u) + m'\lambda;$$

und da der Quotient dieser Grössen von λ unabhängig sein soll, ist

$$m h_1'(u) = m' h_1(u)$$

und ferner

$$m h_1'(u^r) = m' h_1(u^r).$$

Es sind also die m'^{te} Potenz von (10) und die m^{te} Potenz von (11) identisch. Da nun die Gleichungen (10) und (11) irreductibel sein sollen, so müssen sie hiernach identisch sein.

§ 4.

Die Ranggleichung eines Zahlensystems.

Die beiden, den charakteristischen Gleichungen entstammenden Relationen

$$u^n - f_1 u^{n-1} + \cdots \pm f_n u^0 = 0 \tag{1}$$

und

$$u^n - g_1 u^{n-1} + \cdots \pm g_n u^0 = 0 \tag{2}$$

können nicht unabhängig von einander sein. Es muss unter den positiven Potenzen von u eine gewisse geringste geben, die sich linear durch alle niedrigern positiven Potenzen von u, einschliesslich der nullten, darstellen lässt mit Hilfe rational aus $u_1 \ldots u_n$ gebildeten

Coefficienten; dies sei die m^{te} Potenz von u, und die Relation, die sie mit den niederen Potenzen von u verbindet, sei

$$u^m - h_1 u^{m-1} + \cdots \pm h_m u^0 = 0 \tag{3}$$

Ersetzt man in dieser Relation die Potenzen von u durch die gleichhohen Potenzen von ω, so entsteht die algebraische Gleichung

$$\omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0, \tag{4}$$

die die Ranggleichung des Zahlensystems heissen soll. Dann gilt folgender Satz:

Satz 16. *Die Ranggleichung eines Zahlensystems ist Theiler jeder der beiden charakteristischen Gleichungen.*

Denn multiplicirt man die Relation (3) mit einer linearen Form der $n - m + 1$ ersten Potenzen von u, einschliesslich der nullten, so lassen sich die Coefficienten dieser Form so bestimmen, dass die Differenz zwischen diesem Product und der Relation (1) eine Relation ergiebt, die nur geringere Potenzen von u enthält, als die m^{te}. Eine solche Relation existirt aber nicht; es muss also die in Rede stehende Differenz null sein. Da in dieser Ueberlegung u wie eine gewöhnliche unbestimmte Grösse behandelt wird, so kann man in seine Stelle ω setzen, und wird die Betrachtung in Bezug auf die Relation (2) wiederholt, so ergiebt sich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Es besitzen dann die Coefficienten der Ranggleichung alle im vorigen Paragraphen erörterten Eigenschaften; insbesondere sind sie ganze rationale und homogene Functionen von $u_1 \ldots u_n$. —

Aus der Relation (3) lässt sich eine Lösung der Gleichung

$$u \,.\, \bar{u} = u^0 \tag{5}$$

herleiten, nämlich

$$\bar{u} = \frac{h_{m-1} u^0 - \cdots \mp u^{m-1}}{h_m}; \tag{6}$$

die Parameter der Zahl $\bar{u}$ sind also homogene rationale Functionen von $u_1 \ldots u_n$ mit dem gemeinsamen Nenner h_m.

Es lässt sich beweisen:

Satz 17. *Die Parameter der zu u reciproken Zahl $\bar{u}$ sind rationale homogene Functionen der Parameter von u mit einem gemeinsamen kleinsten Nenner, der dem von ω freien Gliede der Ranggleichung gleich ist.*

Um dies zu zeigen, werde in der Relation (3) u durch $u + \lambda u^0$ ersetzt, wodurch dieselbe in

$$(u + \lambda u^0)^m - h_1'(u + \lambda u^0)^{m-1} + \cdots \pm h_m' u^0 = 0 \tag{7}$$

übergehe. Hier ist insbesondere

$$h_m' = \lambda^m + \lambda^{m-1} h_1 + \cdots \pm h_m.$$

Wird die zu $u + \lambda u^0$ reciproke Zahl mit v bezeichnet, so ist

$$(8) \qquad v = \frac{h'_{m-1} \cdot u^0 - h'_{m-2} (u + \lambda u^0) + \cdots \mp (u + \lambda u^0)^{m-1}}{h'_m}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks lässt sich nach Potenzen von u ordnen; geschieht dies, so werde erhalten

$$(9) \qquad v = \frac{j_{m-1} \cdot u^0 - j_{m-2} \cdot u + \cdots \mp u^{m-1}}{h'_m}.$$

Werden dann n homogene ganze Functionen $t_1 \ldots t_n$ von $u_1 \ldots u_n$ so bestimmt, dass

$$t_1 (u^\nu)_1 + \cdots + t_n (u^\nu)_n = 0$$

für $\nu = 0, 1 \ldots m-2$ wird, dagegen

$$s = t_1 (u^{m-1})_1 + \cdots + t_n (u^{m-1})_n$$

nicht verschwindet, so wird

$$(10) \qquad t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = \mp \frac{s}{h'_m}$$

ein Ausdruck, dessen Zähler von λ unabhängig ist; diese Wahl von $t_1 \ldots t_n$ ist möglich, weil m der Grad der Ranggleichung ist. Besässen nun der Zähler und Nenner der durch die Gleichung (6) definirten Parameter von $\bar{u}$ einen gemeinsamen Theiler vom Grade σ in $u_1 \ldots u_n$, so müssten die Zahlen und Nenner der durch (8) definirten Grössen $v_1 \ldots v_n$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, der als Theiler von h'_m in λ vom Grade σ ist. Dieser Theiler müsste zufolge (10) auch in 3 aufgehen; da aber s von λ unabhängig ist, so ist dies nicht möglich, und es ist h_m der kleinste gemeinsame Nenner von $\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n$.

§ 5.

Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichung

$$(1) \qquad \varrho x = xu - ux$$

eine Lösung besitze, bildet die Gleichung

$$(2) \qquad \left| \sum_i (a^i_{kl} - a^i_{lk}) u_i - \delta_{ik} \varrho \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

die ich die Killing'sche Gleichung des Zahlensystems nennen will. Den Zusammenhang, in welchem sie mit den charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems steht, zeigt folgender Satz:

Satz 18. *Die Wurzeln der Killing'schen Gleichung sind Differenzen zwischen den Wurzeln einer jeden der beiden charakteristischen Gleichungen.*

Setzt man zur Abkürzung

$$b_{ik}(x) = \sum_s a^i_{ks} x_s \qquad (i, k, s = 1 \ldots n),$$

so folgen vermöge der Bedingungsgleichungen

$$\sum_s a^i_{ks} a^s_{lm} = \sum_s a^i_{sm} a^s_{kl} \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots n)$$

aus der Gleichung (1) die nachstehenden Gleichungen:

$$(3) \quad \varrho b_{ik}(x) = \sum_l b_{il}(x)\, b_{lk}(u) - \sum_l b_{il}(u) b_{lk}(x) \qquad (i, k, l = 1 \ldots n).$$

Dann aber lehrt der zweite Satz des ersten Paragraphen (Satz 12) dass ϱ eine Differenz zwischen zwei Wurzeln der Gleichung

$$|b_{ik}(u) - \delta_{ik}\omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n),$$

das heisst, einer charakteristischen Gleichung sein muss.

Analog ist der Nachweis hinsichtlich der zweiten charakteristischen Gleichung zu führen.

Da die Coefficienten der Killing'schen Gleichung rational von $u_1 \ldots u_n$ abhängig sind, so ergiebt sich unmittelbar das

Corollar. *Ist eine Wurzel der Killing'schen Gleichung Differenz zweier verschiedener Wurzeln eines irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung, so sind auch alle übrigen Differenzen zwischen verschiedenen Wurzeln desselben Theilers Wurzeln der Killing'schen Gleichung.* —

Einer besonderen Untersuchung bedürfen die verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung. Die Gleichung

$$(5) \qquad 0 = xu - ux$$

besitzt immer wenigstens eine Lösung, nämlich $x = u^0$. Nennt man eine Zahl x, die diese Gleichung befriedigt, eine mit u vertauschbare Zahl, so hat die Killing'sche Gleichung mindestens so viele verschwindende Wurzeln, als es linear von einander unabhängige mit u vertauschbare Zahlen giebt. Diese Mindestzahl verschwindender Wurzeln kann indess überschritten werden und es liesse sich untersuchen, unter welchen Umständen dies stattfindet. Es reicht jedoch hin, wenn ein Fall nachgewiesen wird, in dem dies nicht geschieht und dies ist der folgende:

Satz 19. *Wird ein Zahlensystem durch eine Form mit Polareigenschaft erzeugt, so besitzt seine Killing'sche Gleichung ebensoviele verschwindende Wurzeln, als es linear unabhängige mit einer allgemein gewählten Zahl des Systems vertauschbare Zahlen giebt.*

Ist w eine beliebige Zahl des Systems, so kann die Basis so gewählt werden, dass $e_1 \dots e_r$ das volle System linear unabhängiger mit w vertauschbarer Zahlen bilden. Die Form mit Polareigenschaft

$$(6) \qquad g(xu) = \sum_{i,k} g_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1 \dots n),$$

deren Discriminante nicht verschwinden darf, erzeuge das gegebene Zahlensystem. Es können noch $e_{r+1} \dots e_n$ so gewählt werden, dass die Form (6) die besondere Gestalt

$$(7) \quad g(xu) = \sum_{i,k} g_{ik} x_i u_k + \sum g_{r+j,\, r+h} x_{r+j} u_{r+h} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1 \dots r \\ j, h = 1 \dots n-r \end{pmatrix}$$

erhält.

Wird nun

$$(8) \qquad u = vw - wv$$

gesetzt, so sollen zunächst die Parameter von u durch die Parameter von v ausgedrückt werden. Die Zahl v kann in die beiden Theile $v' = v_1 e_1 + \dots + v_r e_r$ und $v'' = v_{r+1} e_{r+1} + \dots + v_n e_n$ zerlegt werden, und da zufolge der Wahl der Basis

$$v'w - wv' = 0$$

ist, so sind die Parameter von u nur noch von $v_{r+1} \dots v_n$ abhängig.

Es wird ferner in Consequenz der Polareigenschaft der Form (7):

$$(9) \qquad g(xu) = g\big((wx - xw)v\big)$$

sein. Bezeichnet man nun mit G_{ki} die Adjuncte von g_{ik} in der als Determinante geschriebenen Discriminante der Form (7) und setzt für x den Werth

$$x^{(i)} = \sum_k G_{ki} e_k \qquad (i, k = 1 \dots r)$$

so ist $x^{(i)}$ eine mit w vertauschbare Zahl und zufolge (7) und (9) ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_i = 0. \qquad (i = 1 \dots r)$$

Wird ferner x der Werth:

$$x^{(r+j)} = \sum_h G_{r+h,\, r+j}\, e_{r+h} \qquad (h, j = 1 \dots n-r)$$

ertheilt, so folgt aus (7)

$$(11) \qquad u_{r+j} = \sum_l \beta_{jl} v_{r+l} \qquad (j, l = 1 \dots n-r),$$

wo die Grössen β_{jl} von w irgend wie abhängig sind. Es darf die Determinante

$$|\beta_{jl}| \qquad (j, l = 1 \dots n - r)$$

aber nicht verschwinden, denn sonst liessen sich $v_{r+1} \ldots v_n$ so bestimmen, dass ausser $u_1 \ldots u_r$ auch $u_{r+1} \ldots u_n$ verschwinden. Es wäre dann gemäss (8) eine so bestimmte Zahl v mit w vertauschbar; dies aber widerstreitet der Voraussetzung über die Wahl der Basis des Zahlensystems. Die Parameter der Zahl u sind jetzt durch die Gleichungen (10) und (11) gegeben.

Setzt man jetzt $u = \varrho v$ und folglich

$$\varrho v = vw - wv,$$

so werden die Gleichungen (10) und (11):

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varrho v_i &= 0 && (i = 1 \ldots r) \\ \varrho v_{r+j} &= \sum_l \beta_{jl} v_{r+l} && (j, l = 1 \ldots n - r) \end{aligned}$$

und wenn hieraus die Parameter $v_1 \ldots v_n$ eliminirt werden, so ist die Killing'sche Gleichung, gebildet für die Zahl w:

$$(13) \qquad \varrho^r |\beta_{jl} - \delta_{jl}\varrho| = 0 \qquad (j, l = 1 \ldots n - r).$$

Diese Gleichung besitzt, weil die Determinante $|\beta_{jl}|$ nicht verschwindet, genau r verschwindende Wurzeln, also gerade ebenso viele, als es linear unabhängige mit w vertauschbare Zahlen im Zahlensystem giebt.

§ 6.

Die charakteristischen Gleichungen und Ranggleichungen begleitender Zahlensysteme.

Satz 20. *Bildet man zu einem gegebenen Zahlensystem ein begleitendes System, so ist eine charakteristische Gleichung des letztern ein Theiler der entsprechenden charakteristischen Gleichung des gegebenen Systems.*

Denn wählt man die Basis des gegebenen Zahlensystems so, dass die r ersten Productgleichungen desselben die Productgleichungen des begleitenden Systems werden,

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l && (i, k, l = 1 \ldots r) \\ x_{r+i} &= \sum_{k,l} a_{kl}^{r+i} x_k u_l && \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n-r \\ k, l = 1 \ldots n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist unmittelbar ersichtlich, dass die charakteristische Gleichung des begleitenden Systems

$$(2) \qquad \left| \sum_l a_{kl}^i u_l - \delta_{ik}\omega \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots r)$$

die charakteristische Gleichung

$$\left|\sum_i a_{kl}^i u_i - \delta_{ik}\omega\right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

des gegebenen Systems theilt. Dasselbe gilt bezüglich der andern charakteristischen Gleichung. —

Was die Ranggleichung anlangt, so ist der entsprechende Satz auf anderm Wege zu erweisen:

Satz 21. *Die Ranggleichung eines begleitenden Systems ist Theiler der Ranggleichung des gegebenen Systems.*

Ist die Ranggleichung des gegebenen Systems

$$\omega^m - h_1\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0 \tag{3}$$

und die des begleitenden Systems

$$\omega^{m'} - h_1'\omega^{m'-1} + \cdots \pm h_{m'}' = 0, \tag{4}$$

ferner v diejenige Zahl des begleitenden Systems, die der Zahl u des gegebenen Systems entspricht, so müssen die Relationen

$$v^m - h_1 v^{m-1} + \cdots \pm h_m v^0 = 0,$$
$$v^{m'} - h_1' v^{m'-1} + \cdots \pm h_{m'}' v^0 = 0$$

zusammen bestehen. Dies aber ist, wie im analogen Falle beim Beweise des Satzes 16 gezeigt wurde, nur möglich, wenn die Gleichung (4) die Gleichung (3) theilt. Uebrigens ist hierbei die Identität der Gleichungen (3) und (4) nicht ausgeschlossen. — Unter Rücksichtnahme auf die Sätze 14 und 15, welche aussagen, dass zum linearen Coefficienten jedes irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung eine Form mit Polareigenschaft gehört und zwar zu verschiedenen Theilern auch verschiedene Formen mit Polareigenschaft, können die begleitenden ursprünglichen Systeme eines Zahlensystems des Nähern untersucht werden. Zunächst hat man

Satz 22. *Die beiden charakteristischen Gleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems sind Potenzen einer und derselben irreductibeln Gleichung.*

Denn aus der Existenz zweier verschiedener irreductibler Theiler der charakteristischen Gleichungen würde nach Satz 15 folgen, dass dem Zahlensystem zwei verschiedene Formen mit Polareigenschaft entstammen; dasselbe wäre dann nach Satz 10 kein ursprüngliches. Da die charakteristischen Gleichungen stets von gleichem Grade sind, so sind sie in diesem Falle identisch.

Satz 23. *Ein Zahlensystem, dessen Ranggleichung irreductibel ist, und welches sich aus dem linearen Coefficienten der Ranggleichung erzeugen lässt, ist ein ursprüngliches.*

Denn ein begleitendes Zahlensystem müsste mit dem gegebenen Zahlensystem die Ranggleichung gemein haben, da letztere irreductibel

ist. Dann würde auch der lineare Coefficient der Ranggleichung dem begleitenden System entstammen; da derselbe aber das gegebene System erzeugt, so muss jedes begleitende System mit dem gegebenen System identisch, letzteres also ursprünglich sein.

Satz 24. *Die Ranggleichung eines ursprünglichen Zahlensystems ist irreductibel.*

Es sei

$$\omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0 \tag{5}$$

der irreductible Theiler der charakteristischen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems. Aus dem linearen Coefficienten h_1, dem eine Form mit Polareigenschaft zugehört, muss sich das System erzeugen lassen. Ersetzt man nun u durch die reciproke Zahl $\bar{u}$, so geht nach Punkt 4 des dritten Paragraphen $h_1(u)$ in:

$$h_1(\bar{u}) = \frac{h_{m-1}(u)}{h_m(u)} \tag{6}$$

über. Setzt man dann $u = v \cdot \bar{w}$, so wird $\bar{u} = w \cdot \bar{v}$ und nach Punkt 5 desselben Paragraphen wird

$$h_1(w\bar{v}) = \frac{h_{m-1}(v \cdot \bar{w})}{h_m(v)\, h_m(\bar{w})} . \tag{7}$$

Setzt man hier n linear unabhängige Zahlen für w, so erhält man n linear unabhängige Formen von $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$, dargestellt als rationale Functionen von $v_1 \ldots v_n$ mit dem gemeinsamen Nenner $h_m(v)$. Nun ist nach Satz 17 der kleinste gemeinsame Nenner von $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ das von ω freie Glied der Ranggleichung. Es muss also die Ranggleichung des Systems ein Theiler der Gleichung (5) sein; da letztere aber irreductibel ist, so ist die Ranggleichung mit ihr identisch.

Satz 25. *Die verschiedenen irreductibeln Theiler einer charakteristischen Gleichung eines Zahlensystems sind die Ranggleichungen der sämmtlichen das Zahlensystem begleitenden ursprünglichen Systeme.*

Denn da nach dem 21. Satze die Ranggleichung eines begleitenden Systems die Ranggleichung des gegebenen Zahlensystems theilt und letztere nach dem 16. Satze wiederum die charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems theilt, so wird jede Ranggleichung eines begleitenden ursprünglichen Systems Theiler der charakteristischen Gleichungen des gegebenen Systems sein. Andererseits erzeugt der lineare Coefficient jedes irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung ein begleitendes System, dessen Ranggleichung eben dieser irreductible Theiler ist und welches demnach ursprünglich ist. Es besitzt also auch eine charakteristische Gleichung eines Zahlensystems keine andern irreductibeln Theiler, als solche, die Ranggleichungen der begleitenden ursprünglichen Systeme sind.

Daneben ergeben sich die Corollare:

Corollar I. *Jeder irreductible Theiler einer charakteristischen Gleichung ist Theiler der andern charakteristischen Gleichung und der Ranggleichung.*

Corollar II. *Die Coefficienten einer charakteristischen Gleichung sind homogene rationale Functionen nur von den Parametern der Zahlen der begleitenden ursprünglichen Systeme.*

In der That ist jeder irreductible Theiler einer characteristischen Gleichung als Ranggleichung eines ursprünglichen Systems nur abhängig von den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems.

§ 7.

Die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems.

Um vollständige Kenntniss von den Eigenschaften der ursprünglichen Zahlensysteme zu erhalten, muss man die Killing'sche Gleichung derselben ebenfalls in Betracht ziehen.

Bezeichnet man der Kürze halber diejenige Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen Differenzen zwischen den Wurzeln einer andern Gleichung sind, als die Wurzeldifferenzengleichung der letzteren, so kann man zeigen:

Satz 26. *Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems, das nur ein einziges begleitendes ursprüngliches System besitzt, ist Potenz der Wurzeldifferenzengleichung der Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems.*

Ist die Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems

$$\omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0, \tag{1}$$

so ist die charakteristische Gleichung des gegebenen Zahlensystems Potenz dieser Gleichung und jede nicht verschwindende Wurzel der Killing'schen Gleichung nach Satz 18 Differenz zwischen Wurzeln der Gleichung (1). Nach dem Corollar desselben Satzes ist ferner die Killing'sche Gleichung des gegebenen Systems, abgesehen von den verschwindenden Wurzeln, Potenz der Wurzeldifferenzengleichung von (1). Es soll nun noch gezeigt werden, dass dies auch mit Rücksicht auf die verschwindenden Wurzeln statt hat.

Bildet man also die Wurzeldifferenzengleichung von (1):

$$\varrho^{m^2} - d_2 \varrho^{m^2-2} + \cdots = 0 \tag{2}$$

und entwickelt die Killing'sche Gleichung:

$$\left| \sum_i (a^i_{kl} - a^i_{lk}) u_i - \delta_{ik} \varrho \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n \tag{3}$$

nach Potenzen von ϱ in

$$\varrho^n - c_2 \varrho^{n-2} + \cdots = 0, \tag{4}$$

so ist der Quotient $c_2 : d_2$ eine ganze Zahl die anzeigt, wie oft jede nicht verschwindende Wurzel von (2) Wurzel von (4) ist. Der Coefficient d_2 der Gleichung (2) durch die Coefficienten der Gleichung (1) ausgedrückt, beträgt

$$d_2 = -2mh_2 + (m-1)h_1^2. \tag{5}$$

Durch dieselben Grössen muss sich der Coefficient c_2 der Killing'schen Gleichung ausdrücken lassen. Aus (3) findet man

$$2c_2 = \sum_{s,t,k,l} (a^s_{ik} - a^s_{ki})(a^t_{sl} - a^t_{ls})\, u_k u_l \qquad (s, t, k, l = 1 \ldots n)$$

und daraus

$$c_2 = \sum_{s,t,k,l} a^s_{ik} a^t_{sl}\, u_k u_l - \sum_{s,t,k,l} a^s_{ki} a^t_{sl}\, u_k u_l \qquad (s, t, k, l = 1 \ldots n). \tag{6}$$

Den Werth des ersten Theiles dieses Ausdrucks erhält man, wenn man in dem linearen Coefficienten der charakteristischen Gleichung u durch u^2 ersetzt; derselbe ist demnach

$$\frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2).$$

Was den zweiten Theil des Ausdrucks anlangt, so muss auch er durch h_1 und h_2 darstellbar sein, also nach dem Corollar II des Satzes 25 nur von den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems abhängen. Sein Werth erschliesst sich aus der Bemerkung, dass aus der Form

$$\sum_{s,t,l} a^s_{kt} a^t_{sl}\, u_l \qquad (s, t, l = 1 \ldots n) \tag{7}$$

durch die Substitution $u = vw$ eine Form mit Polareigenschaft hervorgeht und desgleichen aus der Form

$$\sum_{s,t,k} a^s_{kt} a^t_{sl}\, u_k \qquad (s, t, k = 1 \ldots n). \tag{7a}$$

Es ist also der zweite Theil des Ausdrucks (6) eine quadratische Form solcher Grössen, denen Formen mit Polareigenschaft entsprechen und die linear aus den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems gebildet sind. Die einzige solche Grösse ist aber h_1, und es wird demzufolge der zweite Theil von (6) τh_1^2 werden, wenn mit τ eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet wird. Es ist also:

$$c_2 = \frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2) + \tau h_1^2,$$

und da c_2 mit d_2 proportional sein muss, so ist $\tau = -\frac{1}{m^2}$ und

$$c_2 = \frac{n}{m^2} \cdot d_2. \tag{8}$$

Es ist also $\frac{n}{m^2}$ eine ganze Zahl und die Killing'sche Gleichung (4) ist die $\frac{n}{m^2}$ te Potenz der Wurzeldifferenzengleichung der Gleichung (1). Die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung ist dann durch $\frac{n}{m}$ gegeben. —

Handelt es sich nun darum, die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems aufzufinden, so braucht man nach dem eben bewiesenen Satze nur die Anzahl der verschwindenden Wurzeln derselben zu kennen. Mit Rücksicht darauf, dass ein ursprüngliches Zahlensystem aus einer Form mit Polareigenschaft erzeugt wird, kann man den 19. Satz heranziehen. Nach diesem Satz muss die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems der Anzahl der mit einer allgemein gewählten Zahl des Systems vertauschbaren Zahlen gleich sein. Diese Anzahl wird zufolge nachstehenden Satzes gefunden:

Satz 27. *In einem ursprünglichen Zahlensystem bilden die linear unabhängigen Potenzen der Zahl u das volle System linear unabhängiger mit u vertauschbarer Zahlen.*

Ist nämlich die Ranggleichung des ursprünglichen Systems, die nach dem 24. Satze irreductibel ist, die Gleichung:

$$\omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0, \tag{9}$$

so hat jede mit u vertauschbare Zahl v die beiden Relationen

$$\begin{aligned} v^m - h_1(v)\,.\quad v^{m-1} \quad + \cdots \pm h_m(v)\,.v^0 &= 0, \\ u^m v^m - h_1(uv).u^{m-1}v^{m-1} + \cdots \pm h_m(uv).v^0 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

zu befriedigen. Durch Anwendung des Verfahrens, das zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier rationaler Functionen dient, kann man aus diesen beiden Relationen eine dritte herleiten, die in v von möglichst geringem Grade ist. Bei Anwendung dieses Verfahrens aber kann man v wie eine gewöhnliche Grösse, u wie eine Wurzel der Ranggleichung behandeln. Setzt man noch in Stelle von v die Zahl $v^0 + \lambda v$ und ersetzt in den hierdurch umgeformten Relationen (10) die Potenzen von $v^0 + \lambda v$ durch die gleichhohen Potenzen einer gewöhnlichen Grösse x, die Potenzen von u durch die gleichhohen Potenzen einer Wurzel ω der Ranggleichung, so geht die beschriebene Aufgabe in die über, die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{aligned} x^m - h_1(v^0+\lambda v)\,x^{m-1} + \cdots \pm h_m(v^0+\lambda v) &= 0,\\ \omega^m x^m - h_1(u+\lambda uv)\,\omega^{m-1}x^{m-1} + \cdots \pm h_m(u+\lambda uv) &= 0 \end{aligned}$$

aufzufinden. Diese Gleichungen können aber nicht mehr als eine gemeinsame Wurzel haben, da sie für $\lambda = 0$ in

$$(11)\quad \begin{aligned} (x-1)^m &= 0,\\ \omega^m x^m - h_1(u)\,\omega^{m-1}x^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) &= 0 \end{aligned}$$

übergehen, und da wegen der Irreductibilität der Ranggleichung die zweite Gleichung (11) nur eine Wurzel $x = 1$ hat, Die gemeinsame Wurzel der Gleichungen (10) kann, da sie rational durch die Coefficienten beider Gleichungen dargestellt wird, in die Form

$$x = p_0 + p_1\omega + \cdots + p_{m-1}\omega^{m-1}$$

gebracht werden. Es ist also auch

$$(12)\quad v^0 + \lambda v = p_0 u^0 + p_1 u + \cdots + p_{m-1}u^{m-1},$$

womit der Satz, dass jede mit u vertauschbare Zahl als lineare Form der niedrigsten unabhängigen positiven Potenzen von u darstellbar ist, bewiesen ist.

Es ist danach mit Rücksicht auf den Satz 19 die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems gleich dem Grade der Ranggleichung des Zahlensystems; und unter Heranziehung des 26. Satzes folgt:

Satz 28. *Die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems ist die Wurzeldifferenzengleichung der Ranggleichung.*

Da ferner der Grad der Killing'schen Gleichung des Zahlensystems gleich der Anzahl der Grundzahlen des Zahlensystems ist, so folgt weiter:

Satz 29. *Die Anzahl der Grundzahlen eines ursprünglichen Zahlensystems ist gleich dem Quadrat des Grades der Ranggleichung.*

Es sind dann auch die charakteristischen Gleichungen des ursprünglichen Zahlensystems identisch mit der ersten Potenz der Ranggleichung.

§ 8.

Die Normalform des ursprünglichen Zahlensystems.

Es kommt nun darauf an, eine Normalform für die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems zu finden. Zu einer solchen gelangt man, ausgehend von den Lösungen der Gleichung

$$(1)\quad \omega \,.\, x = xu.$$

Zunächst sei das vorgelegte Zahlensystem ein ganz beliebiges. Damit die Gleichung (1) eine Lösung besitze, muss ω eine Wurzel

einer charakteristischen Gleichung sein. Verschwinden für diesen Werth von ω alle Unterdeterminanten der Determinante

$$\left|\sum_l a_{kl}^i u_l - \delta_{ik}\omega\right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

bis ausschliesslich zur r^{ten} Ordnung, so besitzt die Gleichung (1) r linear unabhängige Lösungen

$$x^{(1)} \ldots x^{(r)}. \tag{2}$$

Es bilden aber auch die Zahlen

$$vx^{(1)} \ldots vx^{(r)} \tag{3}$$

ein volles System linear unabhängiger Lösungen der Gleichung (1), müssen sich daher linear aus den Lösungen (2) zusammensetzen lassen in der Form

$$vx^{(i)} = \sum_k v_{ki} x^{(k)} \qquad (i, k = 1 \ldots r), \tag{4}$$

wo die Grössen v_{ki} lineare Formen von $v_1 \ldots v_n$ sind. Wird statt v das Product vw gesetzt, so ergiebt sich eine doppelte Darstellung der Lösungen von (1), nämlich:

$$vw\,x^{(i)} = \sum_k (vw)_{ki}\, x^{(k)} \qquad (i, k = 1 \ldots r) \tag{5}$$

und

$$vw\,x^{(i)} = \sum_{k,l} v_{ki} w_{li}\, x^{(k)} \qquad (i, k, l = 1 \ldots r), \tag{6}$$

woraus

$$(vw)_{ki} = \sum_l v_{kl} w_{li} \qquad (i, k, l = 1 \ldots r) \tag{7}$$

zu schliessen ist. Es können dann durch Wahl eines bestimmten Werthes von u die von u abhängigen Coefficienten der linearen Formen v_{ki} und w_{ki} constant gemacht werden. Dann bilden die linear unabhängigen unter den Formen v_{ik} die Parameter einer Zahl eines begleitenden Systems, dessen Productgleichungen die linear unabhängigen unter den Gleichungen (7) sind.

Es sei nun das vorgelegte Zahlensystem ein ursprüngliches mit m^2 Grundzahlen. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (1) kann dann nicht mehr als m betragen, da die charakteristische Gleichung je m gleiche Wurzeln hat; sie kann aber auch nicht weniger als m betragen, weil sonst aus den Gleichungen (7) die Existenz eines begleitenden Systems mit weniger als m^2 Grundzahlen folgen würde. Es ist also $r = m$. Wie die m^2 Formen v_{ki} aus den Parametern $v_1 \ldots v_n$ linear zusammengesetzt sind, so lassen sich umgekehrt die Parameter $v_1 \ldots v_n$ linear aus den v_{ki} zusammensetzen.

Es kann daher die Basis $e_1 \ldots e_n$ des ursprünglichen Zahlensystems durch eine Basis e_{ik} $(i,\ k = 1 \ldots m)$ ersetzt werden, so dass die Zahl x:

$$x = \sum_{i,k} x_{ik} e_{ik} \qquad (i,\ k = 1 \ldots m) \tag{8}$$

wird, und die Productgleichungen des Zahlensystems:

$$x'_{ik} = \sum_{l} x_{il} u_{lk} \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m). \tag{9}$$

Man hat also den Satz:

Satz 30. *Die Basis jedes ursprünglichen Zahlensystems von m^2 Grundzahlen kann so gewählt werden, dass die Productgleichungen die Gestalt*

$$x'_{ik} = \sum_{l} x_{il} u_{lk} \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

annehmen.

III. Abschnitt.

Zahlensysteme und zu ihnen gehörige Gruppen.

§ 1.

Beziehungen zur Theorie der Transformationsgruppen.

Nach Erledigung der ursprünglichen Zahlensysteme kann die Untersuchung der übrigen Zahlensysteme in Angriff genommen werden.

Es macht sich dabei sehr bald das Bedürfniss nach einer erweiterten Auffassung des Systems der Productgleichungen eines Zahlensystems geltend; man erzielt eine bedeutende Vereinfachung, wenn man sich von vornherein jetzt eine allgemeinere Aufgabe stellt, die der Theorie der Transformationsgruppen entspringt. Zuvörderst soll daher soviel als erforderlich über diejenigen Transformationsgruppen, die hier in Betracht kommen und über die Beziehung ihrer Theorie zur Theorie der Zahlensysteme berichtet werden.

Durch die m Gleichungen:

$$x_i' = \sum_{k} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m), \tag{1}$$

deren Coefficienten lineare Formen von n Parametern $u_1 \ldots u_n$ sind, wird eine Schaar linearer Transformationen der Grössen $x_1 \ldots x_m$ in $x_1' \ldots x_m'$ definirt. *Ergeben irgend zwei Transformationen der Schaar, nach einander ausgeführt*

$$x_i'' = \sum_l b_{il}(u)\, x_l' \qquad (i,\ l = 1 \ldots m),$$

$$x_l' = \sum_k b_{lk}(v)\, x_k \qquad (k,\ l = 1 \ldots m)$$

immer wieder eine Transformation der Schaar, so bilden sämmtliche Transformationen der Schaar eine Gruppe. Damit dies stattfinde, müssen n Grössen $v_1' \ldots v_n'$ auffindbar sein, die den Gleichungen

$$(2) \qquad b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

genügen. Es werden $x_1 \ldots x_m$ die Veränderlichen, $u_1 \ldots u_n$ die Parameter der Gruppe genannt.

Als wesentliche Bedingungen sind die beiden folgenden zu betrachten:

1) Die Grössen $b_{ik}(u)$ lassen sich nicht als lineare Formen von weniger als n Parametern darstellen.

2) Die Determinante $|b_{ik}(u)|$ verschwindet nicht identisch.

Der ersten dieser Bedingungen zufolge müssen sich $u_1 \ldots u_n$ aus den $b_{ik}(u)$ berechnen lassen. Es müssen sich also auch aus den Gleichungen (2) die Parameter $v_1' \ldots v_n'$ als bilineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ und $v_1 \ldots v_n$ berechnen lassen:

$$(3) \qquad v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i\, u_k\, v_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n).$$

Zwischen den constanten Coefficienten dieser Gleichungen müssen zufolge der identischen Gleichungen

$$\sum_{j,l} \big(b_{ij}(w) \cdot b_{jl}(u)\big) \cdot b_{lk}(v) = \sum_{j,l} b_{ij}(w) \cdot \big(b_{jl}(u)\, b_{lk}(v)\big)$$
$$(i,\ j,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

Beziehungen bestehen; dieselben sind, wie leicht ersichtlich, die folgenden

$$(4) \qquad \sum_s a_{sl}^i\, a_{jk}^s = \sum_s a_{js}^i\, a_{kl}^s \qquad (i,\ j,\ k,\ l,\ s = 1 \ldots n).$$

Setzt man für den Augenblick:

$$c_{ik}(u) = \sum_j a_{jk}^i\, u_j \qquad (i,\ k,\ j = 1 \ldots n)$$

und

$$u_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i\, w_k\, u_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n).$$

so folgt aus den Gleichungen (4):

$$(4a) \qquad c_{il}(u') = \sum_s c_{is}(w)\, c_{sl}(u) \qquad (i, l, s = 1 \ldots n).$$

Es definiren also auch die Gleichungen (3) eine Gruppe, deren Veränderliche $v_1 \ldots v_n$ sind: *die Parametergruppe der Gruppe* (1).

Die Bedingung, dass die Determinante $|b_{ik}(u)|$ nicht identisch verschwindet, verlangt die Auflösbarkeit der Gleichungen (1) nach $x_1 \ldots x_m$. Es sind daher auch die Gleichungen (2) im Allgemeinen sowohl nach den $b_{ik}(u)$, als auch nach den $b_{ik}(v)$ auflösbar. Da sich alsdann auch $u_1 \ldots u_n$ als rationale Functionen von $v_1' \ldots v_n'$ und $v_1 \ldots v_n$, oder $v_1 \ldots v_n$ als rationale Functionen von $v_1' \ldots v_n'$ und $u_1 \ldots u_n$ darstellen lassen, so müssen auch die Gleichungen (3) im Allgemeinen auflösbar sein, sowohl nach $u_1 \ldots u_n$, als auch nach $v_1 \ldots v_n$. Die Determinanten

$$(5) \qquad \left|\sum_l a_{kl}^i v_l\right| \text{ und } \left|\sum_l a_{lk}^i u_l\right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

dürfen daher nicht identisch verschwinden. Es wird dann auch eine Transformation der Gruppe mit den Parametern $(u^0)_1 \ldots (u^0)_n$ geben, die jedes Werthsystem der Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ in sich selbst transformirt, die *identische Transformation*. Die Gleichungen (3), deren Coefficienten den Bedingungen (4) genügen und für die die Determinanten (5) nicht identisch verschwinden, bilden das System der Productgleichungen eines Zahlensystems.

Es lässt sich also die Beziehung, in der die Gruppe (1) zu einem Zahlensystem steht, in folgende Worte fassen:

Satz 31. *Besitzen die Gleichungen einer Gruppe linearer und homogener Transformationen Coefficienten, die lineare Formen der Parameter sind, so bilden die Gleichungen der ihr zugehörigen Parametergruppe das System der Productgleichungen eines Zahlensystems.*

Die Gruppen der hier betrachteten besondern Art sollen *zu Zahlensystemen gehörige Gruppen* genannt werden. Jedem Werthsystem $u_1 \ldots u_n$ der Parameter der Gruppe entspricht eine Zahl u des Zahlensystems; und zwar erhält man, wenn nach einer Transformation mit den Parametern $v_1 \ldots v_n$ eine Transformation mit den Parametern $u_1 \ldots u_n$ ausgeführt wird, eine Transformation, deren Parameterwerthe dem Producte der Zahlen u und v entsprechen. Der identischen Transformation der Gruppe entspricht die durch den Satz 1 definirte Zahl u^0. —

Man kann dem Satze des vorigen Paragraphen, von dem durch das bisherige bezeichneten Gesichtspunkte aus, die Fassung geben:

Satz 32. *Die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems mit m^2 Grundzahlen sind die Gleichungen der Parameter-*

gruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe von m Veränderlichen.

Als allgemeine lineare homogene Gruppe wird eine Gruppe:

$$x_i' = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{6}$$

bezeichnet, deren Coefficienten sämmtlich von einander unabhängig sind. Die Gleichungen der Parametergruppe derselben sind:

$$v_{ik}' = \sum_l u_{il} v_{lk} \qquad (i, k, l = 1 \ldots m), \tag{7}$$

und diese sind gleichzeitig die Productgleichungen eines in der Normalform vorliegenden ursprünglichen Zahlensystems von m^2 Grundzahlen. —

Es sei an dieser Stelle noch der später gelegentlich zur Verwendung kommende Begriff einer Untergruppe, soweit letztere zu einem Zahlensystem gehört, besprochen.

Werden die Parameter einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{8}$$

linearen Transformationen unterworfen, so entspricht jeder solchen eine Aenderung der Basis des zugehörigen Zahlensystems. Es kann nun eintreten, dass die Parameter $u_1 \ldots u_r$, $u_{r+1} \ldots u_n$ der Gruppe sich so wählen lassen, dass vermöge der Gleichungen der Parametergruppe

$$v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

wenn

$$u_{r+1} = \cdots = u_n = 0$$

und

$$v_{r+1} = \cdots = v_n = 0$$

gesetzt wird, auch

$$v_{r+1}' = \cdots = v_n' = 0$$

wird. Das Nullsetzen der Grössen $u_{r+1} \ldots u_n$ mag in den Coefficienten der Gruppe (8) dadurch angedeutet werden, dass in ihnen u durch u ersetzt wird. Verschwindet nun die Determinante

$$|b_{ik}(u)| \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

nicht identisch, so bilden die Gleichungen

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{9}$$

die Gleichungen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe. Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichungen (9) alle hierzu erforderlichen

Eigenschaften aufweisen. Es wird dann *die Gruppe* (9) *eine Untergruppe der Gruppe* (8) genannt, und zwar eine zu einem Zahlensystem gehörige Untergruppe. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in m Veränderlichen Untergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe in m Veränderlichen ist.

§ 2.

Begleitende Gruppen.

Die nähere Untersuchung der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen stützt sich hauptsächlich auf den Begriff der begleitenden Gruppen.

Lassen sich die Veränderlichen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe so wählen, dass die Gleichungen der Gruppe die Gestalt

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_k b_{p+i,k}(u)\, x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m-p \\ k = 1 \ldots m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten, so definiren die p ersten dieser Gleichungen ebenfalls eine Gruppe. Die Bedingungen hierfür, nämlich die Existenz eines Gleichungensystems

$$(2)\qquad b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots p)$$

und die Auflösbarkeit der p Gleichungen nach $x_1 \ldots x_p$ sind bereits unter den Bedingungen der Gruppeneigenschaft von (1) enthalten. *Es soll die so erhaltene Gruppe eine die Gruppe* (1) *begleitende Gruppe genannt werden.* Ebenso zeigt sich, dass auch die Gleichungen

$$(3)\qquad x_{p+i}' = \sum_k b_{p+i,p+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i,\ k = 1 \ldots m-p)$$

eine Gruppe definiren. Dieselbe soll als *eine Nebengruppe der Gruppe* (1) bezeichnet werden.

Durch einen, der Erzeugung begleitender Zahlensysteme analogen, Process lassen sich begleitende Gruppen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe auffinden.

Bildet man eine lineare Form der abhängigen Veränderlichen der, in allgemeiner Form vorgelegten, Gruppe

$$(4)\qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

so ist diese eine bilineare Form der unabhängigen Veränderlichen und der Parameter:

$$(5) \qquad \sum_i \alpha_i x_i' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m).$$

Definirt man die Parameter $u_1' \ldots u_n'$ durch die Gleichungen

$$b_{ik}(u') = \sum_l b_{il}(w)\, b_{lk}(u) \qquad (i, k, l = 1 \ldots m)$$

und trägt sie in die Gleichung (5) ein, so geht letztere mit Rücksicht auf (4) in

$$(6) \qquad \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w)\, x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u')\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

über. Aus dieser Gleichung wird eine begleitende Gruppe von (4) auf folgendem Wege gefunden. Lassen sich die m Formen

$$\sum_i \alpha_i b_{ik}(u) \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

durch p unabhängige lineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ linear darstellen, etwa durch $\beta_1(u) \ldots \beta_p(u)$, so wird aus (6):

$$(7) \qquad \sum_j \beta_j(w)\, z_j' = \sum_j \beta_j(u')\, z_j \qquad (j = 1 \ldots m)$$

wo $z_1 \ldots z_p$ lineare Formen von $x_1 \ldots x_m$ sind. Durch lineare Transformation der Veränderlichen der Gruppe kann übrigens erreicht werden, dass diese Formen gerade gleich $x_1 \ldots x_p$ werden, so dass aus (7)

$$(8) \qquad \sum_j \beta_j(w)\, x_j' = \sum_j \beta_j(u')\, x_j \qquad (j = 1 \ldots m)$$

hervorgeht. Es lassen sich dann $w_1 \ldots w_n$ so wählen, dass alle Grössen $\beta_1(w) \ldots \beta_p(w)$ bis auf $\beta_i(w)$ verschwinden. Lässt man i die Zahlen $1 \ldots p$ durchlaufen und beachtet, dass die Grössen $\beta_j(u')$ lineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ werden, so folgt aus (8) das Gleichungensystem

$$(9) \qquad x_i' = \sum b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p),$$

durch welches eine begleitende Gruppe von (4) definirt wird. Bezeichnet man diese Herleitung einer begleitenden Gruppe als Erzeugung derselben aus einer Form, so kann man sagen:

Satz 33. *Lässt sich eine lineare Form der abhängigen Veränderlichen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe als bilineare Form von p unabhängigen linearen Formen der Parameter und also auch von p unabhängigen linearen Formen der unabhängigen Veränderlichen*

darstellen, so erzeugt sie eine Gruppe in p Veränderlichen, die die gegebene Gruppe begleitet.

Die Analogie mit dem Satze 7 fällt in die Augen. Uebrigens ist die Identität der gegebenen Gruppe mit der begleitenden Gruppe nicht ausgeschlossen. Ferner hat man in Analogie des Satzes 8 den Satz:

Satz 34. *Jede erzeugende Form einer begleitenden Gruppe ist lineare Form der Veränderlichen der begleitenden Gruppe.*

Denn die Gleichung (8) ist nur eine andere Form der Gleichung (6); es ist also:

$$\sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w)\, x_k' = \sum \beta_j(w)\, x_j' \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots p \end{pmatrix}$$

und wenn für $w_1 \ldots w_n$ die Parameter der identischen Transformation gesetzt werden, so folgt hieraus:

$$\sum_{i} \alpha_i x_i' = \sum_{j} \beta_j(u^0)\, x_j' \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots p \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

§ 3.

Transitivität und Intransitivität.

Es machen sich, wie bei ähnlichen Untersuchungen, so auch hier die Unterschiede zwischen transitiven und intransitiven Gruppen geltend; doch gelingt es die Behandlung letzterer auf die ersterer zurückzuführen.

Eine Gruppe heisst transitiv, wenn es im Allgemeinen möglich ist, vermittelst einer Transformation derselben ein beliebig vorgegebenes Werthsystem der Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ in ein anderes beliebig vorgegebenes Werthsystem $x_1' \ldots x_m'$ überzuführen; sie heisst intransitiv, wenn dies im Allgemeinen nicht möglich ist.

Es ist danach eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe

$$x_i' = \sum_{k} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{1}$$

transitiv, wenn $x_1' \ldots x_m'$ als lineare Formen blos von $u_1 \ldots u_n$ betrachtet, von einander unabhängig sind; sie ist intransitiv, wenn $x_1' \ldots x_m'$ durch weniger als m Formen von $u_1 \ldots u_n$, etwa $m - p$ unabhängige, linear sich darstellen lassen. —

Um dieser Frage näher zu treten, kann man die in folgender Weise aus der Gruppe (1) derivirte Gruppe benutzen.

Es seien $c_1 \ldots c_m$ m veränderliche Grössen, die bei jeder linearen

Transformation von $x_1 \ldots x_m$ in $x_1' \ldots x_m'$ sich derart in $c_1' \ldots c_m'$ transformiren, dass

$$\sum_i c_i x_i = \sum_i c_i' x_i' \qquad (i = 1 \ldots m)$$

wird. Unterwirft man also die Grössen $x_1 \ldots x_m$ einer Transformation der Gruppe (1), so unterliegen die Grössen $c_1 \ldots c_m$ der Transformation

$$c_k = \sum_i b_{ik}(u)\, c_i' \qquad (i,\ k = 1 \ldots m). \tag{2}$$

Die durch die Gleichungen (2) definirte Gruppe mag *die zur Gruppe* (1) *conjugirte Gruppe* genannt werden.

Man sieht sofort ein, dass, falls die Gruppe (1) eine begleitende Gruppe besitzt, auch ihre conjugirte Gruppe eine solche besitzt; und zwar wird die conjugirte Gruppe der begleitenden Gruppe Nebengruppe an der conjugirten Gruppe, während die conjugirte der Nebengruppe begleitende Gruppe der conjugirten Gruppe wird. Das über die Erzeugung begleitender Gruppen aus linearen Formen der Veränderlichen Gesagte findet auch auf die conjugirte Gruppe Anwendung.

Man kann nunmehr zeigen:

Satz 35. *Jede intransitive zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe besitzt eine transitive begleitende Gruppe.*

Ist nämlich die Gruppe:

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

intransitiv, so sind die m Formen von $u_1 \ldots u_n$:

$$\sum_k b_{ik}(u)\, \alpha_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

wie auch $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ gewählt sein mögen, nicht unabhängig von einander, sondern durch weniger als m, etwa $m - p$ lineare unabhängige Formen von $u_1 \ldots u_n$ linear darstellbar. Dann muss nach dem 33. Satze die lineare Form der Veränderlichen der conjugirten Gruppe

$$\sum_k \alpha_k c_k = \sum_{i,k} \alpha_k\, b_{ik}(u)\, c_i' \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

eine begleitende Gruppe der letztern in $m - p$ Veränderlichen erzeugen; es besitzt also auch die gegebene Gruppe eine begleitende Gruppe und zwar in p Veränderlichen. Eine intransitive Gruppe besitzt also stets eine nicht mit ihr identische begleitende Gruppe. Da nun jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe von einer solchen Gruppe begleitet wird, die selbst keine weitere begleitende Gruppe

besitzt, so kann letztere jedenfalls nicht intransitiv sein und es besitzt somit jede zu einem Zahlensystem gehörige intransitive Gruppe eine begleitende transitive Gruppe. —

Es ist bereits oben die Parametergruppe

$$(3) \qquad v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe ihren Eigenschaften nach in einer Weise dargestellt worden, die hier zu Statten kommt. Die Gleichungen (3) als Productgleichungen eines Zahlensystems unterliegen linearen Transformationen nur in der Weise, dass jede lineare Transformation auf alle drei Reihen von Parametern gleichzeitig ausgeführt werden muss. Sieht man jedoch die Gleichungen (3) als Gleichungen einer Gruppe mit den Veränderlichen $v_1 \ldots v_n$ an, so sind $u_1 \ldots u_n$ die Parameter der Gruppe; lineare Transformationen der Veränderlichen der Gruppe sind dann solche, die gleichzeitig blos auf die Grössen $v_1 \ldots v_n$ und $v_1' \ldots v_n'$ ausgeführt werden. Fasst man die Parametergruppe in diesem Sinne, so besteht der Satz:

Satz 36. *Jede transitive zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe lässt sich als begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe auffassen.*

Denn ist die Gruppe

$$(4) \qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

transitiv, so lassen sich m Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ so wählen, dass die m Grössen

$$z_i = \sum_k b_{ik}(v)\, \alpha_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

von einander unabhängige lineare Formen von $v_1 \ldots v_n$ sind. Setzt man dann:

$$z_i' = \sum_k b_{ik}(v')\, \alpha_k \qquad (i, k = 1 \ldots m),$$

indem man $v_1' \ldots v_n'$ durch die Gleichungen der Parametergruppe, oder was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \qquad (i, k, l = 1 \ldots m)$$

definirt, so wird

$$(5) \qquad z_i' = \sum b_{ik}(u)\, z_k \qquad (i, k = 1 \ldots m).$$

Man kann nun offenbar die Gruppe (4) durch die ihr an Gestalt gleiche Gruppe (5) ersetzen. Letztere ist aber eine begleitende Gruppe der Parametergruppe von (4), da ihre Veränderlichen unabhängige lineare Formen der Veränderlichen der Parametergruppe sind. —

Der Vortheil, der aus dieser Betrachtung erwächst, liegt darin, dass zur weitern Untersuchung der Gruppen diejenigen Eigenschaften ihrer Parametergruppen, die durch die Untersuchung der Zahlensysteme bis jetzt bekannt sind, herangezogen werden können.

§ 4.

Die ursprünglichen Gruppen.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Eigenschaften derjenigen zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen festzustellen, die ausser sich selbst keine begleitende Gruppen besitzen.

Die allgemeine lineare und homogene Gruppe

$$x_i' = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p) \tag{1}$$

besitzt jedenfalls keine begleitende Gruppe, da ihre Coefficienten von einander unabhängig sind. *Sie möge, der Kürze wegen, eine ursprüngliche Gruppe genannt werden*, mit Hindeutung auf ihre Zugehörigkeit zu einem ursprünglichen Zahlensystem. Es wird sich erweisen, dass diese die einzige Gruppe ist, die keine begleitende Gruppe besitzt.

Zunächst, als Vorbereitung, sei bewiesen:

Satz 37. *Jede Gruppe, deren Parametergruppe aus den Productgleichungen mehrer ursprünglicher Zahlensysteme gebildet wird, wird von einer zu einem ursprünglichen Zahlensystem gehörigen Gruppe begleitet.*

Es sei die Parametergruppe einer solchen Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{2}$$

durch

$$v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r), \tag{3}$$

$$v_{r+i}' = \sum_{k,l} a_{r+k\,r+l}^{r+i} u_{r+k} v_{r+l} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n-r)$$

gegeben, so dass die r ersten Gleichungen die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems bilden, die übrigen Gleichungen aber von den in den ersten Gleichungen vorkommenden Parametern frei sind, wie entsprechend dem Corollar des Satzes 5 nach den Auseinandersetzungen des 4. Paragraphen im ersten Abschnitt geschehen kann. Bildet man nun, wie im 2. Paragraphen dieses Abschnitts, die daselbst mit (6) bezeichnete, eine begleitende Gruppe erzeugende, Gleichung .

$$(4) \qquad \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w) x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u') x_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

und ordnet sie nach den Parametern:

$$(5) \qquad \sum_{i} w_i \gamma_i(x') = \sum_{i} u_i' \gamma_i(x) \qquad (i = 1 \ldots m),$$

so sind zunächst wegen der Form der Gleichungen (3) $u_1' \ldots u_r'$ nur von $w_1 \ldots w_r$ und $u_1 \ldots u_r$ abhängig, die übrigen Parameter $u_{r+1}' \ldots u_n'$ von diesen aber unabhängig und es werden demgemäss $\gamma_1(x') \ldots \gamma_r(x')$ bilineare Formen nur von $\gamma_1(x) \ldots \gamma_r(x)$ und $u_1 \ldots u_r$. Da somit jede lineare Form von $\gamma_1(x') \ldots \gamma_r(x')$ nur von $u_1 \ldots u_r$ abhängig sein kann, so wird eine aus einer solchen Form erzeugte Gruppe nur $u_1 \ldots u_r$ zu Parametern haben, also zu einem ursprünglichen Zahlensystem gehören; denn es sind $u_1 \ldots u_r$ Parameter einer Zahl eines ursprünglichen Zahlensystems. Selbstredend ist bei diesem Beweise vorausgesetzt worden, dass $\gamma_1(x) \ldots \gamma_r(x)$ nicht sämmtlich vermöge der Wahl von $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ verschwinden. Es liegt zudem in dieser Voraussetzung keine Beschränkung.

Weiter ist zu zeigen:

Satz 38. *Jede zu einem ursprünglichen Zahlensystem mit p^2 Grundzahlen gehörige Gruppe wird von einer ursprünglichen Gruppe in p Veränderlichen begleitet.*

Es sei die gegebene Gruppe

$$(6) \qquad x_i' = \sum_{k} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

und ihre Parametergruppe liege in ihrer Normalform

$$(7) \qquad v_{gh}' = \sum_{j} u_{gj} v_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \ldots p)$$

vor, die zugleich die Normalform der Productgleichungen des ursprünglichen Zahlensystems ist. Zieht man behufs Erzeugung einer begleitenden Gruppe die Gleichung (5) heran, hier wegen veränderter Indexbezeichung von der Form

$$(8) \qquad \sum_{g,h} w_{gh} \gamma_{gh}(x') = \sum_{g,h} u_{gh}' \gamma_{gh}(x) \qquad (g, h = 1 \ldots p),$$

so ergiebt sich aus ihr wegen

$$u_{gh}' = \sum_{j} w_{gj} u_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \ldots p)$$

durch Vergleichung der Coefficienten der Grössen w_{gh}:

$$(9) \qquad \gamma_{gh}(x') = \sum_j u_{hj}\gamma_{gj}(x) \qquad (g, h, j = 1 \ldots p).$$

Durch lineare Transformation der Veränderlichen der Gruppe (6) kann erreicht werden, dass für einen bestimmten Werth von g die Formen $\gamma_{g1}(x) \ldots \gamma_{gp}(x)$ gerade den Grössen $x_1 \ldots x_p$ gleich werden; es sind dann unter den Gleichungen (9) auch die Gleichungen

$$(10) \qquad x_g' = \sum_j u_{gj} x_j \qquad (g, j = 1 \ldots p)$$

enthalten, und durch diese wird eine begleitende ursprüngliche Gruppe von (6) definirt.

Aus dem Beweisgange lässt sich ausserdem noch schliessen:

Corollar. *Gehören zwei ursprüngliche Gruppen zu einem und demselben ursprünglichen Zahlensystem, so kann erreicht werden, dass die entsprechenden Coefficienten in beiden Gruppen gleich werden.*

Auf Grund der beiden letzten Sätze lässt sich auch die Richtigkeit des allgemeinen Satzes zeigen:

Satz 39. *Jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe wird von einer ursprünglichen Gruppe begleitet.*

Nach den Sätzen 35 und 36 wird jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe von einer Gruppe begleitet, die sich ihrerseits als eine begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe betrachten lässt. Man kann daher zum Beweise des Satzes von einer beliebigen begleitenden Gruppe der Parametergruppe ausgehen und zeigen, dass jede solche von einer ursprünglichen Gruppe begleitet wird.

Die Gleichungen der Parametergruppe als Productgleichungen eines Zahlensystems lassen sich so ordnen, dass die r ersten unter ihnen die Productgleichungen aller begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme werden

$$(11) \qquad \begin{aligned} v_i' &= \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r), \\ v_{r+i}' &= \sum_{k,l} a_{kl}^{r+i} u_k v_l \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n - r \\ k, l = 1 \ldots n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ist eine solche Anordnung getroffen, so darf keine lineare Form von $v_1' \ldots v_n'$ unabhängig von $v_1 \ldots v_r$ sein. Denn nach dem zweiten Corollar des Satzes 25 ist die Determinante

$$\left| \sum_l a_{kl}^i v_l \right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

als von ω freies Glied einer charakteristischen Gleichung des Zahlensystems (11), eine Form nur von $v_1 \ldots v_r$. Wäre nun eine lineare

Form von $v_1' \ldots v_n'$ unabhängig von $v_1 \ldots v_r$, so müsste diese Determinante, nach einem bekannten Satze, für $v_{r+1} = \cdots = v_n = 0$, also auch identisch verschwinden. Letzteres aber darf keinesfalls geschehen.

Es sei nun durch

$$z_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, z_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{12}$$

eine begleitende Gruppe der Parametergruppe (11) gegeben. Jede lineare Form ihrer Veränderlichen $z_1' \ldots z_n'$ ist lineare Form von $v_1' \ldots v_n'$ und lässt sich durch

$$\sum_i \alpha_i v_i = \sum_{i,k,l} \alpha_i a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \tag{13}$$

wiedergeben. Die Coefficienten von $u_1 \ldots u_n$ auf der rechten Seite dieser Gleichung sind lineare Formen von $z_1 \ldots z_m$ und, als gleichzeitige Formen von $v_1 \ldots v_n$, nach dem eben gezeigten von $v_1 \ldots v_r$ abhängig. Dann muss eine lineare Form von $z_1 \ldots z_m$ existiren, die nur aus $v_1 \ldots v_r$ gebildet ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so wären $z_1 \ldots z_m$ darstellbar als linear unabhängige Formen von $v_{r+1} \ldots v_n$, die um lineare Formen von $v_1 \ldots v_r$ vermehrt sind. Da man aber, ohne die Voraussetzungen über die Form der Gleichungen (11) zu tangiren, $v_{r+1} \ldots v_n$ um beliebige Formen von $v_1 \ldots, v_r$ vermehren kann, so hätte man es in der Hand $z_1 \ldots z_m$ zu blossen Formen von $v_{r+1} \ldots v_n$ zu machen. Da dies nun nicht angeht, so muss irgend eine Form von $z_1 \ldots z_m$ als lineare Form von $v_1 \ldots v_r$ darstellbar sein.

Eine solche Form

$$\sum_i \beta_i v_i' = \sum_{i,k,l} \beta_i a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r) \tag{14}$$

wird eine begleitende Gruppe von (12) erzeugen. Da aber die erzeugende Form nur die Parameter $u_1 \ldots u_r$ enthält, so wird die Parametergruppe der erzeugten Gruppe nur von den r ersten Gleichungen (11) gebildet werden, also aus den Productgleichungen mehrer ursprünglicher Zahlensysteme gebildet sein. Eine Gruppe solcher Art wird nach dem 37. Satze von einer zu einem ursprünglichen Zahlensysteme gehörigen Gruppe, und eine solche nach dem 38. Satze von einer ursprünglichen Gruppe begleitet.

Es wird also auch jede Gruppe, die sich als begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe betrachten lässt, von einer ursprünglichen Gruppe begleitet und folglich, nach den bereits oben angezogenen Sätzen 35 und 36. überhaupt jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe.

— Was die Auffindung einer begleitenden ursprünglichen Gruppe an einer gegebenen Gruppe anlangt, so ist diese leicht auszuführen. Man bildet von den Gleichungen der gegebenen Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{15}$$

ausgehend, die lineare Form der Veränderlichen

$$\sum_i \alpha_i x_i' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{16}$$

und bestimmt $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ so, dass in dieser Form nur noch die Parameter einer Zahl eines einzigen begleitenden ursprünglichen Zahlensystems des zur Gruppe gehörigen Zahlensystems vorkommen; dies ist möglich zufolge dem eben bewiesenen Satze.

Dann erzeugt die Form (16), wenn das zum Beweise des 38. Satzes angewandte Verfahren eingehalten wird, eine begleitende ursprüngliche Gruppe der Gruppe (15). —

§ 5.

Untersuchung einer besondern Gruppe.

Um in den weitern allgemeinen Untersuchungen, die sich an den vorigen Paragraphen anschliessen, keine Unterbrechung durch Beweise einiger nothwendiger specieller Sätze eintreten zu lassen, soll hier die Untersuchung einer besondern Gruppe eingeschaltet werden.

Es handelt sich um die Gruppe

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u)\, x_k && (i = 1 \ldots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_{k=1}^{p} b_{p+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+i\,p+k}(u)\, x_k && (i = 1 \ldots m-p), \end{aligned} \tag{1}$$

deren begleitende Gruppe und deren Nebengruppe (siehe § 2) ursprünglich sind, und zwar insbesondere um die Eigenschaften der Coefficienten $b_{p+i\,k}(u)$.

Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die Coefficienten $b_{p+i\,k}(u)$ sich linear durch die übrigen Coefficienten ausdrücken lassen: eine Annahme, auf die nachher jede andre Bedingung, der diese Coefficienten unterworfen sein können, zurückgeführt werden wird.

Dann kann durch Hinzufügung linearer Formen von $x_1 \ldots x_p$ zu $x_{p+1} \ldots x_m$ erreicht werden, dass die Gruppe (1) die Gestalt:

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_k b_{ik}(u)\, x_k && (i, k = 1 \ldots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_k b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} && (i, k = 1 \ldots m-p) \end{aligned}$$

erhält. Dies ist ein Specialfall folgenden Satzes:

Satz 40. *Die Veränderlichen einer Gruppe, deren Parametergruppe von den Productgleichungen einer oder mehrer ursprünglichen Zahlensysteme gebildet wird, können so gewählt werden, dass sich die Gruppe als ein System von ursprünglichen Gruppen darstellt.*

Vorausgesetzt, eine solche Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{2}$$

besitze bereits eine begleitende Gruppe von der verlangten Form, so muss gezeigt werden, dass sie ausser dieser noch eine begleitende ursprüngliche Gruppe besitzt. Die Veränderlichen der bekannten begleitenden Gruppe seien $x_1 \ldots x_q$, die Parametergruppe sei so geordnet, dass die Productgleichungen jedes ursprünglichen Zahlensystems gesondert auftreten.

Bildet man dann die Gleichung

$$\sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u) x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u') x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{3}$$

so, dass $\alpha_{q+1} \ldots \alpha_m$ nicht sämmtlich verschwinden, und ordnet sie nach den Parametern, so muss irgend ein Parameter mit einer linearen Form von $x_1 \ldots x_m$ multiplicirt sein, die nicht blos aus $x_1 \ldots x_q$ gebildet ist. Nach der Anordnung der Parametergruppe ist dieser Parameter zugleich ein Parameter einer Zahl eines der ursprünglichen Zahlensysteme, etwa des Systems:

$$v_{gh}' = \sum_j u_{gj} v_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \ldots p).$$

Dann lässt sich die Gleichung (3) in der Form

$$\sum_{g,h} w_{gh} \gamma_{gh}(x') + \cdots = \sum_{g,h,j} w_{gj} u_{jh} \gamma_{gh}(x) + \cdots \qquad (g, h, j = 1 \ldots p)$$

schreiben, und durch Vergleichung der Coefficienten kommt:

$$\gamma_{gh}(x') = \sum_j u_{hj} \gamma_{gj}(x) \qquad (g, h, j = 1 \ldots p). \tag{4}$$

Da irgend eine der Formen $\gamma_{gh}(x)$ nicht blos von $x_1 \ldots x_q$ abhängt, so wird auch irgend eine der p ursprünglichen Gruppen (4) die bekannte begleitende Gruppe von (2) nicht begleiten; da sie ursprünglich ist, wird auch keine lineare Relation zwischen ihren Veränderlichen und $x_1 \ldots x_q$ bestehen, da sie sonst eine begleitende Gruppe mit der bekannten begleitenden Gruppe gemein hätte; es besitzt also thatsächlich die Gruppe (2) ausser der bekannten begleitenden Gruppe noch eine weitere begleitende ursprüngliche Gruppe und damit ist

zugleich gezeigt, dass sie sich als System ursprünglicher Gruppen darstellen lässt.

Insbesondere lässt sich also auch die Gruppe (1), wenn ihre Parametergruppe aus den Productgleichungen eines oder zweier ursprünglichen Zahlensysteme gebildet wird, durch zwei ursprüngliche Gruppen darstellen; zudem ist gezeigt, wie ausser der bekannten begleitenden Gruppe die zweite begleitende Gruppe gefunden wird.

Weiter ist zu zeigen:

Satz 41. *In der Gruppe:*

$$x_i' = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u) x_k \qquad (i = 1 \ldots p),$$

$$x_{p+i}' = \sum_{k=1}^{p} b_{p+ik}(u) x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+ip+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i = 1 \ldots m-p)$$

deren begleitende Gruppe und deren Nebengruppe ursprünglich sind, sind die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ entweder unter einander und von den übrigen Coefficienten linear unabhängig, oder sie sind sämmtlich lineare Formen der übrigen Coefficienten.

Die allgemeinste lineare Relation, der die Grössen $b_{p+ik}(u)$ unterworfen sein können, ist von der Form

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} b_{p+ik}(u) = f(u), \tag{5}$$

wo $f(u)$ eine lineare Form der Coefficienten $b_{ik}(u)$ und $b_{p+ip+k}(u)$ bedeutet. Ersetzt man in dieser Gleichung entsprechend den Gleichungen der Parametergruppe

$$b_{ik}(v') = \sum_{l} b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \quad (i, k, l = 1 \ldots m)$$

die Parameter $u_1 \ldots u_m$ durch $v_1' \ldots v_m'$, so entsteht aus ihr die Gleichung:

$$\sum_{i,k,l} \alpha_{ik} b_{p+il}(u)\, b_{lk}(v) + \sum_{i,k,j} \alpha_{ik} b_{p+ip+j}(u)\, b_{p+jk}(v) = f(v')$$
$$\begin{pmatrix} i, j = 1 \ldots m-p \\ k, l = 1 \ldots p \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier für die Grössen $b_{p+jk}(v)$ ihre Werthe, ausgedrückt durch die $b_{ik}(v)$, die $b_{p+ip+k}(v)$ und die übrigen Parameter der Gruppe, und vergleicht dann die Coefficienten von $b_{ik}(v)$, so erhält man das System der Gleichungen

$$(6) \qquad \sum_i \alpha_{ik} b_{p+il}(u) = f_i^{(k)}(u) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m-p \\ k, l = 1 \ldots p \end{pmatrix},$$

wo durch $f_i^{(k)}(u)$ wiederum lineare Formen der $b_{ik}(u)$ und der $b_{p+ip+k}(u)$ bezeichnet sind. In derselben Weise die Coefficienten der Grössen $b_{p+ip+j}(u)$ vergleichend, erhält man die Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_k \alpha_{ik}\, b_{p+jk}(v) = \varphi_j^{(i)}(v) \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1 \ldots m-p \\ k = 1 \ldots p \end{pmatrix}.$$

Aus jeder Relation (5) folgt also ein System von Relationen der Form (6) und eines der Form (7); die Relationen (6) enthalten nur Grössen $b_{p+ik}(u)$ von gleichem zweiten Index, die Relationen (7) solche von gleichem ersten Index. Die linke Seite jeder Relation geht in die linke Seite einer andern Relation über, wenn man den festen Index durch einen andern ersetzt.

Legt man also ein System von Relationen der Form (6):

$$\sum_i \alpha_i b_{p+ik}(u) = f_k(u) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m-p \\ k = 1 \ldots p \end{pmatrix}$$

derjenigen Betrachtung zu Grunde, durch die die Relationen (7) aus (5) abgeleitet werden, so erhält man ein System von Relationen, in denen beide Indices der $b_{p+ik}(u)$ fest sind, also Relationen der Form:

$$(8) \qquad b_{p+ik}(u) = f_{ik}(u) \qquad (i = 1 \ldots m-p;\ k = 1 \ldots p),$$

wo die Grössen $f_{ik}(u)$ ebenfalls lineare Formen der $b_{p+ip+k}(u)$ und der $b_{ik}(u)$ bedeuten. Es versteht sich von selbst, dass die rechten Seiten der Gleichungen (5)—(8) sämmtlich oder zum Theil verschwinden können. Es sind also unter Voraussetzung einer linearen Relation der Form (5) alle Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ lineare Formen der übrigen Coefficienten.

Hält man diesen Satz mit dem vorhergehenden Satz zusammen, so sieht man, dass in der Gruppe (1) entweder die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ von einander und von den übrigen unabhängig sind, oder aber die Veränderlichen der Gruppe so gewählt werden können, dass diese Coefficienten sämmtlich verschwinden. Einen andern Ausdruck erhält dies Resultat, wenn der im Schluss des ersten Paragraphen dieses Abschnittes erörterte Begriff der Untergruppe herangezogen wird. Da die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ unabhängig sind, so können sie zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass die übrigen Coefficienten dadurch tangirt werden und es wird durch dies ihr Verschwinden eine Untergruppe der Gruppe (1) definirt. Man hat also:

Satz 42. *Die Veränderlichen der Gruppe*

$$x_i' = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i = 1 \ldots p),$$

$$x_{p+i}' = \sum_{k=1}^{p} b_{p+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i = 1 \ldots m-p)$$

mit ursprünglicher begleitender und ursprünglicher Nebengruppe können so gewählt werden, dass die Gruppe die Untergruppe

$$x_i' = \sum_{k} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p),$$

$$x_{p+i}' = \sum_{k} b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i, k = 1 \ldots m-p)$$

besitzt.

In diesen Satz ist auch der Fall mit eingeschlossen, dass die Gruppe mit ihrer Untergruppe identisch ist.

§ 6.

Die Normalform der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen.

Am Schluss des vierten Paragraphen ist gezeigt worden, wie eine begleitende ursprüngliche Gruppe bei einer gegebenen Gruppe gefunden wird. Ist eine solche gefunden, so kann die gegebene Gruppe in die Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k} b_{ik}(u)\, x_k && (i, k = 1 \ldots p_1), \\ x_{p_1+i}' &= \sum_{k} b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k && \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m - p_1 \\ k = 1 \ldots m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gebracht werden, so dass die p_1 ersten Gleichungen die begleitende ursprüngliche Gruppe wiedergeben. Sucht man dann an der zugehörigen Nebengruppe

$$x_{p_1+i}' = \sum_{k} b_{p_1+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} \qquad (i, k = 1 \ldots m - p_1)$$

eine begleitende ursprüngliche Gruppe auf und führt diejenige Transformation aus, durch die die Gleichungen letzterer zu den $p_2 - p_1$ ersten Gleichungen der Nebengruppe gemacht werden, so wird durch diese Transformation die Gruppe (1) in die Form

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p_1),$$

$$x'_{p_1+i} = \sum_k b_{p_1+ik}(u)\, x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_2 - p_1 \\ k = 1 \ldots p_2 \end{pmatrix},$$

$$x'_{p_2+i} = \sum_k b_{p_2+ik}(u)\, x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m - p_2 \\ k = 1 \ldots m \end{pmatrix}$$

gebracht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erlangt die Gruppe (1) die schliessliche Gestalt:

$$\begin{aligned}
x_i' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u).x_k && (i = 1 \cdots p_1), \\
x'_{p_1+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+ik}(u) \,.\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+ip_1+k}(u)\, x_{p_1+k} && (i = 1 \cdots p_2 - p_1), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x'_{p_d+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+ik}(u) \,.\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_d+ip_1+k}(u)\, x_{p_1+k} + \cdots \\
&\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+ip_d+k}(u)\, x_{p_d+k} && (i = 1 \cdots m - p_d).
\end{aligned} \tag{2}$$

Diese ist so beschaffen, dass jede der $d + 1$ Gruppen

$$x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p_{g+1} - p_g), \tag{3}$$

wo g der Reihe nach gleich $0 \ldots d$ und $p_0 = 0$ zu setzen ist, ursprünglich ist. Die Coefficienten dieser Gruppen betreffend, sind die einer jeden von ihnen untereinander unabhängig. Haben zwei der Gruppen verschiedene Parametergruppen, so bestehen keine Beziehungen zwischen ihren Coefficienten. Haben dagegen zwei der Grnppen die Parametergruppe gemein, so kann stets vorausgesetzt werden, dass die entsprechenden Coefficienten gleich sind. Denn besitzt die Parametergruppe die Form

$$v'_{ik} = \sum_l u_{il} v_{lk} \qquad (i, k, l = 1 \ldots p)$$

so lässt sich jede zu ihr gehörige ursprüngliche Gruppe in die Form

$$x'_{p_g+i} = \sum_k u_{ik}\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p)$$

bringen, nach dem Corollar des 38. Satzes. —

Hat man einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe die Gestalt (2) ertheilt, so können doch noch innerhalb gewisser Grenzen die Veränderlichen beliebig geändert werden, insofern als die Form (2) einer Gruppe ihrem Wesen nach sich nicht ändert, wenn $x_{p_1+1} \dots x_{p_2}$ um lineare Formen von $x_1 \dots x_{p_1}$, die Grössen $x_{p_2+1} \dots x_{p_3}$ um lineare Formen von $x_1 \dots x_{p_2}$ u. s. w. vermehrt werden. Um von der Gestalt (2) einer Gruppe ausgehend eine Normalform derselben zu definiren, kann man also noch eine Beschränkung hinzufügen. Diese Beschränkung soll darin bestehen, dass unter den Transformationen der Gruppe auch alle Transformationen der Gruppe

$$(4) \qquad x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+i\,p_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1 \dots p_{g+1} - p_g \\ g = 0 \dots d \end{pmatrix}$$

enthalten sein sollen, dass also mit andern Worten, die Gruppe (2) die Untergruppe (4) besitzt.

Dass diese Bedingung wirklich zulässig ist, muss zunächst gezeigt werden. In der That lässt sich mit Hilfe des 42. Satzes der folgende beweisen:

Satz 43. *Die Veränderlichen jeder Gruppe von der Gestalt* (2)*:*

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u) x_k && (i = 1 \dots p_1), \\ x'_{p_1+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+i\,p_1+k}(u) x_{p_1+k} && (i = 1 \dots p_2 - p_1), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x'_{p_d+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+i\,k}(u) x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_d+i\,p_1+k}(u) x_{p_1+k} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+i\,p_d+k}(u) x_{p_d+k} && (i = 1 \dots m - p_d), \end{aligned}$$

können so gewählt werden, dass die Gruppe die Untergruppe

$$(6) \qquad x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+i\,p_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad (i,k = 1 \dots p_{g+1} - p_g)$$

enthält.

Wird vorausgesetzt, dass die zur begleitenden Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1 \dots p_1 \\ g = 0 \dots d \end{pmatrix}$$

gehörige Nebengruppe bereits in der verlangten Form sich vorfindet, so dass sie die Untergruppe

$$x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ g = 1 \ldots d \end{pmatrix}$$

enthält, so kann man in der gegebenen Gruppe den Parametern solche Bedingungen auferlegen, dass die Nebengruppe in diese ihre Untergruppe übergeht und gleichzeitig die gegebene Gruppe in eine ihrer Untergruppen. Deutet man in denjenigen Coefficienten der Gruppe, die nicht nothwendig verschwinden müssen in Folge der Bedingungen, die aber möglicherweise durch dieselben modificirt werden, dies Verhalten dadurch an, dass man u durch u ersetzt, so hat die in Rede stehende Untergruppe der gegebenen Gruppe die Gestalt:

$$(7)\quad \begin{aligned}
x'_i &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u) x_k && (i = 1 \ldots p_1), \\
x'_{p_1+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+ik}(u) x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+ip_1+k}(u) x_{p_1+k} && (i = 1 \ldots p_2 - p_1), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\
x'_{p_d+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+ik}(u) x_k + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+ip_d+k}(u) x_{p_d+k} && (i = 1 \ldots m - p_d).
\end{aligned}$$

Diese Untergruppe aber besitzt die d begleitenden Gruppen

$$(8)\quad \begin{aligned}
x'_i &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u) x_k && (i = 1 \ldots p_1), \\
x'_{p_g+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_g+ik}(u) x_k + \sum_{k=1}^{p_{g+1}-p_g} b_{p_g+ip_g+k}(u) x_{p_g+k} && (i = 1 \ldots p_{g+1} - p_k), \\
& && (g = 1 \ldots d).
\end{aligned}$$

Hier kann man nach dem 42. Satz erreichen, und zwar durch Hinzufügung linearer Formen von $x_1 \ldots x_p$ zu $x_{p_g+1} \ldots x_{p_{g+1}}$, dass jede Gruppe (8) die Untergruppe

$$\begin{aligned}
x'_i &= \sum_k b_{ik}(u) x_k && (i, k = 1 \ldots p_1), \\
x'_{p_g+i} &= \sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u) x_{p_g+k} && (i, k = 1 \ldots p_{g+1} - p_g)
\end{aligned}$$

besitzt; dann wird auch die gegebene Gruppe (5) die Untergruppe (6) besitzen. Damit hat die gegebene Gruppe die gewünschte Gestalt erhalten; man erkennt zugleich die Zulässigkeit der Voraussetzung über die Form der Nebengruppe; es ist die successive Anwendung der eben geführten Betrachtung, vermittelst deren man die Nebengruppe in jene Form bringt. —

Die jetzt erhaltene Form der Gruppe wurde schon oben als diejenige bezeichnet, die als *Normalform der zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe* definirt werden soll. Geeignet hierzu erweist sie sich durch die Einfachheit der zwischen ihren Coefficienten möglichen Relationen, von denen sofort die Rede sein soll. Dass eine Gruppe unendlich vieler Normalformen fähig sein kann, ist für das Allgemeine belanglos, und kann nur in speciellen Fällen das Bedürfniss nach der Auswahl einer besonders geeigneten Normalform erwecken.

Was die Coefficientenrelationen angeht, so ist zunächst durch die Wahl der Normalform die Möglichkeit einer Relation zwischen Coefficienten $b_{p_g+ip_h+k}(u)$, wo g von h verschieden ist, und Coefficienten $b_{p_g+ip_g+k}(u)$ ausgeschlossen. Weiter sind entweder entsprechende Coefficienten zweier von den bei der Normalform auftretenden ursprünglichen Gruppen einander gleich, oder alle Coefficienten beider ursprünglichen Gruppen sind unabhängig. Sodann kann gezeigt werden:

Satz 44. *Liegt eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in der Normalform vor, so sind alle diejenigen Coefficienten* $b_{p_g+ip_h+k}(u)$, *die gemeinsame Indices g und h besitzen, von einander unabhängig oder verschwinden sämmtlich.*

Der Beweis verläuft analog dem Beweise des 41. Satzes. In den unter den Gleichungen der Parametergruppen sich vorfindenden Gleichungen

$$(9)\qquad b_{p_g+ip_h+k}(v') = \sum_l b_{p_g+ip_h+l}(u)\, b_{p_h+ip_h+k}(v) + \cdots$$

$$\cdots + \sum_j b_{p_g+ip_g+j}(u)\, b_{p_g+jp_h+k}(v)$$

$$(i, j = 1 \ldots p_{g+1} - p_g)$$

$$(k, l = 1 \ldots p_{h+1} - p_h)$$

sind die mittleren Glieder, die hier nicht hingeschrieben sind, unabhängig von den Coefficienten der bei der Normalform auftretenden ursprünglichen Gruppen. Existirt nun zwischen Coefficienten mit bestimmtem Indexpaar g, h eine lineare Relation

$$(10)\qquad \sum_{i,k} a_{ik}\, b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \ldots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix},$$

so können entsprechend den Gleichungen (9) in dieser die Parameter $u_1 \ldots u_n$ durch $v_1' \ldots v_n'$ ersetzt werden. Da die entstandene Relation einerseits für jedes beliebig gewählte Werthsystem von $v_1 \ldots v_n$, andererseits für jedes beliebig gewählte Werthsystem von $u_1 \ldots u_n$ bestehen muss, so folgen durch Vergleichung der Coefficienten von

$b_{p_h+ip_h+k}(v)$ und von $b_{p_g+ip_g+j}(u)$ mit Null die beiden Relationensysteme

$$(11) \qquad \sum_i \alpha_{ik} b_{p_g+ip_h+l}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1\ldots p_{g+1}-p_g \\ k,l=1\ldots p_{h+1}-p_h \end{pmatrix},$$

$$(12) \qquad \sum_k \alpha_{ik} b_{p_g+jp_h+k}(v) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i,j=1\ldots p_{g+1}-p_g \\ k=1\ldots p_{h+1}-p_h \end{pmatrix},$$

Durch Anwendung des Verfahrens, durch welche die Relationen (12) aus (10) hergeleitet wurden, auf das Relationensystem (11) erhält man weiter

$$(13) \qquad b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1\ldots p_{g+1}-p_g \\ k=1\ldots p_{h+1}-p_h \end{pmatrix},$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Satz 45. *Relationen zwischen Coefficienten einer in der Normalebene vorliegenden Gruppe nehmen alle die Gestalt*

$$\sum_{g,h} \alpha_{gh} b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0$$

an, wo über gewisse Werthepaare g, h zu summiren ist. Eine solche Relation hat, wenn sie für ein bestimmtes Indexpaar i, k gilt, für alle Indexpaare i, k zu gelten. Zudem müssen für jeden Index g, über den summirt wird, in allen Gruppen:

$$x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1\ldots p_{g+1}-p_g)$$

entsprechende Coefficienten gleich sein und desgleichen muss für jeden Index h, über den summirt wird, in allen Gruppen

$$x'_{p_h+i} = \sum_k b_{p_h+ip_h+k}(u)\, x_{p_h+k} \qquad (i, k = 1\ldots p_{h+1}-p_h)$$

Gleichheit entsprechender Coefficienten statthaben.

Der Beweis folgt aus derselben Betrachtungsweise, aus der der vorhergehende Satz erwiesen wurde; da ausser einer gewissen Umständlichkeit in der Bezeichnung keine Schwierigkeiten auftreten, so sei es gestattet, ihn zu unterdrücken.

IV. Abschnitt.

Zahlensysteme und Matrices.

§ 1.

Eigenschaften der Matrices.

Die Resultate des vorigen Abschnittes gewinnen bedeutend an Uebersichtlichkeit, wenn zur Darstellung der Gruppen Matrices benutzt werden.

Eine Matrix soll nichts anderes sein, als eine umfassende Bezeichnung des Systems der Coefficienten eines Systems linearer Formen. So bildet das System der Coefficienten der Formen

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n) \tag{1}$$

eine Matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

oder kürzer geschrieben

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n). \tag{2}$$

Die Grössen a_{ik} werden als Elemente der Matrix A bezeichnet.

Es sollen die folgenden Operationsregeln für die Matrices gelten:

1. *Man multiplicirt eine Matrix mit einer Zahl, indem man ihre sämmtlichen Elemente mit dieser Zahl multiplicirt.*

Es ist also:

$$M \| a_{ik} \| = \| M a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n) \tag{3}$$

Diese Operation entspricht der Multiplication des Systems der Formen

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit der Zahl M.

2. *Die Summe zweier Matrices von gleichvielen wagerechten und gleichvielen senkrechten Reihen ist eine Matrix, deren Elemente die Summen entsprechender Elemente der beiden gegebenen Matrices sind.* So ist

$$\| a_{ik} \| + \| a'_{ik} \| = \| a_{ik} + a'_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n). \tag{4}$$

Dies entspricht der Addition entsprechender Formen der beiden Formensysteme

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$
$$y_i' = \sum_k a_{ik}' x_k \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit gemeinsamen unabhängigen Veränderlichen.

Als Matrix 0 wird eine Matrix bezeichnet, deren sämmtliche Elemente Null sind. Zwei Matrices sind gleich, wenn ihre Differenz Null ist.

3. *Das Product zweier Matrices, von denen die zweite so viele wagerechte Reihen hat, als die erste senkrechte Reihen besitzt, ist eine Matrix, deren in der i^{ten} wagerechten und k^{ten} senkrechten Reihe befindliches Element die Summe der Producte entsprechender Elemente der i^{ten} wagerechten Reihe der ersten Matrix und der k^{ten} senkrechten Reihe der zweiten Matrix ist.* So wird aus den Matrices

$$(5) \qquad \begin{aligned} A &= \| a_{il} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n), \\ B &= \| b_{lk} \| \qquad (l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p) \end{aligned}$$

das Product

$$(6) \qquad AB = \left\| \sum_l a_{il} b_{lk} \right\| \qquad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p)$$

gebildet. Dieser Productbildung entspricht die Ersetzung der unabhängigen Veränderlichen in den Formen

$$y_i = \sum_l a_{il} x_l \qquad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n)$$

durch neue Veränderliche vermittelst der Formen

$$x_l = \sum_k b_{lk} z_k \qquad (l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p).$$

Man bemerkt, dass vermöge dieser Operationsregeln die Addition dem associativen und commutativen Gesetz, die Bildung eines Productes aus Matrices dem associativen und distributiven Gesetz der Verknüpfung folgt. —

Bildet man aus den abhängigen Veränderlichen der Gleichungen

$$(7) \qquad y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

eine aus einer einzigen senkrechten Reihe bestehende Matrix

$$\eta = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix} \right\|,$$

so lässt sich diese nach der Productregel der Matrices als Product von

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit der einreihigen Matrix

$$\xi = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|$$

darstellen, so dass in Stelle des Gleichungensystems (7) die einzige Gleichung zwischen Matrices

(8) $$\eta = A\xi$$

tritt. —

§ 2.

Darstellung der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen durch Matrices.

Sollen nun die Gleichungen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe von der im sechsten Paragraphen des vorigen Abschnitts behandelten Form:

$$\begin{aligned}
x_i' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u)\, x_k && (i = 1 \ldots p_1),\\
x'_{p_1+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} && (i = 1 \ldots p_2 - p_1),\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots\\
x'_{p_d+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_d+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} + \cdots\\
&\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+i\,p_d+k}(u)\, x_{p_d+k} && (i = 1 \ldots m - p_d),
\end{aligned} \tag{1}$$

durch Matrices dargestellt werden, so werde zuerst die Matrix der Coefficienten von $x_{p_h+1} \cdots x_{p_{h+1}}$ in denjenigen Gleichungen, durch die $x'_{p_g+1} \cdots x'_{p_g+1}$ gegeben sind, gebildet:

$$(2) \qquad s_{gh}(u) = \| b_{p_g+i\,p_h+k}(u) \| \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \cdots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \cdots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix};$$

jede solche Matrix soll eine Elementarmatrix genannt werden.

Von den Elementarmatrices besitzen, wie unmittelbar ersichtlich, alle diejenigen, die den ersten Index gemein haben, gleich viele wagerechte und alle diejenigen, die den zweiten Index gemein haben, gleich viele senkrechte Reihen; alle Elementarmatrices $s_{gg}(u)$ endlich ebensoviel senkrechte als wagerechte Reihen. Bezeichnet man ferner mit $\xi_0 \ldots \xi_d$ die Matrices

$$\xi_g = \left\| \begin{matrix} x_{p_g+1} \\ \vdots \\ x_{p_g+1} \end{matrix} \right\|,$$

so folgt aus den Gleichungen (1), dass die Matrix ξ_g' durch

$$\xi_g' = s_{g0}(u)\xi_0 + \cdots + s_{gg}(u)\xi_g \tag{3}$$

wiedergegeben wird, wobei die Operationszeichen im Sinne der für die Matrices geltenden Operationsregeln zu nehmen sind.

Die Gleichungen der Gruppe (1) erhalten auf diese Weise folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\xi_0, \\ \xi_1' &= s_{10}(u)\xi_0 + s_{11}(u)\xi_1, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\xi_0 + s_{d1}(u)\xi_1 + \cdots + s_{dd}(u)\xi_d \end{aligned} \tag{4}$$

und die Gruppeneigenschaft der Gleichungen (1) oder (4) wird durch folgende Gleichungen zwischen Matrices wiedergegeben:

$$s_{gh}(v') = s_{gh}(u)s_{hh}(v) + \cdots + s_{gg}(u)s_{gh}(v) \quad \begin{pmatrix} g=0\cdots d \\ h=0\cdots g \end{pmatrix}, \tag{5}$$

die den Gleichungen

$$b_{p_g+ip_h+k}(v') = \sum_l b_{p_g+il}(u)b_{lp_h+k}(v) \quad \begin{pmatrix} i=1 & \cdots p_{g+1}-p_g \\ k=1 & \cdots p_{h+1}-p_h \\ l=p_h+1 & \cdots p_{g+1} \end{pmatrix}$$

entsprechen.

— Sind nun die Gleichungen (1) oder (4) die Gleichungen der Normalform der Gruppe, so sind die Elemente jeder Elementarmatrix $s_{gg}(u)$ untereinander unabhängig; ferner sind zwei Elementarmatrices $s_{gg}(u)$ und $s_{hh}(u)$ entweder gleich, oder ihre Elemente sind von einander unabhängig. Die Gruppe (4) besitzt dann ausserdem die Untergruppe:

$$\begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_d' &= s_{dd}(u)\xi_d. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Sätze 44 und 45 gehen in die folgenden über:

Satz 46. *Befindet sich eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in der Normalform* (4), *so sind die Elemente jeder nichtverschwindenden Elementarmatrix von einander unabhängig.*

Satz 47. *Jede Coefficientenrelation bei einer in der Normalform befindlichen Gruppe veranlasst eine Relation zwischen Elementarmatrices von der Form*

$$\alpha_1 s_{g_1h_1}(u) + \cdots + \alpha_\nu s_{g_\nu h_\nu}(u) = 0, \tag{7}$$

wo $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ numerische Constanten sind, und zudem

$$s_{g_1 g_1}(u) = \cdots = s_{g_r g_r}(u),$$

$$s_{h_1 h_1}(u) = \cdots = s_{h_r h_r}(u)$$

ist.

§ 3.

Die Normalform der Zahlensysteme.

Von der Normalform einer Gruppe ausgehend kann man eine Normalform des zugehörigen Zahlensystems definiren. Nach den letzten Sätzen bilden die Elemente eines vollständigen Systems linear unabhängiger Elementarmatrices ein vollständiges System linear unabhängiger Formen der Parameter der Gruppe. Man wird also die Wahl der Basis des Zahlensystems so treffen können, dass die Elemente des vollständigen Systems unabhängiger Elementarmatrices direct den Parametern einer Zahl des Zahlensystems gleich werden.

Wählt man unter den Gleichungen

$$s_{gh}(v') = s_{gh}(u)s_{hh}(v) + \cdots + s_{gg}(u)s_{gh}(v) \qquad \begin{pmatrix} g=0\cdots d \\ h=0\cdots g \end{pmatrix}$$

diejenigen aus, deren linke Seiten von den unabhängigen Elementarmatrices gebildet sind, ersetzt die auf den rechten Seiten etwa auftretenden abhängigen Elementarmatrices durch die ihnen entsprechenden linearen Formen unabhängiger Elementarmatrices, so erhält man die linear unabhängigen Gleichungen der Parametergruppe, die zugleich die Productgleichungen des zugehörigen Zahlensystems sind. Diese Form eines Zahlensystems kann als seine Normalform betrachet werden. Die begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme sind ihren Productgleichungen nach durch die verschiedenen unter den Gleichungen

$$s_{gg}(v') = s_{gg}(u)\, s_{gg}(v)$$

gegeben; ebenso leicht lassen sich die Productgleichungen der übrigen begleitenden Systeme angeben. Die beiläufige Lösung dieser Aufgabe erscheint hier von geringerer Bedeutung, als man Eingangs der Untersuchung geneigt war, ihr zuzuschreiben.

Es muss noch auf die Frage eingegangen werden, welchen Einfluss auf die Normalform eines Zahlensystems diejenige Gruppe besitzt, von der ausgehend diese Normalform definirt wurde. Es lässt sich zeigen:

Satz 48. *Befindet sich von zwei, zu einem und demselben Zahlensystem gehörigen, Gruppen die eine in ihrer Normalform, so lässt sich auch die andere so in ihre Normalform bringen, dass ihre Elementarmatrices sich linear durch die Elementarmatrices der ersten darstellen lassen.*

Die eine der Gruppen sei in ihrer Normalform:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\,\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\,\xi_d; \end{aligned}$$

eine Normalform der andern Gruppe sei:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \xi_{d+1}' &= s_{d+1\,d+1}(u)\,\xi_{d+1}, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_c' &= s_{c\,d+1}(u)\,\xi_{d+1} + \cdots + s_{cc}(u)\,\xi_c. \end{aligned}$$

Da die Parametergruppe beiden gemein ist, so wird von einer jeden ursprünglichen Gruppe der Form:

$$(3)\qquad \xi_{d+h}' = s_{d+h\,d+h}(u)\,\xi_{d+h}$$

die Parametergruppe durch irgend eine der Gleichungen

$$s_{gg}(v') = s_{gg}(u)\,s_{gg}(v)$$

gegeben sein, wo g kleiner als $d+1$ ist. Zufolge dem Corollar des 38. Satzes wird man die Veränderlichen jeder Gruppe (3) dann so ändern können, dass die Matrix der Coefficienten gleich der, die Parametergruppe definirenden, Matrix $s_{gg}(u)$ wird. Dadurch wird die Normalform (2) in eine andre Normalform übergeführt, von der man zeigen kann, dass ihre Elementarmatrices thatsächlich nur linear aus den Elementarmatrices von (1) zusammengesetzt sind. Zieht man nämlich die Gruppe (1) mit der transformirten Gruppe (2) zu einer einzigen Gruppe zusammen, so besitzt die entstandene Gruppe ihre Normalform. Dann sind nach dem 47. Satze alle Elementarmatrices dieser Gruppe linear durch ein volles System unabhängiger Elementarmatrices darstellbar. Ein solches System aber lässt sich bereits aus den Gleichungen (1) auswählen, da die Gruppe (1) mit der Gesammtgruppe die Parametergruppe gemein hat; es werden also die Elementarmatrices von (2) durch die Elementarmatrices von (1) linear ausgedrückt werden.

— Nach diesem Satze ist es vollkommen gleichgültig, welche Gruppe unter allen zu einem bestimmten Zahlensystem gehörigen Gruppen behufs Untersuchung des Zahlensystems zu Grunde gelegt wird.

§ 4.

Eine Classification der Zahlensysteme.

Den Abschluss der Untersuchung soll eine Classification der Zahlensysteme bilden, die auf Grund der gewonnenen Normalform ausgeführt werden kann.

Zwei zu Zahlensystemen gehörige Gruppen:

$$\begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\xi_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\xi_d \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} \eta_0' &= \sigma_{00}(u)\eta_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \eta_d' &= \sigma_{d0}(u)\eta_0 + \cdots + \sigma_{dd}(u)\eta_d \end{aligned} \tag{2}$$

können in eine Art verwiesen werden, wenn jeder Gleichung

$$s_{gg}(u) = s_{hh}(u) \tag{3}$$

eine Gleichung

$$\sigma_{gg}(u) = \sigma_{hh}(u) \tag{4}$$

und ebenso jeder Gleichung

$$\alpha_1 s_{g_1 h_1}(u) + \cdots + \alpha^\nu s_{g_\nu h_\nu}(u) = 0 \tag{5}$$

die unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} s_{g_1 g_1}(u) &= \cdots = s_{g_\nu g_\nu}(u), \\ s_{h_1 h_1}(u) &= \cdots = s_{h_\nu h_\nu}(u) \end{aligned}$$

existirt, eine Gleichung

$$\alpha_1 \sigma_{g_1 h_1}(u) + \cdots + \alpha_\nu \sigma_{g_\nu h_\nu}(u) = 0 \tag{6}$$

entspricht und umgekehrt.

Satz 49. *Alle Gruppen einer Art sind durch eine Gruppe der Art bestimmt.*

Als verschiedene Gruppen einer Art sind nur solche zu betrachten, deren Elementarmatrices verschiedene Anzahlen von Elementen besitzen. Aus einer Gruppe (1) kann man dann alle übrigen Gruppen derselben Art finden, indem man in Stelle jeder unabhängigen Matrix $s_{gg}(u)$ eine Matrix $\sigma_{gg}(u)$ setzt, die eine beliebige Anzahl von wagerechten Reihen von Elementen besitzt; weil die Matrices $\sigma_{gg}(u)$ quadratisch sind, ist dadurch die Anzahl der senkrechten Reihen mit bestimmt. Erfüllt man sodann die den Relationen (3) entsprechenden Relationen (4), so ist für jede Elementarmatrix $\sigma_{gh}(u)$ die Anzahl der senkrechten und wagerechten Reihen von Elementen bestimmt, da alle Matrices mit gleichem ersten Index gleich viele senkrechte Reihen und alle mit gleichem zweiten Index gleich viele wagerechte Reihen von Elementen besitzen. Da ferner die Relationen (5) und (6) unter solchen Nebenbedingungen bestehen, die bereits erfüllt wurden, so lassen sich schliesslich auch die den Relationen (5) entsprechenden Relationen (6) einführen.

Satz 50. *Haben zwei Gruppen verschiedener Arten die Parametergruppe gemein, so lässt sich zu jeder Gruppe der einen Art eine Gruppe der andern Art finden, die mit ihr die Parametergruppe gemein hat.*

Zwei Gruppen mit gemeinsamer Parametergruppe können nach dem 48. Satze derart in die Normalformen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\,\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\,\xi_d \end{aligned}$$

und

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi_{d+1}' &= s_{d+1\,d+1}(u)\,\xi_{d+1}, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_c' &= s_{c\,d+1}(u)\,\xi_{d+1} + \cdots + s_{cc}(u)\,\xi_c \end{aligned}$$

gebracht werden, dass die Elementarmatrices der einen Gruppe linear durch die Elementarmatrices der andern ausgedrückt sind. Zieht man nun die Gruppe (7) mit der Gruppe (8) in eine einzige Gruppe zusammen und ersetzt die unabhängigen Elementarmatrices von (7) so durch neue, dass aus (7) eine andre Gruppe ihrer Art hervorgeht, so geht auch die aus (7) und (8) zusammengesetzte Gruppe in eine andre Gruppe ihrer Art über, die die Parametergruppe mit der aus (7) entstandenen Gruppe gemein hat. Dadurch geht auch aus (8) eine Gruppe von einerlei Art mit (8) hervor, die mit der aus (7) entstandenen Gruppe die Parametergruppe gemein hat. —

Man wird *zwei Arten von Gruppen in eine Classe* verweisen können, *wenn jede Gruppe der einen Art die Parametergruppe mit einer Gruppe der andern Art gemein hat.* Rechnet man ferner *diejenigen Zahlensysteme, die zu den Gruppen einer Art gehören, zu einer Classe,* so kann man den 50. Satz auch so formuliren, dass alle Arten einer Classe von Gruppen zu einer und derselben Classe von Zahlensystemen gehören.

Nach allem diesem kann jede Classe von Zahlensystemen als durch eine beliebige Gruppe, die zu einem Zahlensystem der Classe gehört, definirt betrachtet werden. Insbesondere kann die definirende Gruppe so gewählt werden, dass die Gleichungen der Normalform (1) Gleichungen zwischen gewöhnlichen Grössen

$$(9)\qquad \begin{aligned} x_0' &= a_{00}(u)\,x_0, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ x_d' &= a_{d0}(u)\,x_0 + \cdots + a_{dd}(u)\,x_d. \end{aligned}$$

Ein Zahlensystem, das zu einer solchen Gruppe gehört, hat die besondre Eigenschaft, dass die begleitenden ursprünglichen Systeme derselben nur je eine Basiszahl besitzen. Die Productgleichungen

dieser ursprünglichen Systeme sind durch die unabhängigen unter den Gleichungen

$$a_{gg}(v') = a_{gg}(u)\, a_{gg}(v)$$

gegeben. Jeder Classe von Zahlensystemen gehört ein solches Zahlensystem an, und so mag dies Sonderresultat als letzter Satz dieser ganzen Untersuchung gefasst werden.

Satz 51. *Jedes Zahlensystem, dessen begleitende ursprüngliche Systeme nur je eine Basiszahl besitzen, definirt eine Classe von Zahlensystemen, so dass, wenn alle jene Systeme bekannt sind, dadurch überhaupt alle Zahlensysteme gegeben sind.*

Dass Schwierigkeiten von wesentlicher Art der Aufsuchung dieser, gewissermassen typischen, Zahlensysteme nicht im Wege liegen, geht schon aus andern Untersuchungen hervor und so mag diese Frage, als das Ziel, das ich mir gesteckt, überschreitend, hier unerörtert bleiben.

Dorpat, August 1891.

Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Durch $\bar{\Gamma}(a)$ werde, wie in der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen (§ 3, S. 514), das Integral

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\, du \tag{1}$$

bezeichnet, in welchem die Variable u, vom unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe ausgehend und dahin zurückkehrend, einen positiven Umlauf um den Punkt 0 ausführt*). Für $\bar{\Gamma}(a)$ kann (S. 515 des genannten 35ten Bandes) auch der Ausdruck

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{+\infty}^{(0)} e^{-u} u^{a-1}\, du, \tag{2}$$

wo der Integrationsweg einen bei $+\infty$ beginnenden positiven Umlauf um den Punkt 0 darstellt, oder der Ausdruck**)

$$\bar{\Gamma}(a) = -e^{\pi i a} \int_{+\infty}^{(0-)} e^{-u} u^{a-1}\, du \tag{3}$$

in welchem die Umkreisung des Punktes 0 in negativer Drehungsrichtung erfolgt, gesetzt werden. Die Formel (3) entsteht aus der Formel (2) durch Umkehrung des Integrationsweges. Die Potenz u^{a-1}

*) Das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ weicht nur in formaler Beziehung von dem Integral ab, welches H. Hankel in § 3 seiner Abh. „Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumente", Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Phys., Jahrgang 9, 1864, definirt hat.

**) Cfr. die Abh. des Verf. „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 38 dieser Annalen, S. 243.

wird bei dem Integral (1) dadurch näher bestimmt, dass im Schnittpunkte des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe u^{a-1} gleich der Grösse $e^{(a-1)\log u}$, in welcher log u den reellen Logarithmus bedeutet, zu nehmen ist. Letztere Bedingung gilt in (2) und (3) für den ersten Theil des Integrationsweges.

Die obigen Integrale sollen, mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen, durch die Substitution

$$u = \frac{1}{t}, \quad u^{a-1}du = -t^{-a-1}dt, \tag{4}$$

umgeformt werden. Der Weg der Variable t nimmt dann im Punkte 0 seinen Anfang, und zwar verlässt t bei dem Integral (1) den Nullpunkt in der Richtung der negativen reellen Axe, bei den Integralen (2) und (3) in der Richtung der positiven reellen Axe. Man setze der Einfachheit halber den Weg der Variable u aus einem (doppelt durchlaufenen) Abschnitt der negativen, bezw. positiven reellen Axe und aus einem Kreise, der um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschrieben wird, zusammen. Unter ε werde eine unendlich kleine positive reelle Constante verstanden. Dann besteht der Weg, der sich für t bei dem Integral (1) ergiebt, aus der geradlinigen Strecke vom Punkte $-\varepsilon$ bis zum Punkte -1, dem im negativen Sinne durchlaufenen Kreise mit dem Radius 1, und der geradlinigen Strecke von -1 bis $-\varepsilon$. Dieser Weg stellt einen vom Punkte $-\varepsilon$ aus bewirkten negativen Umlauf um den Punkt 0 dar. Unter Benutzung der in § 1 der Abhandlung des Verfassers „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“*) angegebenen Bezeichnung (die auch in (1), (2), (3) angewendet ist) erhält man demnach die Gleichung

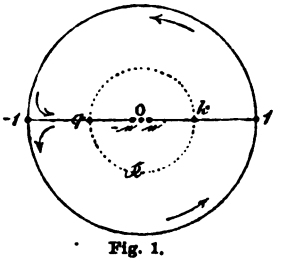


Fig. 1.

$$\bar{\Gamma}(a) = -\int_{-\varepsilon}^{(0-)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1}dt.$$

Man kann nun unter Hinzufügung des Factors -1 den Integrationsweg umkehren. Dies ändert hier den Weg nur insofern, als die negative Umkreisung des Nullpunktes sich in die positive verwandelt (Fig. 1). Also ergiebt sich, unter der Bedingung, dass für $t = 1$ die Potenz t^{-a-1} gleich 1 gesetzt werde, die Formel

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\varepsilon}^{(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1}dt. \tag{5}$$

Die Substitution (4) lässt aus (3) die Gleichung

*) Band 35 dieser Annalen, S. 472.

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{\pi i a} \int_{\mathfrak{e}}^{\bar{(0)}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt \tag{6}$$

und aus (2) die Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = -e^{-\pi i a} \int_{\mathfrak{e}}^{\bar{(0-)}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt \tag{7}$$

entstehen, woselbst $\mathfrak{e}$, wie oben, eine unendlich kleine positive reelle Zahl bedeutet. In (6) und (7) nimmt die Potenz t^{-a-1} den Werth 1 an, wenn t zum ersten Male im Punkte 1 eintrifft.

Statt des Kreises mit dem Radius 1 kann in (5), (6), (7), als Theil des Weges von t, ein Kreis $\mathfrak{K}$ gewählt werden, der mit einem beliebigen Radius k um den Nullpunkt gelegt wird. Denn die zu integrirenden Functionen haben keinen anderen endlichen singulären Punkt als den Punkt $t = 0$. Ausser dem Kreise $\mathfrak{K}$ bildet dann in (5) die (in beiden Richtungen vorkommende) Strecke von $-\mathfrak{e}$ bis $-k$, und in (6) und (7) die Strecke von $+\mathfrak{e}$ bis $+k$ den Integrationsweg. Es gilt in diesem Falle für das Integral (5) die Bestimmung, dass t^{-a-1} im Punkte $t = k$ gleich $e^{-(a+1)\log k}$ wird, wo $\log k$ den reellen Logarithmus bezeichnet. Bei den Integralen (6) und (7) stimmt t^{-a-1} auf dem ersten Theile des Integrationsweges (zwischen $\mathfrak{e}$ und k) mit dem Werthe $e^{-(a+1)\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, überein.

§ 2.

In dem Integral (1) wurde der unendlich entfernte Punkt der negativen reellen Axe als Ausgangspunkt und Endpunkt des Integrationsweges angenommen. Indessen kann man diesen Punkt, ohne dass der Werth des Integrals sich änderte, durch einen beliebigen Punkt derjenigen Hälfte des unendlichen Horizontes, bei der die reellen Bestandtheile negativ sind, ersetzen, resp. zwei solche Horizontpunkte als untere und obere Begrenzung des Integrals nach u wählen. Dies folgt daraus, dass, wie Cauchy gezeigt hat, das Integral der Function $e^u u^{a-1}$, genommen über irgend einen Theil der genannten Hälfte des Horizonts, einen verschwindend kleinen Werth hat.

Wird unter s eine sehr grosse positive reelle Constante verstanden, und $u = se^{\vartheta i}$ gesetzt, so ergiebt sich, wenn

$$a = a_1 + i a_2$$

ist (a_1, a_2 reell), die Gleichung

$$e^u u^{a-1} du = e^{s(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} s^{a_1} e^{i a_2 \log s} e^{(i a_1 - a_2)\vartheta} i d\vartheta.$$

Man nehme, indem man durch λ eine reelle, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Constante und durch s' das Product $se^{-(\pi-\lambda)i}$ bezeichnet, die Werthe

$-\pi$ und $-(\pi-\lambda)$ als Grenzen der Integration nach ϑ, so dass $-s$ und s' die Integralgrenzen in Bezug auf u sind. Da

$$\text{mod.}\,(e^u u^{a-1}du) = s^{a_1} e^{s\cos\vartheta - a_2\vartheta}\,d\vartheta$$

ist, so besteht für den Modul des betrachteten Integrals die Ungleichheit

$$\text{mod.}\int_{-s}^{s'} e^u u^{a-1}du < s^{a_1}\int_{-\pi}^{-(\pi-\lambda)} e^{s\cos\vartheta - a_2\vartheta}\,d\vartheta.$$

Hieraus folgt

$$\text{mod.}\int_{-s}^{s'} e^u u^{a-1}du < \lambda\, s^{a_1} e^{s\cos\vartheta_0 - a_2\vartheta_0}, \tag{8}$$

wo ϑ_0 eine Constante bedeutet, die zwischen $-\pi$ und $-(\pi-\lambda)$ liegt. Mit unbegrenzt wachsendem s wird aber, da $\cos\vartheta_0$ negativ ist, die rechte Seite von (8) beliebig klein, was um so mehr von dem links stehenden Integrale gilt. In derselben Art wird bewiesen, dass das Integral nach ϑ zwischen den Grenzen $-(\pi+\lambda)$ und $-\pi$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwischen den Grenzen $\pi-\lambda$ und π sich für ein unendliches s dem Werthe Null nähert.

Man ziehe nun vom Nullpunkte aus zwei Gerade $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, welche mit der positiven reellen Axe die Winkel $-(\pi-\lambda_1)$ und $\pi-\lambda_2$ bilden; λ_1 und λ_2 seien positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Die unendlich entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ sollen kurz durch $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$, und der unendlich entfernte Punkt der negativen reellen Axe durch $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Ferner möge der Kreis $\mathfrak{K}$, der mit dem beliebigen Radius k um den Nullpunkt beschrieben wird, die Geraden $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ in den Punkten m_1, m_2 und die negative reelle Axe im Punkte q treffen (Fig. 2).

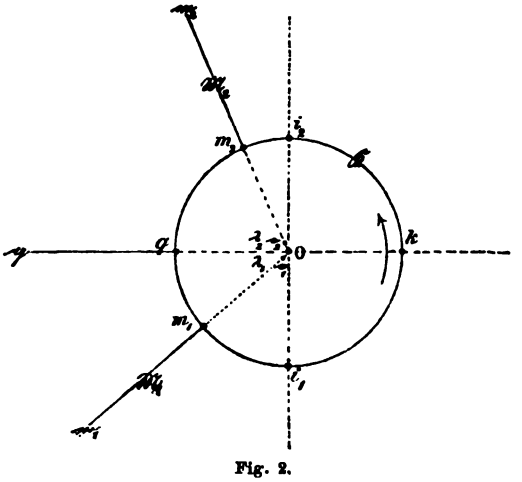


Fig. 2.

Die Schnittpunkte des Kreises mit der positiven reellen Axe, mit der negativen imaginären und der positiven imaginären Axe werden k, i_1 und i_2 genannt.

In dem Integrationswege des Integrals (1), welcher nach Fig. 2 aus den Theilen

$$\mathfrak{q}q,\ qm_1 i_1 k i_2 m_2 q,\ q\mathfrak{q}$$

besteht, dürfen die Strecken $\mathfrak{q}q$ und qm_1 durch den Bogen $\mathfrak{q}\mathfrak{m}_1$ des

unendlichen Horizonts und den geradlinigen Abschnitt $\mathfrak{m}_1 m_1$ ersetzt werden. Denn das Integral von $e^u u^{a-1}$ längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{q}q, q m_1, m_1 \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \mathfrak{q}$ verschwindet, da die genannte Function auf dem eingeschlossenen Flächenstück eindeutig und stetig ist. Ebenso kann man statt $m_2 q$ und $q\mathfrak{q}$ die Strecken $m_2 \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{q}$ wählen. Die Integration von $e^u u^{a-1}$ längs der Bögen $\mathfrak{q}\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{q}$ liefert aber, wie gezeigt wurde, das Resultat Null. Also ist $\bar{\Gamma}(a)$ auch gleich dem Integral

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{\mathfrak{m}_1}^{\mathfrak{m}_2} e^u u^{a-1} du, \tag{9}$$

dessen Grenzen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ als die Ausdrücke

$$\mathfrak{m}_1 = \lim_{(s=\infty)} s e^{-(\pi-\lambda_1)i}, \quad \mathfrak{m}_2 = \lim_{(s=\infty)} s e^{(\pi-\lambda_2)i} \tag{10}$$

$\left(0 \leqq \lambda_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \lambda_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ definirt sind, und dessen Integrationsweg sich aus den Strecken

$$\mathfrak{m}_1 m_1, \quad m_1 i_1 k i_2 m_2, \quad m_2 \mathfrak{m}_2$$

zusammensetzt. Fügt man zu dem Integral (9) das (unendlich kleine) Integral der Function $e^u u^{a-1}$ längs des Bogens $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{q} \mathfrak{m}_1$ des Horizonts hinzu und transformirt den Weg in der angegebenen Art, so hat man die Formel

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{\mathfrak{m}_1}^{(0)} e^u u^{a-1} du, \tag{11}$$

in welcher für die Variable u (nach Fig. 2) die geschlossene Curve

$$\mathfrak{m}_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 q m_1 \mathfrak{m}_1$$

zur Anwendung kommt. Statt $\mathfrak{m}_1$ kann in (11) auch der Punkt $\mathfrak{m}_2$ zum Ausgangspunkt der Integration genommen werden; in diesem Falle durchläuft u den Weg

$$\mathfrak{m}_2 m_2 q m_1 i_1 k i_2 m_2 \mathfrak{m}_2.$$

Für die Potenz u^{a-1} gilt in (9) und (11) dieselbe Bestimmung wie in (1).

Die obigen Betrachtungen übertragen sich auf die Integrale (2) und (3). Integrirt man die Function $e^{-u} u^{a-1}$ längs eines Abschnittes derjenigen Hälfte des unendlichen Horizonts, wo die reellen Bestandtheile positiv sind, so ist das Integral unendlich klein. Also kann man in (2) und (3) den Weg der Variable u in der Art abändern, dass die Integralgrenzen nicht in den unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Axe, sondern in beliebige andere Punkte der soeben bezeichneten Horizonthälfte fallen. Aus (2) werden auf diese Weise die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{p_1}^{p_2} e^{-u} u^{a-1} du \tag{12}$$

und

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{\mathfrak{p}'}^{(0)} e^{-u} u^{a-1} du \tag{13}$$

abgeleitet, in denen

$$\mathfrak{p}_1 = \lim_{(s=\infty)} s e^{\lambda_1 i}, \quad \mathfrak{p}_2 = \lim_{(s=\infty)} s e^{-\lambda_2 i} \tag{14}$$

$\left(0 \leqq \lambda_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \lambda_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ gesetzt ist, und unter $\mathfrak{p}'$ ein beliebiger der zwei Werthe $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ verstanden wird. Der Integrationsweg von (12) wird in Figur 3 durch $\mathfrak{p}_1 p_1 q p_2 \mathfrak{p}_2$, der Integrationsweg von (13) durch $\mathfrak{p}_1 p_1 q p_2 k p_1 \mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p}_2 p_2 k p_1 q p_2 \mathfrak{p}_2$ angegeben. Für die Fixirung des Zweiges der Potenz u^{a-1} möge in (12) und (13) derjenige Punkt benutzt werden, in welchem der Integrationsweg die negative reelle Axe schneidet. Bei dem Integral (2) geht die Variable u vom Punkte k zum Punkte $-k$ (in Fig. 1, 2, 3 durch q bezeichnet) über, indem sie die obere Hälfte des Kreises $\mathfrak{K}$ im positiven Sinne durchläuft. Daher hat u^{a-1} für $u = -k$ den Werth $e^{(a-1)(\pi i + \log k)}$ wo $\log k$ den reellen Logarithmus bedeutet. Diese Bestimmung bleibt für die Integrale (12) und (13) in Kraft.

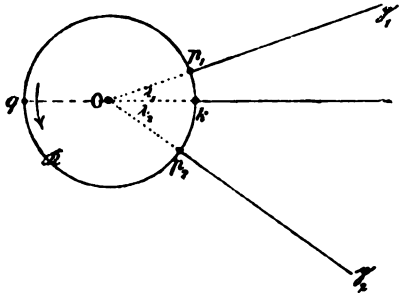


Fig. 3.

In ähnlicher Weise lässt sich der Integrationsweg der Integrale (5), (6), (7) modificiren. Nennt man $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die Producte

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e} e^{-(\pi - \lambda_1) i}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e} e^{(\pi - \lambda_2) i}, \tag{15}$$

in denen $\mathfrak{e}$ wiederum eine unendlich kleine positive reelle Zahl bezeichnet, und λ_1, λ_2 reell, positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, so kann man nach Fig. 2 in (5) den Weg

$$\mathfrak{e}_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 \mathfrak{e}_2$$

oder auch einen der zwei Wege

$$\mathfrak{e}_1 m_1 i_1 k i_2 m_2 q m_1 \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{e}_2 m_2 q m_1 i_1 k i_2 m_2 \mathfrak{e}_2$$

für die Variable t wählen, ohne hierdurch den Werth des Integrals (5) zu ändern. Denn das Integral der Function $e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1}$, genommen längs eines unendlich kleinen Kreisbogens (mit dem Radius $\mathfrak{e}$), welcher von $-\mathfrak{e}$ bis $\mathfrak{e}_1$ oder von $-\mathfrak{e}$ bis $\mathfrak{e}_2$ (auf der Seite der negativen reellen Werthe) führt, ist eine unendlich kleine Grösse. Demnach werden aus (3) die weiteren Formeln

(16) $$\bar{\Gamma}(a) = \int_{\mathfrak{c}_1}^{\mathfrak{c}_2} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

und

(17) $$\bar{\Gamma}(a) = \int_{\mathfrak{c}'}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt$$

erhalten, in denen die soeben angeführten Integrationswege anzuwenden sind, und durch $\mathfrak{c}'$ ein beliebiger der zwei Werthe $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ bezeichnet wird. Für $t = k$ (Fig. 2) hat man in den beiden letzten Gleichungen die Potenz t^{-a-1} gleich demjenigen Werthe $e^{-(a+1)\log k}$, in welchem $\log k$ reell ist, zu nehmen.

§ 3.

Es soll noch kurz auf den Fall eingegangen werden, dass in den vorstehenden Rechnungen die Constanten λ_1 und λ_2 den Werth $\frac{\pi}{2}$ annehmen, so dass in Fig. 2 die Geraden $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ in den negativen und den positiven Zweig der imaginären Axe übergehen. In § 2 wurde mit Hülfe der Ungleichheit (8) gezeigt, dass das Integral der Function $e^u u^{a-1}$ einen unendlich kleinen Werth hat, wenn die Integration über einen (bei $-\infty$ beginnenden) Theil des zwischen $-\infty$ und $-\infty i$, resp. zwischen $-\infty$ und $+\infty i$ liegenden Quadranten des unendlichen Horizonts erstreckt wird. Nun verschwindet, wie aus (8) folgt, auch das über den ganzen Quadranten ausgedehnte Integral (was in (8) dem Werth $\lambda = \frac{\pi}{2}$ entspricht), falls der reelle Theil a_1 der Constante a negativ ist. Allerdings darf für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ die auf der rechten Seite von (8) stehende Exponentialgrösse $e^{s\cos\vartheta_0 - a_2\vartheta_0}$ mit wachsendem s nicht mehr als identisch mit Null angenommen werden, da in Bezug auf ϑ_0 nur die Grenzwerthe $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$ (in § 2: $-\pi+\lambda$), zwischen denen ϑ_0 liegt, bekannt sind, und folglich für $\cos\vartheta_0$ der Werth Null nicht ausgeschlossen ist. Im Falle $a_1 < 0$ verschwindet aber die rechte Seite von (8) für $s = \infty$ wegen des Factors s^{a_1}.

Diese Betrachtungen führen zu dem Grenzfall der Formel (9), wo $\mathfrak{m}_1$ durch $-\infty i$ und $\mathfrak{m}_2$ durch $+\infty i$ ersetzt wird. Man hat, wenn der reelle Theil von a negativ ist, die Gleichung

(18) $$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^u u^{a-1} du,$$

in welcher die Variable u im Uebrigen die ganze imaginäre Axe durchläuft, jedoch den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht. Denn die Schlüsse, durch die man die Gleichung (9) bewies,

bleiben auch hier in Kraft. Der Integrationsweg von (18) besteht nach Fig. 2 aus den ausserhalb der Punkte i_1 und i_2 liegenden Abschnitten der imaginären Axe und aus dem Halbkreise $i_1 k i_2$. Dagegen ist

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^u u^{a-1} du = 0, \tag{19}$$

falls der Weg der Variablen u statt des Halbkreises $i_1 k i_2$ den Halbkreis $i_1 q i_2$ (Fig. 2) enthält, falls also der Nullpunkt auf der Seite der negativen reellen Werthe umgangen wird. Die geschlossene Curve, welche sich aus der geradlinigen Strecke von $-\infty i$ bis zum Punkte i_1, dem Halbkreise $i_1 q i_2$, der geradlinigen Strecke von i_2 bis $+\infty i$ und der auf der Seite der negativen reellen Werthe liegenden Hälfte des unendlichen Horizonts zusammensetzt, bildet die Begrenzung eines Flächenstücks, auf dem die Function $e^u u^{a-1}$ eindeutig und stetig ist. Da nun das über die Horizonthälfte erstreckte Integral den Werth Null hat, so verschwindet auch das Integral (19), dessen Integrationsweg aus den drei übrigen genannten Strecken besteht.

Substituirt man in (19) $u = -v$, so entsteht die Gleichung

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{-v} v^{a-1} dv = 0, \tag{19a}$$

in welcher vorausgesetzt ist, dass die Variable den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht.

Wie die Formel (9), so kann auch die Formel (11), sobald der reelle Theil von a negativ ist, in der Art modificirt werden, dass der Werth $-\infty i$ an die Stelle von $\mathfrak{m}_1$, resp. der Werth $+\infty i$ an die Stelle von $\mathfrak{m}_2$ tritt. Man erhält, gemäss den Bemerkungen am Eingang dieses Paragraphen, im Fall $a_1 < 0$ die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty i}^{\bar{(0)}} e^u u^{a-1} du, \tag{20}$$

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{+\infty i}^{\bar{(0)}} e^u u^{a-1} du. \tag{21}$$

Hier kommt (nach Fig. 2) der ganze Kreis $\mathfrak{K}$ in dem Integrationswege vor; ausserdem wird in (20) die Strecke von $-\infty i$ bis i_1, in (21) die Strecke von $+\infty i$ bis i_2 in beiden Richtungen durchlaufen.

Es möge erwähnt sein, dass die Gleichungen (18) und (19) gültig bleiben, wenn a ein positiver reeller Bruch ist. Dieselben sind dann eine unmittelbare Folge der Dirichlet'schen Formeln

$$\int_0^\infty w^{a-1} \cos w \, dw = \cos \frac{\pi a}{2} \Gamma(a), \tag{22}$$

$$\int_0^\infty w^{a-1} \sin w \, dw = \sin \frac{\pi a}{2} \Gamma(a), \tag{23}$$

in denen $\Gamma(a)$ das Euler'sche Integral 2ter Art bedeutet. Bei dem Integral (18) nimmt die Potenz u^{a-1} im Punkte i_1 (Fig. 2) den Werth $e^{-\frac{\pi i}{2}(a-1)} k^{a-1}$, im Punkte i_2 den Werth $e^{\frac{\pi i}{2}(a-1)} k^{a-1}$ an, wo k^{a-1} die positive reelle Potenz von k bedeutet. Denn nachdem $u = ke^{\vartheta i}$ gesetzt ist, hat man die anfangs erwähnte Bedingung für u^{a-1} zu berücksichtigen. Substituirt man auf der negativen imaginären Axe $u = -ir$, auf der positiven $u = +ir$, so wird auf ersterer das Product $u^{a-1}du$ gleich $e^{-\frac{\pi i a}{2}} r^{a-1}dr$, auf letzterer gleich $e^{\frac{\pi i a}{2}} r^{a-1}dr$, da die Bestimmung im Punkte i_1, resp. i_2, massgebend ist. Bei dem Integral (19) hat dagegen, weil der Nullpunkt auf der negativen Seite umgangen wird, das Product $u^{a-1}du$ auf der positiven imaginären Axe den Werth $e^{-\frac{3\pi i a}{2}} r^{a-1}dr$. Man wähle, was erlaubt ist, den Kreisradius k unendlich klein; dann sind die Integrale der Function $e^u u^{a-1}$ längs der Halbkreise $i_1 k i_2$ und $i_1 q i_2$ (da a positiv sein soll) zu vernachlässigende Grössen. Hierdurch geht das auf der rechten Seite von (18) stehende Integral, wenn man die Gleichungen (22) und (23) benutzt, in die Summe

$$\left(e^{\frac{\pi i a}{2}} - e^{-\frac{\pi i a}{2}}\right)\int_0^\infty r^{a-1}\cos r\,dr + i\left(e^{\frac{\pi i a}{2}} + e^{-\frac{\pi i a}{2}}\right)\int_0^\infty r^{a-1}\sin r\,dr$$

$$= 2i\sin(\pi a)\,\Gamma(a) = \bar{\Gamma}(a)$$

über, während für das Integral (19) der Werth

$$e^{-\pi i a}\,\Gamma(a)\left\{-\cos\frac{\pi a}{2}\left(e^{\frac{\pi i a}{2}} - e^{-\frac{\pi i a}{2}}\right) + i\sin\frac{\pi a}{2}\left(e^{\frac{\pi i a}{2}} + e^{-\frac{\pi i a}{2}}\right)\right\} = 0$$

erhalten wird.

Formt man das Integral (18) durch die Substitution $u = \frac{1}{t}$ um, so ergiebt sich, dass $\Gamma(a)$ auch mit dem Ausdruck

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\varepsilon i}^{+\varepsilon i} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1}dt \tag{24}$$

identisch ist, falls die Variable t den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht. Durch ε wird, wie in § 1, eine unendlich kleine positive reelle Constante bezeichnet. Der Integrationsweg von (24) lässt sich (da k willkürlich ist, statt $\frac{1}{k}$ also wieder k genommen werden darf) nach Fig. 2 durch das Stück der negativen imaginären Axe von 0 bis i_1, den Halbkreis $i_1 k i_2$ und das Stück der positiven imaginären Axe von i_2 bis 0 darstellen. Wird der genannte Weg in der Art abgeändert, dass der Halbkreis $i_1 q i_2$ an die Stelle des Halbkreises $i_1 k i_2$ tritt, so ist, wie aus (19) folgt,

$$\int_{-\varepsilon i}^{+\varepsilon i} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt = 0. \tag{25}$$

Aus (20) und (21) erhält man, wenn $u = \frac{1}{t}$ gesetzt wird, die zu (17) analogen Gleichungen

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\varepsilon i}^{\bar{+}(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt \tag{26}$$

und

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{\varepsilon i}^{\bar{+}(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt. \tag{27}$$

In den Formeln (24) bis (27) wird der reelle Bestandtheil der Constante a als negativ vorausgesetzt. Der in (24), (26), (27) anzuwendende Zweig der Potenz t^{-a-1} ist derselbe wie in (5), (16), (17), d. h. es gilt auch hier für t^{-a-1} die am Schlusse des § 2 genannte Bedingung.

Kiel, im Mai 1891.

Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Im Folgenden sollen gewisse Integrale betrachtet werden, in denen x als Parameter vorkommt, während gleichzeitig die Grenzen von x abhängen. Es werde in der Ebene, welche die complexen Werthe darstellt, eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch die Punkte 0 und x gelegt und ein Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Radius γ um den Nullpunkt beschrieben. Bezeichnet man durch ε eine unendlich kleine positive reelle Constante, so wird die Grösse $-\varepsilon x$ durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ abgebildet, welcher dem Nullpunkte benachbart und durch letzteren vom Punkte x getrennt ist. Die Durchschnittspunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$ mögen d und $\mathfrak{d}$ heissen, und zwar werde der in der Richtung $0\mathfrak{x}$ liegende $\mathfrak{d}$ genannt. Es sei nun S das Integral

$$S = \int_{-\varepsilon x}^{\overline{\mathfrak{d}(0)}} e^{\frac{x}{u}}\, u^{p-1}\, \varphi(u)\, du, \tag{1}$$

in welchem die Variable u zunächst die geradlinige Strecke vom Punkte $\mathfrak{x}$ bis zum Punkte $\mathfrak{d}$, hierauf den Kreis $\mathfrak{K}$ in positiver Drehungsrichtung und zum zweiten Mal das genannte Stück der Geraden $\mathfrak{G}$ vom Punkte $\mathfrak{d}$ bis zum Punkte $\mathfrak{x}$ durchläuft*). Man setzt voraus, dass das Integral S einen bestimmten Sinn hat, und dass die (von u allein abhängige) Function $\varphi(u)$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ eindeutig ist; p bedeutet eine beliebige Constante.

Das Integral S nimmt den Factor $e^{2\pi i p}$ auf, wenn die Grösse x einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt. Es sei x' der beliebige Anfangswerth von x, und $\mathfrak{x}' = -\varepsilon x'$. Die durch die Punkte x', 0, $\mathfrak{x}'$ gehende Gerade, welche $\mathfrak{G}'$ heissen möge, schneide den

*) Für das obige Integral ist die abgekürzte, auf S. 472 des 35ten Bandes dieser Annalen angegebene Bezeichnung angewendet worden.

Kreis $\mathfrak{K}$ in den Punkten d' und $\mathfrak{d}'$ (Fig. 1). Der zu $x = x'$ gehörige Anfangswerth von S sei S'. Umkreist x den Nullpunkt längs einer Curve $x'abx'$, so ändert sich der Integrationsweg von S dadurch, dass die Gerade $\mathfrak{G}$ um den Nullpunkt rotirt; der schliessliche Integrationsweg stimmt aber mit dem anfänglichen überein. Von den verschiedenen Zweigen der Potenz u^{p-1} wird ein bestimmter, den man durch $[u^{p-1}]$ hezeichnet, an der unteren Grenze $u = \mathfrak{x}'$ des Integrals S' fixirt. Da $\mathfrak{x}$ mit x zugleich einen positiven Umlauf um den Nullpunkt macht, und die Änderung der betrachteten Functionen als stetig vorausgesetzt wird, so geht, indem x die Curve $x'abx'$ durchläuft, der zur unteren Grenze $u = \mathfrak{x}$ gehörige Werth der Potenz u^{p-1} von $[\mathfrak{x}'^{p-1}]$ in $e^{2\pi i p}[\mathfrak{x}'^{p-1}]$ über. Die Factoren $e^{\frac{x}{u}}$ und $\varphi(u)$ sind eindeutig. Also ist der Endwerth von S gleich $e^{2\pi i p} S'$.

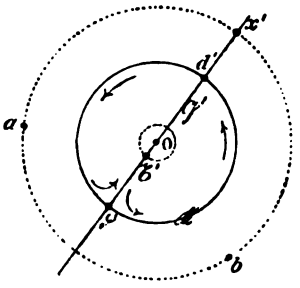


Fig. 1.

Aus dieser Eigenschaft des Integrals S folgt, dass das Doppelintegral

$$T = \int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{q-1}\, dv \int_{-\varepsilon v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1}\, \varphi(u)\, du, \tag{2}$$

dessen Variable u, v analoge Wege zurücklegen sollen, wie für (1) angegeben wurde, den Factor $e^{2\pi i(p+q)}$ aufnimmt, wenn x den Nullpunkt im positiven Sinne umkreist. Denn die Grösse

$$v^{q-1} \int_{-\varepsilon v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1}\, \varphi(u)\, du$$

verhält sich, wie gezeigt wurde, in der Umgebung von $v = 0$ wie ein Product $v^{p+q} f(v)$, in welchem $f(v)$ eine in dem genannten Gebiet eindeutige Function von v bezeichnet. Der vom Integral (1) bewiesene Satz kann somit zum zweiten Male angewendet werden.

Aus demselben Grunde tritt, falls $\psi(v)$ bei $v = 0$ eindeutig ist, auch zu dem Integral

$$\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{q-1}\, \psi(v)\, dv \int_{-\varepsilon v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1}\, \varphi(u)\, du \tag{3}$$

der Factor $e^{2\pi i(p+q)}$ hinzu, wenn x einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt. Es sei ferner $\chi(w)$ eine in der Umgebung von $w = 0$ eindeutige Function von w; dann nimmt das dreifache Integral

$$\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{w}} w^{r-1}\, \chi(w)\, dw \int_{-\varepsilon w}^{\overline{(0)}} e^{\frac{w}{v}} v^{q-1}\, \psi(v)\, dv \int_{-\varepsilon v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1}\, \varphi(u)\, du \tag{4}$$

bei einem Umlauf der Grösse x um den Nullpunkt den Factor $e^{2\pi i(p+q+r)}$ auf. Analoges gilt von den auf dieselbe Art gebildeten n-fachen Integralen.

Die obige Betrachtung lässt sich auf die Integrale

$$(5)\quad \mathfrak{S} = \int_{-\mathfrak{e}x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}} (u - x)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u)\, du,$$

$$(6)\quad \mathfrak{T} = \int_{-\mathfrak{e}x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} (v - x)^{l-1} v^{q-1} \psi(v)\, dv \int_{-\mathfrak{e}v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} (u - v)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u)\, du$$

ausdehnen, bei denen dieselben Integrationswege wie bei (1), bezw. (2) zur Anwendung kommen sollen (positiver Umlauf um den Nullpunkt von $-\mathfrak{e}x$ aus, bezw. von $-\mathfrak{e}v$ aus). Unter $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ werden wieder Functionen verstanden, die in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig sind, während k, l, p, q beliebige Constante bedeuten. Man lässt x die Curve $x'abx'$ durchlaufen (Fig. 1) und bezeichnet die anfänglichen, zu $x = x'$ gehörigen Werthe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{T}'$. In $\mathfrak{S}'$ werden für den Ausgangspunkt $u = -\mathfrak{e}x' = \mathfrak{x}'$ des Integrationsweges bestimmte Werthe der Potenzen $(u - x')^{k-1}$ und u^{p-1} fixirt, welche man $[(\mathfrak{x}' - x')^{k-1}]$ und $[\mathfrak{x}'^{p-1}]$ nennt. Die x-Curve möge den Integrationsweg vollständig umschliessen, was keine Beschränkung ist, da in Fig. 1 der Kreis $\mathfrak{K}$ beliebig klein genommen werden kann. Dann wird (wie bei S) der Integrationsweg des Integrals $\mathfrak{S}$ beim Variiren von x nur insofern ein anderer, als die Gerade $\mathfrak{G}$ sich dreht. Der zur unteren Integralgrenze $u = -\mathfrak{e}x = \mathfrak{x}$ (des Integrals $\mathfrak{S}$) gehörige Werth der Potenz $(u - x)^{k-1}$ nimmt, wenn x den Weg $x'abx'$ zurücklegt, den Factor $e^{2\pi ik}$ auf. Denn der genannte Werth $(\mathfrak{x} - x)^{k-1}$ ist vom Werthe $(\mathfrak{x}' - x)^{k-1}$, mit dem er für $x = x'$ übereinstimmt, stets nur unendlich wenig verschieden, da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ verschwindend kleine Grössen sind. Zur Potenz $(\mathfrak{x}' - x)^{k-1}$ tritt aber durch den Weg $x'abx'$ der Variable x, welcher den (festen) Punkt $\mathfrak{x}'$ umkreist, der Factor $e^{2\pi ik}$ hinzu. Hinsichtlich der Potenz u^{p-1} gilt für (5) dasselbe wie für (1). Die an der unteren Integralgrenze erfolgende Aenderung des Werthes der zu integrirenden Function überträgt sich, der vorausgesetzten Stetigkeit halber, auch auf alle folgenden Integralelemente. Also hat das Integral (5) die Eigenschaft, den Factor $e^{2\pi i(k+p)}$ aufzunehmen, wenn x die Curve $x'abx'$ durchläuft.

Für das Integral (6) ist zu berücksichtigen, dass, gemäss dem soeben erhaltenen Resultat, das Product

$$v^{q-1} \psi(v) \int_{-\mathfrak{e}v}^{\overline{(0)}} e^{\frac{v}{u}} (u - v)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u)\, du$$

gleich einem Ausdruck $v^{k+p+q} F(v)$ gesetzt werden kann, wo unter $F(v)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes eindeutige Function von v

verstanden wird. Die auf $\mathfrak{S}$ bezüglichen Schlussfolgerungen sind also auch auf $\mathfrak{T}$ anwendbar, wenn statt u, k, p, φ die Grössen $v, l, k+p+q, F$ eingeführt werden. Demnach nimmt das Integral $\mathfrak{T}$ den Factor $e^{2\pi i(k+l+p+q)}$ auf, wenn x den Nullpunkt im positiven Sinne durchläuft. Man erkennt leicht, dass ein entsprechender Satz für die mehrfachen Integrale von der obigen Form besteht.

§ 2.

Man setze nunmehr voraus, dass die Function $\varphi(u)$ in der Umgebung des Punktes $u = 0$ nicht nur eindeutig, sondern auch stetig sei, so dass sie in eine convergente Reihe

$$\varphi(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_\nu u^\nu + \cdots \tag{7}$$

entwickelt werden kann. Dann ergiebt sich für das Integral (1) die Reihe

$$S = c_0 G_0 + c_1 G_1 + c_2 G_2 + \cdots + c_\nu G_\nu + \cdots, \tag{8}$$

in der G_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das Integral

$$G_\nu = \int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}} u^{p+\nu-1}\, du$$

bedeutet. Wird hierin

$$u = x\mathfrak{u}, \quad du = x d\mathfrak{u}$$

substituirt, so ist bei der Integration nach $\mathfrak{u}$ die untere Grenze gleich dem constanten Werthe $-\varepsilon$. Die Variable $\mathfrak{u}$ durchläuft, von $-\varepsilon$ ausgehend, ein Stück der negativen reellen Axe, umkreist den Nullpunkt im positiven Sinne und kehrt längs der negativen reellen Axe zum Punkte $-\varepsilon$ zurück. Man findet auf diese Weise die Gleichung

$$G_\nu = x^{p+\nu} \int_{-\varepsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{\mathfrak{u}}}\, \mathfrak{u}^{p+\nu-1}\, d\mathfrak{u}.$$

Der Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, der in (1) einen Theil des Weges von u ausmacht, wurde durch γ bezeichnet. Der Weg von $\mathfrak{u}$ in der letzteren Gleichung für G_ν enthält also einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{\gamma}{x}$. Jedoch kann statt desselben ein Kreis mit einem beliebigen constanten Radius γ' genommen werden, da die Grösse des Kreisradius keinen Einfluss auf den Werth des obigen Integrals hat. Indem man die Gleichung (5) des vorstehenden Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$“ *) anwendet (unter der Voraussetzung, dass der Zweig der Potenz $\mathfrak{u}^{p+\nu-1}$ in derselben Art, wie dort angegeben ist, bestimmt wird), erhält man, nach Berücksichtigung der Reductionsformel **)

*) Seite 158 dieses Bandes.

**) Seite 515 des 35ten Bandes dieser Annalen.

$$\bar{\Gamma}(a-\nu) = \frac{(-1)^\nu \bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)}, \tag{9}$$

für G_ν den Ausdruck

$$G_\nu = x^{p+\nu}\bar{\Gamma}(-p-\nu) = \frac{x^{p+\nu}\bar{\Gamma}(-p)}{(p+1)(p+2)\dots(p+\nu)}.$$

Demnach entsteht aus (8) die Gleichung

$$\int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{u}} u^{p-1}\{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_\nu u^\nu + \dots\}\,du \tag{10}$$
$$= x^p \bar{\Gamma}(-p)\left\{c_0 + \frac{c_1 x}{p+1} + \frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{c_\nu x^\nu}{[p+1]_\nu^+} + \dots\right\},$$

in welcher $[p+1]_\nu^+$ die Factorielle

$$[p+1]_\nu^+ = (p+1)(p+2)\cdots(p+\nu) \tag{11}$$

bezeichnet.

Als Beispiel möge einerseits

$$\varphi(u) = e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \cdots,$$

andererseits

$$\varphi(u) = (1-u)^{\varrho-\alpha-1} = 1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1}u + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2}u^2 + \cdots$$

genommen werden. Dann ergeben sich aus (10), wo gleichzeitig $p = 1-\varrho$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$\int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{u}+u} u^{-\varrho}\,du \tag{12}$$
$$= x^{1-\varrho}\bar{\Gamma}(\varrho-1)\left\{1 + \frac{x}{1.(2-\varrho)} + \frac{x^2}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)} + \cdots\right\}$$

und

$$\int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{u}} u^{-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du \tag{13}$$
$$= x^{1-\varrho}\bar{\Gamma}(\varrho-1)\left\{1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1.(2-\varrho)}x + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)}x^2 + \cdots\right\}.$$

Ersetzt man in dem Doppelintegral (2) die Constante q durch $q-p$ und substituirt für $\varphi(u)$ die Reihe (7), so erhält man die Gleichung

$$\int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{q-p-1}\,dv \int_{-\epsilon v}^{-(0)} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1}\varphi(u)\,du \tag{14}$$
$$= c_0 H_0 + c_1 H_1 + c_2 H_2 + \cdots c_\nu H_\nu + \cdots,$$

in der H_ν das Doppelintegral

$$H_\nu = \int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{q-p-1}\,dv \int_{-\epsilon v}^{-(0)} e^{\frac{v}{u}} u^{p+\nu-1}\,du$$

bedeutet. Die Substitution

$$u = vu = \mathfrak{v}x u, \qquad v = x\mathfrak{v}$$
$$du = \mathfrak{v}x\, du, \qquad dv = x\, d\mathfrak{v},$$

lässt H_ν in das Product

$$x^{q+\nu}\int_{-\epsilon}^{-(0)} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}}\, \mathfrak{v}^{q+\nu-1}\, d\mathfrak{v} \int_{-\epsilon}^{-(0)} e^{\frac{1}{u}}\, u^{p+\nu-1}\, du,$$
$$= x^{q+\nu}\bar{\Gamma}(-p-\nu)\bar{\Gamma}(-q-\nu),$$

übergehen, wofür (nach (9) und (11))

$$\frac{x^{q+\nu}\bar{\Gamma}(-p)\,\bar{\Gamma}(-q)}{[p+1]_\nu^+\,[q+1]_\nu^+}$$

geschrieben werden darf. Also folgt aus (14) die Formel

$$(15)\quad \int_{-\epsilon x}^{-(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{q-p-1}\, dv \int_{-\epsilon v}^{-(0)} e^{\frac{v}{u}}\, u^{p-1}(1 + c_1 u + \cdots + c_\nu u^\nu + \cdots)\, du$$
$$= x^q\bar{\Gamma}(-p)\bar{\Gamma}(-q)\left\{c_0 + \frac{c_1 x}{(p+1)(q+1)} + \cdots + \frac{c_\nu x^\nu}{[p+1]_\nu^+\,[q+1]_\nu^+} + \cdots\right\}.$$

Auch diese Betrachtung lässt sich leicht auf die analog gebildeten vielfachen Integrale ausdehnen.

Es ist zu erwähnen, dass in der obigen Gleichung (10) die linke Seite in der Art modificirt werden kann, dass die Formel (16) des vorstehenden Aufsatzes — statt der Formel (5) desselben — Anwendung findet. Man bezeichne durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei reelle, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende Constante und durch $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die Grössen

$$(16)\qquad \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}e^{-i\varkappa_1}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}e^{i\varkappa_2},$$

in denen $\mathfrak{e}$ wiederum eine unendlich kleine positive reelle Zahl bedeutet. Die Producte $\mathfrak{e}_1 x$ und $\mathfrak{e}_2 x$ nenne man kurz $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Dann bilden die Geraden $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, welche vom Nullpunkte aus durch den Punkt $\mathfrak{x}_1$, resp. durch den Punkt $\mathfrak{x}_2$ gelegt werden, die (stumpfen) Winkel $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$, die den Nullpunkt mit x verbindet (Fig. 2). Der um den Nullpunkt beschriebene Kreis $\mathfrak{K}$ werde von der Geraden $\mathfrak{N}_1$ im Punkte n_1, von der Geraden $\mathfrak{N}_2$ im Punkte n_2 und von der Geraden $\mathfrak{G}$ im Punkte d getroffen. Wählt man nun für das Integral

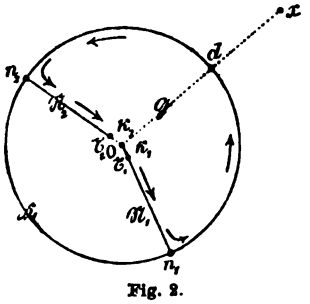


Fig. 2.

$$(17)\qquad \int_{\mathfrak{e}_1 x}^{\mathfrak{e}_2 x} e^{\frac{x}{u}}\, u^{p-1}\{c_0 + c_1 u + \cdots + c_\nu u^\nu + \cdots\}\, du$$

den Integrationsweg (Fig. 2)

$$\mathfrak{r}_1\, n_1\, d\, n_2\, \mathfrak{r}_2$$

(dessen mittlerer Theil in positiver Drehungsrichtung von n_1 zu n_2 längs des Kreises $\mathfrak{K}$ übergeht), so führt die Substitution $u = xu$ zu der Gleichung

$$\int_{c_1 x}^{c_2 x} e^{\frac{x}{u}}\, u^{p+\nu-1}\, du = x^{p+\nu} \int_{c_1}^{c_2} e^{\frac{1}{u}}\, u^{p+\nu-1}\, du.$$

Die rechte Seite derselben ist mit dem Ausdruck

$$x^{p+\nu}\, \bar{\Gamma}(-p-\nu), \quad = \frac{x^{p+\nu}\, \bar{\Gamma}(-p)}{(p+1)(p+2)\dots(p+\nu)},$$

identisch. Denn die Variable u durchläuft den nämlichen Weg, der in der Formel (16) der vorstehenden Abhandlung als Weg der Variable t vorausgesetzt ist. Also besteht für das obige Integral (17) die Gleichung

$$(18)\quad \int_{c_1 x}^{c_2 x} e^{\frac{x}{u}}\, u^{p-1} \left\{ c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_\nu u^\nu + \cdots \right\} du$$
$$= x^p\, \bar{\Gamma}(-p) \left\{ c_0 + \frac{c_1 x}{p+1} + \frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{c_\nu x^\nu}{[p+1]_\nu^+} + \cdots \right\}.$$

Man kann ferner, wenn der reelle Theil der Constante p positiv ist, als Grenzen des Integrals (17) — nach Formel (24) des vorstehenden Aufsatzes — auch die Grössen $-\varepsilon xi$ und $+\varepsilon xi$ wählen, ohne hierdurch den Werth des Integrals zu ändern. In diesem Falle, welcher aus dem soeben behandelten für die Werthe $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{\pi}{2}$ entsteht, enthält der Integrationsweg die Hälfte des Kreises $\mathfrak{K}$ (Fig. 2), die wiederum in positiver Drehungsrichtung durchlaufen wird.

Kiel, im Mai 1891.

Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{1}$$

in der unter ϱ eine nicht ganzzahlige, aber sonst beliebige Constante verstanden wird, gestattet, wie der Verfasser in einer früheren Arbeit*) gezeigt hat, eine Lösung durch bestimmte Integrale von der Form

$$y = \int_g^h (u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} U\,du,$$

wo U nur von u abhängt. Im Folgenden soll auf ein anderes Verfahren, die Gleichung (1) durch bestimmte Integrale zu lösen, eingegangen werden. Man substituire in (1), indem man durch U wiederum eine Function von u allein und durch g, h Constante bezeichnet, das Integral

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{u}} U\,du. \tag{2}$$

Dann entsteht die Gleichung

$$\int_g^h e^{\frac{x}{u}} \frac{x}{u^2} U\,du + \int_g^h e^{\frac{x}{u}} \left(\frac{\varrho}{u} - 1\right) U\,du = 0,$$

deren erster Summandus durch theilweise Integration in den Ausdruck

$$\left[-e^{\frac{x}{u}} U\right]_{u=g}^{u=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{u}} \frac{dU}{du}\,du$$

*) „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", §§ 2—4, Band 38 dieser Annalen, S. 228—240.

umgeformt wird. Auf diese Weise ergiebt sich

$$(3) \qquad \left[-e^{\frac{x}{u}}U\right]_{u=g}^{u=h}+\int_g^h e^{\frac{x}{u}}\left\{\frac{dU}{du}+\left(\frac{\varrho}{u}-1\right)U\right\}du=0.$$

Man stellt nun für U die Differentialgleichung

$$(4) \qquad \frac{dU}{du}+\left(\frac{\varrho}{u}-1\right)U=0$$

auf, die für U den Werth

$$(5) \qquad U=e^u u^{-\varrho}$$

liefert. Das Integral (2) geht hierdurch in den Ausdruck

$$(6) \qquad y=\int_g^h e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du$$

über. Die Grenzen g, h haben, nach (3), die Bedingung

$$(7) \qquad \left[e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\right]_{u=h}-\left[e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\right]_{u=g}=0$$

zu erfüllen*).

Die Gleichung (7) wird zunächst durch die Werthe $g=h=-\infty$ befriedigt. Man lasse in (6) die Variable u von dem unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe ausgehen und nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt zu dem genannten unendlich fernen Punkte zurückkehren. Das hierdurch definirte Integral

$$(8) \qquad y_1=\int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du$$

ist die eindeutige Hauptlösung der Differentialgleichung (1). Setzt man

$$e^{\frac{x}{u}}=1+\frac{x}{u}+\frac{1}{1.2}\frac{x^2}{u^2}+\cdots+\frac{1}{\nu!}\frac{x^\nu}{u^\nu}+\cdots,$$

so wird y_1 gleich der Reihe

$$y_1=K_0+K_1\frac{x}{1}+K_2\frac{x^2}{1.2}+\cdots+K_\nu\frac{x^\nu}{\nu!}+\cdots,$$

in der K_ν (für $\nu=0, 1, 2, \ldots$) das constante Integral

$$K_\nu=\int_{-\infty}^{(0)} e^u\,u^{-\varrho-\nu}\,du$$

bedeutet. Es werde hier derjenige Zweig der Potenz $u^{-\varrho-\nu}$ gewählt, bei dem in der Gleichung

$$u^{-\varrho-\nu}=e^{-(\varrho+\nu)\log u}$$

*) Man vergleiche auch C. Jordan, Cours d'analyse, Tome III, § 204 (Paris, Gauthier-Villars, 1887).

der Werth $\log u$ für den Schnittpunkt der u-Curve mit der positiven reellen Axe reell ist. Dann hat man*)

$$K_\nu = \bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu) = \frac{\bar{\Gamma}(1-\varrho)}{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)\dots(\varrho+\nu-1)}.$$

Also führt, bei Anwendung der abgekürzten Bezeichnung

$$\mathfrak{F}(\varrho; x) = 1 + \frac{x}{1\cdot\varrho} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot\varrho(\varrho+1)} + \cdots \text{ inf.}, \tag{9}$$

die obige Entwickelung zu der Gleichung

$$y_1 = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho; x). \tag{10}$$

Ist der reelle Bestandtheil von ϱ grösser als 1, so kann, wie erwähnt sein möge, an Stelle von (8) auch das Integral

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{x}{u}+u}\, u^{-\varrho}\, du$$

genommen werden, in welchem die Variable u im Uebrigen die imaginäre Axe durchläuft, jedoch den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht. Denn in diesem Falle hat man, nach Formel (18) des Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$“ **), für die Grösse $\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu)$ den Ausdruck

$$\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu) = \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^u\, u^{-\varrho-\nu}\, du.$$

Wird das letztere Integral für K_ν substituirt, so folgt aus der soeben angestellten Rechnung die (für $\varrho > 1$ geltende) Gleichung

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{x}{u}+u}\, u^{-\varrho}\, du = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho; x). \tag{11}$$

Die Grenzen g, h des Integrals (6) wurden bisher als constant vorausgesetzt. Man kann indessen, wenn durch ε eine unendlich kleine positive reelle Constante bezeichnet wird, auch den Werth $-\varepsilon x$ für g oder h wählen. Denn bei der Differentiation des Integrals (6) nach x verschwinden in diesem Falle diejenigen Summanden, die von der Variabilität der Grenzen g, h herrühren. Für $g = h = -\varepsilon x$ entsteht aus (6), wenn man die Variable u einen positiven Umlauf um den Nullpunkt machen lässt, der Ausdruck

$$y_2 = \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{u}+u}\, u^{-\varrho}\, du, \tag{12}$$

welcher das mehrdeutige Hauptintegral der Differentialgleichung (1) darstellt. Die Entwickelung dieses Integrals nach steigenden Potenzen

*) Bd. 35 dieser Annalen, S. 514 und 515.

**) Seite 163 dieses Bandes.

von x wurde bereits in der Formel (12) des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen" angegeben. Bei Benutzung der Bezeichnung (9) hat man die Gleichung

$$y_2 = \bar{\Gamma}(\varrho - 1)\, x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2 - \varrho; x). \tag{13}$$

Die $\bar{\Gamma}$-Integrale vermitteln demnach sowohl in (10) und (11) als auch in (13) den Zusammenhang zwischen der obigen Lösung der Differentialgleichung (1) durch bestimmte Integrale und der Lösung durch Potenzreihen*).

*) Wird die Substitution

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{u}}\, U\, du$$

auf die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = (x - \varrho)\frac{dy}{dx} + \alpha y \tag{A}$$

(cfr. die Arbeit des Verfassers „Ueber die lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit lin. Coeff." im 36ten Bande dieser Annalen, S. 84) angewendet, so findet man für U die Function $u^{-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}$. Als mehrdeutige Hauptlösung von (A) ergiebt sich dann das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty x}^{\overline{+}(0)} e^{\frac{x}{u}}\, u^{-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

welches nach Formel (13) des vorstehenden Aufsatzes „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen" mit der Reihe

$$x^{1-\varrho}\bar{\Gamma}(\varrho-1)\left\{1 + \frac{\alpha-\varrho+1}{1.(2-\varrho)}x + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)}x^2 + \cdots\right\}$$

identisch ist. Die eindeutige particuläre Lösung von (A) wird, falls der reelle Theil von $\varrho - \alpha$ positiv ist, durch das Integral

$$\int_1^{\overline{+}(0)} e^{\frac{x}{u}}\, u^{-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

und im allgemeinen Falle durch das Integral

$$\int_c^{\overline{+}(1,0,1-,0-)} e^{\frac{x}{u}}\, u^{-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

dargestellt. Das erstere Integral geht, wenn $e^{\frac{x}{u}}$ entwickelt wird, in die Reihe

$$e^{\pi i(1-\varrho)}\overline{E}(\varrho-\alpha, 1-\varrho)\left\{1 + \frac{\alpha}{1.\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots\right\},$$

das letztere in die Reihe

$$e^{\pi i(1-\alpha)}\mathfrak{E}(\varrho-\alpha, 1-\varrho)\left\{1 + \frac{\alpha}{1.\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots\right\}$$

(s. Band 35 dieser Annalen, S. 513 und 499) über.

Man bemerke, dass die Reihe

$$(14)\quad J(x) = x^\lambda \left\{1 - \frac{x^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \cdots \text{inf.}\right\},$$

welche unter dem Namen der Bessel'schen Function bekannt ist, nach (9) als das Product

$$x^\lambda \mathfrak{F}\left(\lambda+1;\ -\frac{x^2}{4}\right)$$

geschrieben werden kann. Daher wird durch Benutzung der Gleichungen (8) und (10), in denen man die Grössen x und ϱ durch $-\frac{x^2}{4}$ und $\lambda+1$ ersetzt, für $J(x)$ der Ausdruck

$$(15)\qquad J(x) = \frac{x^\lambda}{\bar{\Gamma}(-\lambda)} \int_{-\infty}^{\bar{\infty}(0)} e^{-\frac{x^2}{4u}+u}\, u^{-\lambda-1}\, du$$

erhalten. Die rechte Seite von (15) hat in allen Fällen einen bestimmten Sinn, wo ein solcher der obigen Reihe $J(x)$ zukommt. Denn der Fall, wo λ eine negative ganze Zahl, und folglich $\bar{\Gamma}(-\lambda)$ gleich Null ist (Band 35 dieser Annalen, S. 516), macht auch die Reihe (14) illusorisch.

Kiel, im Mai 1891.

Ueber fünf Doppelintegrale.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

In den nachstehenden Rechnungen werden fünf Doppelintegrale behandelt, welche zu den Euler'schen Integralen in Beziehung stehen. Das erste dieser Doppelintegrale erweist sich als identisch mit dem Product $\Gamma(a)\,\Gamma(b)$, das zweite mit dem Product $\bar{\Gamma}(a)\,\bar{\Gamma}(b)$. Die drei übrigen reduciren sich auf Producte, in denen je ein $\bar{\Gamma}$-Integral und ein Euler'sches Integral erster Art, resp. ein $\bar{E}$-Integral als Factor vorkommt (s. Band 35 dieser Annalen, S. 510 und 514). Jedes der fünf Doppelintegrale bildet den Gegenstand eines der fünf folgenden Paragraphen.

§ 1.

Es sei L das Doppelintegral

$$L = \int_0^{\infty} v^{b-1}\,dv \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-u}\,u^{a-b-1}\,du, \tag{1}$$

in welchem die Variablen u und v die positiven reellen Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen. Die Doppelintegrale werden hier so geschrieben, dass die zuletzt angegebene Integration zuerst ausgeführt wird; in (1) ist also zuerst nach u zu integriren. Für die Potenzen u^{a-b-1}, v^{b-1} sollen, falls die Constanten a und b reell sind, die reellen positiven Werthe, und im allgemeinen Fall die Werthe $e^{(a-b-1)\log u}$, $e^{(b-1)\log v}$, in denen $\log u$ und $\log v$ reell sind, genommen werden. Man setzt die reellen Bestandtheile von a und b als positiv voraus. Da v in dem Integral nach u als Parameter vorkommt, so sind, wenn für u die Grenzen 0 und ∞ eingesetzt werden, die Werthe v als endlich und von Null verschieden anzusehen. Werden also die zwei Grenzen ∞, resp. die zwei Grenzen 0, der Variablen u und v mit einander verglichen, so ist die Annäherung an die Werthe ∞ und 0 bei u in beliebig hohem Masse stärker als bei v. Um dies hervorzuheben, schreibt man L lieber als den Ausdruck

$$(1\,a) \qquad L = \lim_{(\delta=0,\,q=\infty)} \int_{\delta}^{q} v^{b-1}\,dv \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-u}\,u^{a-b-1}\,du,$$

welcher erkennen lässt, dass erst schliesslich δ als unendlich klein und q als unendlich gross angenommen werden sollen.

Das Integral L wird durch Aenderung der Integrationsfolge auf das Product zweier Euler'scher Integrale zurückgeführt. Man hat die Zulässigkeit der genannten Aenderung, durch welche die gegenseitigen Verhältnisse der zwei Grenzen ∞, bezw. der zwei Grenzen 0 umgekehrt werden, zu beweisen. Zu diesem Behufe nennt man δ' eine sehr kleine, q' eine sehr grosse positive reelle Zahl, von der Beschaffenheit, dass bei abnehmendem δ der Quotient $\frac{\delta}{\delta'}$ beliebig klein, bei wachsendem q der Quotient $\frac{q}{q'}$ beliebig gross wird (z. B. $\delta' = \sqrt{\delta}$, $q' = \sqrt{q}$), und theilt das Integral nach u in die drei Theile

$$\int^{\delta'} + \int_{\delta'}^{q'} + \int_{q'}^{\infty}.$$

Das Integral L zerlegt sich dementsprechend in die drei Summanden

$$(2) \qquad L = L_1 + L_2 + L_3,$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \qquad L_1 = \lim_{(\delta=0,\,q=\infty)} \int_{\delta}^{q} dv \int_{0}^{\delta'} f(u, v)\,du,$$

$$(4) \qquad L_2 = \lim_{(\delta=0,\,q=\infty)} \int_{\delta}^{q} dv \int_{\delta'}^{q'} f(u, v)\,du,$$

$$(5) \qquad L_3 = \lim_{(\delta=0,\,q=\infty)} \int_{\delta}^{q} dv \int_{q'}^{\infty} f(u, v)\,du$$

und

$$(6) \qquad f(u, v) = v^{b-1} e^{-\frac{v}{u}-u}\,u^{a-b-1}$$

gesetzt ist. In dem Integral L_2 kann, so lange δ, q, δ', q' endliche Werthe bedeuten, die Integrationsordnung umgekehrt werden, da $f(u, v)$ stetig und eindeutig bleibt, und wenn δ, δ' bis zur Null abnehmen, q, q' unendlich werden, so geschieht dies (nach der Definition von δ', q') in der Art, dass die Variable v sich vor der Variable u den Grenzen 0 und ∞ nähert. Hieraus folgt, dass die Grösse L_2 bei abnehmendem δ, δ' und wachsendem q, q' in das Integral

$$(7) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-u}\,u^{a-b-1}\,du \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{v}{u}}\,v^{b-1}\,dv$$

übergeht, welches aus (1) durch Aenderung der Integrationsfolge entsteht. Man kann somit die Identität der Integrale (1) und (7) dadurch beweisen, dass man zeigt, dass die Integrale L_1 und L_2 verschwindend

klein sind. Bevor jedoch hierauf eingegangen wird, mögen einige kurze Bemerkungen Platz finden.

Es seien u, σ, τ positive reelle Grössen, und σ, τ unabhängig von u. Der Ausdruck $\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau}$ wird sowohl für ein unbegrenzt abnehmendes als für ein unbegrenzt wachsendes u unendlich, und da die Gleichung

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau}\right) = \frac{u^2 - \sigma\tau}{\tau u^2} = 0$$

die Wurzeln $u = \pm\sqrt{\sigma\tau}$ hat, so ergibt sich zwischen $u = 0$ und $u = \infty$ für die obige Function das Minimum

$$\left(\frac{\sigma}{u} + \frac{u}{\tau}\right)_{u=+\sqrt{\sigma\tau}} = +2\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}.$$

Mithin ist für alle positiven reellen Werthe von u

$$e^{-\left(\frac{\sigma}{u}+\frac{u}{\tau}\right)} \leqq e^{-2\sqrt{\frac{\sigma}{\tau}}}. \tag{8}$$

Das Product $e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau}$, welches für ein unendlich grosses und für ein unendlich kleines (positives) u verschwindet, nimmt, wie die Gleichung

$$\frac{d}{du}\left(e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau}\right) = e^{-\frac{\sigma}{u}} u^{-\tau-2}(\sigma - \tau u)$$

zeigt, für $u = \frac{\sigma}{\tau}$ den Maximalwerth $e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\tau}$ an. Also besteht unter den für (8) erwähnten Voraussetzungen auch die Ungleichheit

$$\frac{e^{-\frac{\sigma}{u}}}{u^{\tau}} \leqq e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\tau}. \tag{9}$$

Es sei ferner

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \tag{10}$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 reelle Zahlen bedeuten. Dann gelten für positive reelle Werthe von u und v die Gleichungen

$$\text{mod. } (u^{a-b-1}) = u^{a_1-b_1-1}, \quad \text{mod. } (v^{b-1}) = v^{b_1-1}.$$

Denn die Grössen $u^{i(a_2-b_2)}$ und v^{ib_2}, welche $e^{i(a_2-b_2)\log u}$ und $e^{ib_2\log v}$ geschrieben werden können ($\log u$, $\log v$ reell), haben den Modul Eins.

Man geht nun dazu über, Ungleichheiten für die Moduln der Integrale L_1 und L_3 aufzusuchen. Da der Modul einer Summe höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Summanden ist, so folgt

$$\text{mod. } L_1 \leqq \int_{\vartheta}^{q} v^{b_1-1}\,dv \int_0^{\vartheta} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a_1-b_1-1}\,du, \tag{11}$$

$$\text{mod. } L_3 \leqq \int_{\vartheta}^{q} v^{b_1-1}\,dv \int_{q}^{\infty} e^{-\frac{v}{u}-u} u^{a_1-b_1-1}\,du. \tag{12}$$

Aus (8) ergiebt sich, wenn für σ und τ die Werthe $\sigma = v$, $\tau = 2$ gewählt werden,

$$e^{-\frac{v}{u}-\frac{u}{2}} \leqq e^{-\sqrt{2v}}.$$

Durch Benutzung dieser Ungleichheit findet man

$$\text{mod. } L_3 < \int_{\delta}^{q} e^{-\sqrt{2v}} v^{b_1-1} dv \int_{q'}^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} u^{a_1-b_1-1} du$$

oder, wenn $\sqrt{2v} = v_1$, $v = \frac{1}{2} v_1^2$, und $u = \frac{1}{u_1}$ substituirt wird,

$$\text{mod. } L_3 < \frac{1}{2^{b_1-1}} \int_{\sqrt{2}\delta}^{\sqrt{2}q} e^{-v_1} v_1^{2b_1-1} dv_1 \int_0^{\frac{1}{q'}} e^{-\frac{1}{2u_1}} u_1^{b_1-a_1-1} du_1.$$

In dem rechts stehenden Ausdruck ist das Integral nach v_1, da man δ unendlich klein, q unendlich gross zu nehmen hat, gleich dem Euler'schen Integral $\Gamma(2b_1)$. Für das Integral nach u_1 kann (gemäss dem bekannten Theorem vom Mittelwerthe) das Product

$$e^{-\frac{1}{2\varkappa}} \varkappa^{b_1-a_1-1} \frac{1}{q'^{a_1-b_1}}$$

gesetzt werden, in welchem $\varkappa$ einen zwischen 0 und $\frac{1}{q'}$ liegenden Werth bedeutet. Also nähert sich, wenn q' unbegrenzt wächst, mod. L_3 dem Werthe Null.

Bei der auf L_1 bezüglichen Rechnung unterscheidet man, ob $a_1 - b_1$ positiv oder negativ ist. Da aus (8) (für $\sigma = v$, $\tau = 1$)

$$e^{-\frac{v}{u}-u} \leqq e^{-2\sqrt{v}}$$

folgt, so besteht (nach (11)) die Ungleichheit

$$\text{mod. } L_1 < \int_{\delta}^{q} e^{-2\sqrt{v}} v^{b_1-1} dv \int_0^{\delta'} u^{a_1-b_1-1} du,$$

welche im Falle $a_1 - b_1 > 0$ den Schluss erlaubt, dass mod. L_1 mit δ' zugleich beliebig klein wird. Denn das Integral nach u ist gleich $\frac{1}{a_1-b_1} \delta'^{a_1-b_1}$ und das Integral nach v geht durch die Substitution $2\sqrt{v} = v_2$, $v = \frac{v_2^2}{4}$, in den Ausdruck

$$2^{1-2b_1} \int_{2\sqrt{\delta}}^{2\sqrt{q}} e^{-v_2} v_2^{2b_1-1} dv_2 = 2^{1-2b_1} \Gamma(2b_1)$$

über.

Ist $a_1 - b_1$ negativ oder gleich Null, so bezeichne man durch ε irgend eine positive reelle Constante, die kleiner als a_1 ist (z. B. $\frac{a_1}{2}$ oder $\frac{a_1}{3}$), und schreibe

$$e^{-\frac{v}{u}-u}u^{a_1-b_1-1} = e^{-\frac{v}{2u}-u}\frac{e^{-\frac{v}{2u}}}{u^{b_1-a_1+\varepsilon}}\frac{1}{u^{1-\varepsilon}}.$$

Da nun aus (8) (für $\sigma = \frac{v}{2}$, $\tau = 1$) und aus (9) (für $\sigma = \frac{v}{2}$, $\tau = b_1 - a_1 + \varepsilon$) die Ungleichheiten

$$e^{-\frac{v}{2u}-u} \leqq e^{-\sqrt{2v}}, \qquad \frac{e^{-\frac{v}{2u}}}{u^{b_1-a_1+\varepsilon}} \leqq \frac{\mathfrak{A}}{v^{b_1-a_1+\varepsilon}}$$

erhalten werden, wo $\mathfrak{A}$ die Constante

$$\mathfrak{A} = e^{a_1-b_1-\varepsilon}(2[b_1 - a_1 + \varepsilon])^{b_1-a_1+\varepsilon}$$

bedeutet, so ist nach (11)

$$\text{mod. } L_1 < \mathfrak{A}\int_\delta^q e^{-\sqrt{2v}}v^{a_1-\varepsilon-1}\,dv\int_0^{\delta'}u^{\varepsilon-1}\,du.$$

Durch Anwendung der Substitution $\sqrt{2v} = v_1$ ergiebt sich

$$\int_\delta^q e^{-\sqrt{2v}}v^{a_1-\varepsilon-1}\,dv = 2^{1+\varepsilon-a_1}\int_{\sqrt{2\delta}}^{\sqrt{2q}} e^{-v_1}v_1^{2a_1-2\varepsilon-1}\,dv_1$$
$$= 2^{1+\varepsilon-a_1}\Gamma(2a_1-2\varepsilon),$$

so dass für L_1 die Ungleichheit

$$\text{mod. } L_1 < \frac{2^{1+\varepsilon-a_1}\mathfrak{A}}{\varepsilon}\delta'^{\varepsilon}\Gamma(2a_1-2\varepsilon)$$

besteht, deren rechte Seite sich mit abnehmendem δ' der Null nähert.

Hiermit ist bewiesen, dass wenn a_1 und b_1 positiv sind, die Integrale L_1 und L_3 Grössen darstellen, die man vernachlässigen darf. Also stimmt das Integral (1) mit dem Integral (7) im Werthe überein.

Indem man in (7), wo die Integration nach v zuerst auszuführen ist,

$$v = ut, \quad dv = u\,dt,$$

setzt, findet man

$$L = \int_0^\infty e^{-u}u^{a-1}\,du\int_0^\infty e^{-t}t^{b-1}\,dt = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Somit gelangt man zu der Formel

$$\text{(13)} \qquad \int_0^\infty v^{b-1}\,dv\int_0^\infty e^{-\frac{v}{u}-u}u^{a-b-1}\,du = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

bei der die reellen Bestandtheile der Constanten a und b als positiv vorausgesetzt sind.

§ 2.

Es soll nunmehr ein Doppelintegral

$$N = \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{a-b-1}\, du, \tag{14}$$

in welchem u und v complexe Werthe annehmen, betrachtet werden. Man lege um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ mit Radien k, l. Von den zwei Halbkreisen, in welche der Kreis $\mathfrak{K}$ durch die imaginäre Axe zerlegt wird, heisse der auf der Seite der positiven reellen Werthe liegende $\mathfrak{K}_1$, der andere $\mathfrak{K}_2$. Als Weg der Variable u nimmt man in (14) das Stück der negativen imaginären Axe von $-\infty i$ bis $-ki$, den Halbkreis $\mathfrak{K}_1$ (so dass der Nullpunkt zur Linken bleibt) und das Stück der positiven imaginären Axe von $+ki$ bis $+\infty i$. Die Variable v soll den Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-l$, den Kreis $\mathfrak{L}$ im positiven Sinne und zum zweiten Mal die Strecke von $-l$ bis $-\infty$ durchlaufen. Die hier anzuwendenden Zweige der Potenzen u^{a-b-1} und v^{b-1} werden durch die Werthe in den Punkten $u = k$, resp. $v = l$ fixirt, indem man die Gleichungen

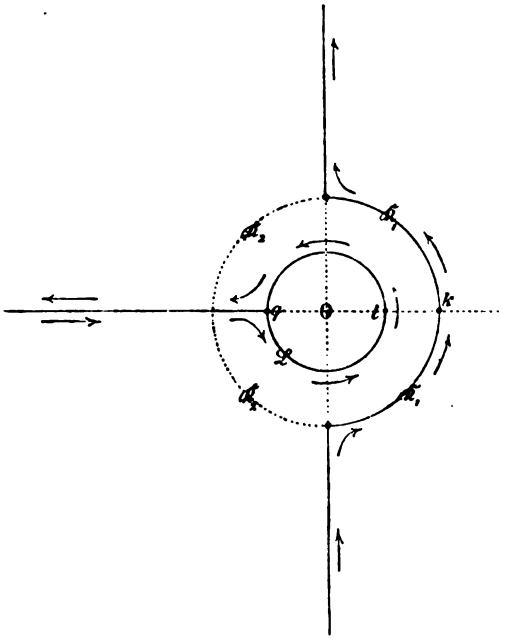


Fig. 1.

$$k^{a-b-1} = e^{(a-b-1)\log k}, \quad l^{b-1} = e^{(b-1)\log l}$$

gelten lässt, in denen $\log k$ und $\log l$ die reellen Logarithmen bedeuten. Wie in (10) wird

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

gesetzt. Jedoch nimmt man hier die Grössen a_1, b_1, $a_1 - b_1$ als negativ an.

Das Integral N wird nach derselben Methode wie das Integral (1) behandelt. Man beweist, dass die Integrationsordnung umgekehrt, d. h. die Integration nach v zuerst ausgeführt werden kann. Dann

ergiebt sich N als das Product zweier einfacher Integrale. Es werde für N (analog zu (1a)) die genauere Schreibweise

$$(14a) \qquad N = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{(0)} v^{b-1}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u} u^{a-b-1}\, du$$

angewendet, welche andeuten soll, dass die unendlichen Grenzen von u noch als unendlich gross gegen die unendlichen Grenzen von v gelten müssen.

Das Integral nach u wird, wie in § 1, in drei Theile getheilt. Indem man $\mathfrak{p}$ als eine überaus grosse positive reelle Zahl, die aber klein gegen $\mathfrak{q}$ bleibt, (z. B. $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$) definirt, nennt man N_1, N_2, N_3 die Integrale

$$(15) \qquad N_1 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{(0)} dv \int_{-\infty i}^{-\mathfrak{p} i} \varphi(u, v)\, du,$$

$$(16) \qquad N_2 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{(0)} dv \int_{-\mathfrak{p} i}^{+\mathfrak{p} i} \varphi(u, v)\, du,$$

$$(17) \qquad N_3 = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{(0)} dv \int_{+\mathfrak{p} i}^{+\infty i} \varphi(u, v)\, du,$$

in denen $\varphi(u, v)$ die Function

$$(18) \qquad \varphi(u, v) = v^{b-1} e^{\frac{v}{u}+u} u^{a-b-1}$$

bedeutet. Es ist dann

$$(19) \qquad N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Man will zeigen, dass wenn für $\mathfrak{p}$ eine genügend grosse Zahl gesetzt wird, mod. N_1 und mod. N_3 beliebig klein sind.

Bei N_1 und N_3 soll das Integral nach v in je drei Theile getheilt werden, nämlich in die 2 Integrale mit geradlinigem Integrationsweg und in das Integral längs des Kreises L. Man setzt

$$N_1^{(1)} = \lim_{(q=\infty)} \int_{-q}^{-l} dv \int_{-\infty i}^{-\mathfrak{p} i} \varphi(u, v)\, du,$$

$$N_1^{(2)} = \int_{-l}^{(0)} dv \int_{-\infty i}^{-\mathfrak{p} i} \varphi(u, v)\, du,$$

$$N_1^{(3)} = \lim_{(q=\infty)} \int_{-l}^{-q} dv \int_{-\infty i}^{-\mathfrak{p} i} \varphi(u, v)\, du,$$

also

$$N_1 = N_1^{(1)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)}.$$

Wird in $N_1^{(1)}$

$$u = -ri, \qquad v = -\mathfrak{v}$$

substituirt, so entsteht die Gleichung

$$N_1^{(1)} = e^{-\frac{\pi i}{2}(a+b)} \lim_{(q=\infty)} \int_l^q \mathfrak{v}^{b-1} d\mathfrak{v} \int_{\mathfrak{p}}^{\infty} e^{-i\left(\frac{\mathfrak{v}}{r}+r\right)} r^{a-b-1} dr.$$

Nach Berücksichtigung von (10) folgt hieraus

$$\text{mod. } N_1^{(1)} < e^{\frac{\pi}{2}(a_2+b_2)} \lim_{(q=\infty)} \int_l^q \mathfrak{v}^{b_1-1} d\mathfrak{v} \int_{\mathfrak{p}}^{\infty} r^{a_1-b_1-1} dr.$$

Die Constanten b_1, $a_1 - b_1$ sind aber nach der Voraussetzung negativ; somit ergiebt sich

$$\text{mod. } N_1^{(1)} < \frac{e^{\frac{\pi}{2}(a_2+b_2)} l^{b_1}}{b_1(a_1-b_1)} \mathfrak{p}^{a_1-b_1},$$

d. h. $N_1^{(1)}$ wird für ein grosses $\mathfrak{p}$ verschwindend klein. Die nämliche Eigenschaft kommt dem Integral $N_1^{(3)}$ zu, da dasselbe sich von $N_1^{(1)}$ nur durch den Factor $-e^{2\pi i b}$ unterscheidet. Das Integral $N_1^{(2)}$, in welchem v den Kreis mit dem Radius l durchläuft, geht durch die Substitution

$$u = -ri, \quad v = le^{\omega i} = l\cos\omega + il\sin\omega$$

in den Ausdruck

$$N_1^{(2)} = l^b e^{-\frac{\pi i}{2}(a-b+1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{b\omega i} d\omega \int_{\mathfrak{p}}^{\infty} e^{-\frac{l\sin\omega}{r} + i\left(\frac{l\cos\omega}{r} - r\right)} r^{a-b-1} dr$$

über. Dies führt zu der Ungleichheit

$$\text{mod. } N_1^{(2)} < l^{b_1} e^{\frac{\pi}{2}(a_2-b_2)} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega \int_{\mathfrak{p}}^{\infty} e^{-\frac{l\sin\omega}{r}} r^{a_1-b_1-1} dr.$$

Indem man die Exponentialgrösse $e^{-\frac{l\sin\omega}{r}}$ durch ihren Maximalwerth $e^{\frac{l}{\mathfrak{p}}}$ ersetzt, findet man, dass mod. $N_1^{(2)}$ kleiner ist als das Product

$$\frac{2\pi l^{b_1} e^{\frac{\pi}{2}(a_2-b_2)+\frac{l}{\mathfrak{p}}}}{b_1 - a_1} \frac{1}{\mathfrak{p}^{b_1-a_1}},$$

welches (da $b_1 - a_1$ positiv) mit wachsendem $\mathfrak{p}$ sich der Null nähert.

Hiermit ist bewiesen, dass N_1 für ein hinreichend grosses $\mathfrak{p}$ kleiner als jede angebbare Zahl ist. Dasselbe gilt von dem in (17) genannten Integral N_3. Denn die obige Rechnung ändert sich in keinem wesentlichen Punkte, wenn bei der Integration nach u die Grenzen $-\mathfrak{p}i$ und $-\infty i$ durch $+\mathfrak{p}i$ und $+\infty i$ ersetzt werden.

Es bleibt übrig, die Grösse N_2 zu behandeln, auf die sich, gemäss der Gleichung (19), das Integral N reducirt.

Bezeichnet man durch u_1, u_2 zwei beliebige Punkte des Integrationsweges von u und durch v_1, v_2 zwei beliebige Punkte des Integrationsweges von v, so macht es für den Werth von $\varphi(u_2, v_2)$ keinen Unterschied, ob zuerst u von u_1 nach u_2 und dann v von v_1 nach v_2 übergeht, oder ob zuerst v und hierauf u in der angegebenen Art variirt. Denn $\varphi(u, v)$ ist nach (18) gleich dem Product aus einer Function von u, einer Function von v und der eindeutigen Grösse $e^{\frac{v}{u}}$. Werden also in dem Doppelintegral

$$\int_{-\mathfrak{q}}^{(0)} dv \int_{-\mathfrak{p}i}^{+\mathfrak{p}i} \varphi(u, v)\, du,$$

das als Grenzfall einer Doppelsumme aufzufassen ist, diejenigen Summanden gesammelt, welche einen und denselben Werth $e^u u^{a-b-1}\, du$ als Factor enthalten, so ist deren Summe gleich dem Product aus dem letztgenannten Werthe und dem Integral

$$\int_{-\mathfrak{q}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}} v^{b-1}\, dv.$$

Man bemerke ferner, dass der Weg der Variable u durch den Werth von v nicht beeinflusst wird, und dass die zu integrirende Function für alle vorkommenden Werthe von u und v stetig bleibt. Es folgt hieraus, dass man in dem Integral N_2, in welchem $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zunächst als endlich angesehen werden mögen, die Integrationsfolge ändern darf, so dass für N_2 die Gleichung

$$N_2 = \int_{-\mathfrak{p}i}^{+\mathfrak{p}i} e^u u^{a-b-1} du \int_{-\mathfrak{q}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}} v^{b-1}\, dv$$

entsteht, in der die Integration nach v zuerst ausgeführt wird. Dies bleibt gültig, wenn $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ unbegrenzt wachsen; denn die unendlichen Grenzen, die zum Integral nach v gehören, sind (nach der Definition von $\mathfrak{p}$) unendlich gross gegen die Grenzen des Integrals nach u. Die Substitution

$$v = u\,t, \quad dv = u\,dt$$

ergiebt dann

$$N_2 = \int_{-\mathfrak{p}i}^{+\mathfrak{p}i} e^u u^{a-1}\, du \int_{-\frac{\mathfrak{q}}{u}}^{(0)} e^t t^{b-1}\, dt.$$

Man kann nun zeigen, dass das in letzterem Ausdruck enthaltene Integral

$$\int_{-\frac{\mathfrak{q}}{u}}^{(0)} e^t t^{b-1}\, dt \tag{20}$$

von u nicht abhängt, vielmehr stets den Werth $\bar{\Gamma}(b)$ hat. Da mod. u im Maximum den Betrag $\mathfrak{p}$ erreicht, so ist mod. $\frac{q}{u}$ eine unbegrenzt grosse Zahl. Im ersten Theil des Weges von u, wo $u = -ri$, $\mathfrak{p} \geqq r \geqq k$ ist, hat man $-\frac{q}{u} = \frac{q}{ri} = -\frac{qi}{r}$, so dass der Werth $-\frac{q}{u}$ einen überaus entfernten Punkt der negativen imaginären Axe darstellt. Gehört u sodann dem Halbkreise $\mathfrak{K}_1$ an (Fig. 1), so ist $u = ke^{\vartheta i}$, $-\frac{q}{u} = -\frac{q}{k}e^{-\vartheta i}$, wo ϑ von $-\frac{\pi}{2}$ durch 0 zu $+\frac{\pi}{2}$ übergeht. Hier durchläuft der Punkt $-\frac{q}{u}$ diejenige Hälfte des unendlichen Horizonts, in der die reellen Bestandtheile negativ sind. Im letzten Theil des Weges von u, wo $u = +ri$ ist, bedeutet der Werth $-\frac{q}{u}$ einen unendlich entfernten Punkt der positiven imaginären Axe. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass das Integral (20), wenn q unbegrenzt wächst, stets mit einem von drei Integralen identisch ist, welche der Verfasser in der Abhandlung „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$" behandelt und dort durch die Nummern (11), (20), (21) bezeichnet hat*). Letztere Integrale haben, obwohl ihr Integrationsweg ein verschiedener ist, doch den gleichen Werth. Je nachdem u dem ersten, zweiten oder dritten Theile der u-Curve angehört, stimmt das obige Integral (20) mit dem Integral (20), (11) oder (21) der erwähnten Arbeit (woselbst nur b statt a zu schreiben ist) überein. Daher hat das Integral (20) allgemein den Werth $\bar{\Gamma}(b)$. Für N_2 entsteht in Folge dessen die Gleichung

$$N_2 = \bar{\Gamma}(b) \int_{-\mathfrak{p}i}^{+\mathfrak{p}i} e^u u^{a-1}\, du.$$

Das Integral nach u ist aber für ein unbegrenzt wachsendes $\mathfrak{p}$, gemäss der Formel (18) des soeben genannten Aufsatzes**), gleich $\bar{\Gamma}(a)$.

Die vorstehende Rechnung führt auf diese Weise, unter der Voraussetzung, dass die reellen Bestandtheile der Constanten a, b, $a - b$ negativ sind, zu der Gleichung

$$(21) \qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u} u^{a-b-1}\, du \\ \quad = \bar{\Gamma}(a)\,\bar{\Gamma}(b), \end{cases}$$

in welcher der Integrationsweg der Variable u so zu bilden ist, dass der Nullpunkt in einer auf der Seite der positiven reellen Werthe liegenden Curve umgangen wird.

*) Dieser Band, S. 161 und 164.

**) Dieser Band, S. 163.

§ 3.

Man nenne P das Doppelintegral

$$(22) \qquad P = \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^1 (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du,$$

bei welchem v die nämliche Curve wie bei dem Integral (14) durchläuft, während u einen reellen Integrationsweg hat. Für dasselbe möge die nähere Bestimmung gelten, dass die Potenz $(1-u^2)^{a-1}$ an der unteren Integralgrenze $u = 0$ den Werth 1 annimmt, und dass für die Potenz v^{b-1} der in § 2 angegebene Zweig gewählt wird. Indem man (wie in (10))

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

setzt, macht man die Annahme, dass a_1 positiv, b_1 negativ sei.

Es werde durch δ eine positive reelle Zahl, welche sehr klein, jedoch endlich ist, und durch P_1 das Doppelintegral

$$P_1 = \int_{-\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_0^{\delta} (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du$$

bezeichnet. Lässt sich zeigen, dass mod. P_1 für ein genügend kleines δ beliebig klein wird, so darf in (22) bei der Integration nach u die Grenze 0 durch δ ersetzt werden.

Der Integrationsweg der Variable v besteht nach Fig. 1 aus dem doppelt durchlaufenen Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis $-l$ und dem Kreise $\mathfrak{L}$. Der Theil von P_1, der dem Kreise $\mathfrak{L}$ entspricht, wird zugleich mit δ beliebig klein, weil die zu integrirende Function stetig bleibt, und der Weg der Variable v eine endliche Länge, der Weg der Variable u jedoch die Länge δ hat. Auf den geradlinigen Strecken werde $v = -s$ gesetzt ($s \geqq l$). Es ist dann

$$e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}} = e^{2ui\sqrt{s}} + e^{-2ui\sqrt{s}} = 2\cos(2u\sqrt{s}).$$

Der Modul der letzteren Grösse erreicht also höchstens den Werth 2. Man erhält hierdurch die Ungleichheit

$$\text{mod.} \int_{-\infty}^{-l} v^{b-1} dv \int_0^{\delta} (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}}) (1-u^2)^{a-1} du$$
$$< 2 \int_l^{\infty} s^{b_1-1} ds \int_0^{\delta} (1-u^2)^{a_1-1} du,$$

deren rechte Seite verschwindend klein ist, da dieselbe (nach Ausführung der auf s bezüglichen Integration) durch Anwendung des Satzes vom Mittelwerth in den Ausdruck

$$\frac{2 l^{b_1}}{-b_1} (1-\mu^2)^{a_1-1} \delta, \quad \text{wo } 0 < \mu < \delta,$$

übergeht. Eine analoge Ungleichheit gilt für den letzten Theil des Integrals nach v. Wird demnach δ hinreichend klein gewählt, so ist mod. P_1 kleiner als jede angebbare Zahl.

Wie bei N_2 (§ 2), so kann auch bei P, nachdem die Grenze δ statt der Grenze 0 für die Integration nach u eingeführt ist, die Reihenfolge der Integrationen geändert werden. Es entsteht hierdurch für P der Ausdruck

$$P = \int_\delta^1 (1-u^2)^{a-1} du \int_{-\infty}^{\bar{+}(0)} (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}})\, v^{b-1}\, dv,$$

auf welchen man die Substitution $v = w^2$, $w = \sqrt{v}$ anwendet. Für $v = -\infty$ nimmt w den Werth $\pm i\infty$ an. Man wähle $-i\infty$ als den Werth von w, welcher der unteren Integralgrenze entspricht. Dann durchläuft w zunächst die negative imaginäre Axe von $-i\infty$ bis zum Punkte $-i\sqrt{l}$, sodann diejenige Hälfte des um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt{l}$ beschriebenen Kreises, welche auf der Seite der positiven reellen Werthe liegt (da v den Umlauf längs des Kreises $\mathfrak{L}$ in positiver Drehungsrichtung ausführt), und endlich den Abschnitt der positiven imaginären Axe von $+i\sqrt{l}$ bis $+i\infty$. Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung

$$P = 2\int_\delta^1 (1-u^2)^{a-1} du \int_{-\infty i}^{+\infty i} (e^{2uw} + e^{-2uw})\, w^{2b-1} dw.$$

Man setze nun

$$w = \frac{t}{2u}, \quad 2uw = t, \quad dw = \frac{1}{2u} dt.$$

Dann wird

$$P = 2^{1-2b} \int_\delta^1 (1-u^2)^{a-1}\, u^{-2b}\, du \int_{-\infty i}^{+\infty i} (e^t + e^{-t}) t^{2b-1}\, dt.$$

Da u reell und positiv ist, so besteht der Weg der Variable t aus dem Stück der negativen imaginären Axe von $-i\infty$ bis $-2ui\sqrt{l}$, aus dem Halbkreise um den Nullpunkt mit dem Radius $2u\sqrt{l}$ und aus dem Stück der positiven imaginären Axe von $+2ui\sqrt{l}$ bis $+i\infty$. Jedoch kann der Radius des Halbkreises, in welchem die t-Curve den Nullpunkt umgeht, beliebig geändert werden, ohne dass dies den Werth des Integrals beeinflusste. Denn die zu integrirende Function hat auf dem Flächenstück, welches zwischen der ursprünglichen und der modificirten t-Curve liegt, keinen singulären Punkt. Man erkennt, dass sobald der genannte Radius constant genommen wird, P in das Product zweier einfacher Integrale übergeht. Bei dem Integral nach [illegible] statt der Grenze δ nun wieder die Grenze 0 angewendet Nach den Formeln (18) und (19a) des erwähnten Aufsatzes

„Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$“*) ist in dem obigen Ausdruck von P (da die Variable t den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgeht)

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^t t^{2b-1} dt = \bar{\Gamma}(2b),$$

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{-t} t^{2b-1} dt = 0.$$

Indem ferner durch $E(p, q)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(p, q) = E(q, p) = \int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1} d\xi \tag{23}$$

bezeichnet wird, findet man mit Hülfe der Substitution $u = +\sqrt{\xi}$

$$\int_0^1 u^{-2b}(1-u^2)^{a-1} du = \frac{1}{2}\int_0^1 \xi^{-b-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{a-1} d\xi = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right).$$

Somit erhält man für P die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\bar{(0)}} v^{b-1} dv \int_0^1 (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}})(1-u^2)^{a-1} du \\ &\qquad = \frac{1}{2^{2b}} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right) \bar{\Gamma}(2b), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

in welcher der reelle Bestandtheil von a als positiv, der reelle Bestandtheil von b als negativ vorausgesetzt ist. Die Grösse $\frac{1}{2^{2b}}$ hat, gemäss den Festsetzungen für v^{b-1}, resp. für t^{2b-1}, den Werth $e^{-2b\log 2}$, woselbst log 2 den reellen Logarithmus bedeutet.

Wie die vorstehende Entwickelung zeigt, kann (durch Fortlassung des Summandus, der den Werth Null hat) das gewonnene Resultat auch dahin formulirt werden, dass

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty i}^{+\infty i} w^{2b-1} dw \int_0^1 e^{2uw}(1-u^2)^{a-1} du \\ &\qquad = \frac{1}{2^{2b+1}} E\left(\frac{1}{2} - b, a\right) \bar{\Gamma}(2b) \end{aligned}\right. \tag{25}$$

ist, falls bei Umgehung des Nullpunktes der Weg der Variable w auf der Seite der positiven reellen Werthe bleibt.

§ 4.

Es soll sodann das Doppelintegral

$$Q = \int_{\infty}^{\bar{(0)}} v^{b-1} dv \int_0^1 e^{-2uv}(1-u^2)^{a-1} du \tag{26}$$

*) Dieser Band, Seite 163 und 164.

betrachtet werden. Als Integrationsweg von v nimmt man, nach Fig. 1, den Abschnitt der positiven reellen Axe von ∞ bis l, den Kreis $\mathfrak{L}$, der im positiven Sinne durchlaufen wird, und die Strecke von l bis ∞. Für v^{b-1} werde auf dem ersten Theil des Integrationsweges der Werth $e^{(b-1)\log v}$, in welchem $\log v$ reell ist, gewählt. Die Potenz von $(1-u^2)^{a-1}$ sei gleich 1 für $u=0$. Der reelle Theil von a wird als positiv, der von b als negativ vorausgesetzt.

Indem man durch δ wiederum eine sehr kleine, jedoch endliche positive reelle Zahl bezeichnet, bildet man das Integral

$$Q_1 = \int_{\infty}^{\bar{}(0)} v^{b-1}\,dv \int_0^{\delta} e^{-2uv}(1-u^2)^{a-1}\,du,$$

von dem bewiesen werden soll, dass es für ein genügend kleines δ beliebig klein wird. Wie bei dem Integral P_1 (§ 3) schliesst man aus der Stetigkeit der zu integrirenden Function, dass der zum Kreise $\mathfrak{L}$ gehörige Bestandtheil von Q_1 mit δ zugleich unbegrenzt abnimmt. In den übrigen Theilen von Q_1 sind u und v reell und positiv, also $e^{-2uv} < 1$. Man erhält, nach Berücksichtigung von (10), die Ungleichheit

$$\begin{aligned}\operatorname{mod.}\int_l^{\infty} v^{b-1}\,dv \int_0^{\delta} e^{-2uv}(1-u^2)^{a-1}\,du \\ < \int_l^{\infty} v^{b_1-1}\,dv \int_0^{\delta} (1-u^2)^{a_1-1}\,du\end{aligned}$$

d. h.

$$< \frac{l^{b_1}}{-b_1}(1-\mu^2)^{a_1-1}\delta, \text{ wo } 0 < \mu < \delta,$$

aus der die Kleinheit von Q_1 folgt. Hiernach darf in Q die Grenze 0 der Integration nach u durch die Zahl δ ersetzt werden. In Analogie zu den Rechnungen des vorigen Paragraphen ergiebt sich durch Umkehrung der Integrationsordnung die Gleichung

$$Q = \int_{\delta}^{1} (1 \quad u^2)^{a-1}du \int_{\infty}^{\bar{}(0)} e^{-2uv}v^{b-1}dv.$$

Durch die Substitution

$$v = \frac{t}{2u}, \quad dv = \frac{1}{2u}\,dt$$

findet man dann

$$\int_{\infty}^{\bar{}(0)} e^{-2uv}v^{b-1}dv = (2u)^{-b}\int_{\infty}^{\bar{}(0)} e^{-t}t^{b-1}dt.$$

Für t kann (da der Werth $u=0$ nicht mehr in Betracht kommt) derselbe Integrationsweg wie für v gewählt werden. Denn die Grösse

des Radius desjenigen Kreises, in welchem t den Umlauf um den Nullpunkt ausführt, ist für den Werth des Integrals unerheblich. Also ist Q gleich dem Ausdruck

$$Q = \frac{1}{2^b}\int_\delta^1 u^{-b}(1-u^2)^{a-1}\,du\int_\infty^{(0)} e^{-t}t^{b-1}\,du,$$

in welchem zwei einfache Integrale mit einander multiplicirt sind. Das Integral nach t hat den Werth $e^{\pi i b}\bar{\Gamma}(b)$ — s. Band 35 dieser Annalen, Seite 515, Gl. (34), — und das Integral nach u geht durch die Substitution $u = +\sqrt{\xi}$ in den Ausdruck $\frac{1}{2}E\left(\frac{1-b}{2}, a\right)$ über (cfr. (23)). Man erhält demnach die Formel

$$(27)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_\infty^{(0)} v^{b-1}\,dv\int_0^1 e^{-2uv}(1-u^2)^{a-1}\,du \\ \quad = \dfrac{1}{2^{b+1}}e^{\pi i b}E\left(\dfrac{1-b}{2}, a\right)\bar{\Gamma}(b).\end{cases}$$

Mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen soll die letztere Gleichung durch die Substitution $v = +\sqrt{z}$ umgeformt werden. Die Variable z durchläuft dann zunächst die positive reelle Axe von ∞ bis l^2, hierauf zweimal hinter einander einen um den Nullpunkt mit dem Radius l^2 beschriebenen Kreis (in positivem Sinne) und endlich wiederum die reelle Axe von l^2 bis ∞. Ferner ist in der Gleichung

$$v^{b-1}dv = \frac{1}{2}z^{\frac{b}{2}-1}dz$$

auf dem ersten Theil des Weges von z für die Potenz $z^{\frac{b}{2}-1}$ der Werth $e^{\left(\frac{b}{2}-1\right)\log z}$, wo $\log z$ den reellen Logarithmus bedeutet, zu wählen. Man gelangt somit zu der Formel

$$(28)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_\infty^{(0,0)} z^{\frac{b}{2}-1}\,dz\int_0^1 e^{-2u\sqrt{z}}(1-u^2)^{a-1}\,du \\ \quad = \dfrac{1}{2^b}e^{\pi i b}E\left(\dfrac{1-b}{2}, a\right)\bar{\Gamma}(b),\end{cases}$$

in der, wie in (27), der reelle Theil von a als positiv, der reelle Theil von b als negativ angenommen wird. Die Grösse $\sqrt{z}$ hat (da sie für v eingetreten ist) auf dem ersten Theil des Integrationsweges das positive Vorzeichen, so dass in der Exponentialgrösse $e^{-2u\sqrt{z}}$ der Exponent negativ ist. Für den Factor $\frac{1}{2^{b+1}}$ in (27) und den Factor $\frac{1}{2^b}$ in (28) sind die Werthe $e^{-(b+1)\log 2}$, resp. $e^{-b\log 2}$, in denen $\log 2$ reell ist, zu setzen.

§ 5.

Wird der reelle Theil der Constante a negativ oder gleich Null, so hört in (27) und (28) das Integral nach u auf, einen bestimmten Sinn zu haben. In diesem Falle möge, statt des geradlinigen Weges von 0 bis 1, für die Variable u eine geschlossene Curve gewählt werden, die vom Nullpunkte ausgeht und den Punkt 1 umschliesst. Man zieht mit einem kleinen Radius h einen Kreis $\mathfrak{H}$ um den Punkt 1 als Mittelpunkt. Die Winkel, welche die vom Nullpunkt an den Kreis $\mathfrak{H}$ gelegten Tangenten mit der positiven reellen Axe bilden, sollen $\pm \varkappa$ genannt werden. Der Punkt $1 - h$ heisse h_1 (Fig. 2). Man betrachtet das Integral

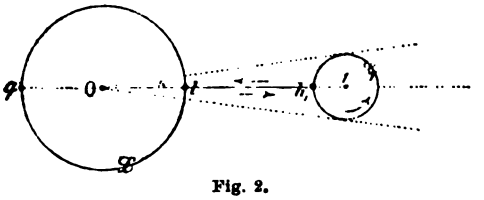


Fig. 2.

$$\mathfrak{Q} = \int_{\infty}^{(0)} v^{b-1} dv \int_{0}^{(1)} e^{-2uv} (1-u^2)^{a-1} du, \tag{29}$$

in welchem der Weg der Variable u aus der geradlinigen Strecke von 0 bis h_1, dem Kreise $\mathfrak{H}$ (in positiver Drehungsrichtung) und der Strecke von h_1 bis 0 besteht. Der Weg von v ist derselbe wie in (26). Ebenso mögen für die Potenzen $(1-u^2)^{a-1}$ und v^{b-1} die in § 4 bezeichneten Zweige genommen werden.

Auf die geradlinigen Theile des Weges von u übertragen sich die in § 4 für Q angestellten Rechnungen. Auch in (29) ist es zulässig, statt der Null die kleine Zahl δ als untere Integralgrenze von u anzuwenden und die Integrationsordnung zu ändern. Hierdurch entsteht für $\mathfrak{Q}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{Q} = \int_{\delta}^{(1)} (1-u^2)^{a-1} du \int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv. \tag{30}$$

Das Integral nach v wird durch die Subtitution

$$v = \frac{t}{2u}, \quad dv = \frac{1}{2u} dt,$$

umgeformt; jedoch sind bei dieser Rechnung die verschiedenen Werthgebiete der Grösse u zu unterscheiden. Ist u ein Punkt der positiven reellen Axe zwischen δ und h_1, so ergiebt sich, wie in § 4, unmittelbar die Gleichung

$$\int_{\infty}^{(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv = (2u)^{-b} \int_{\infty}^{(0)} e^{-t} t^{b-1} dt = (2u)^{-b} e^{\pi i b} \Gamma(b).$$

Diese Gleichung gilt nun auch, wenn u dem Kreise $\mathfrak{H}$ angehört. Setzt

man $u = re^{\vartheta i}$, so liegt für die Punkte u des Kreises $\mathfrak{H}$ der Modul r zwischen $1 - h$ und $1 + h$, der Winkel ϑ zwischen $-\varkappa$ und $+\varkappa$. Der Weg der Variable t (welche dann gleich $2re^{\vartheta i}v$ ist) entsteht aus dem Wege der Variable v, wenn man den letzteren um den Winkel ϑ dreht und zugleich den Massstab im Verhältniss $1 : 2r$ ändert. Der Ausgangspunkt und Endpunkt des Weges von t ist also ein unendlich entfernter Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Nullpunkte den Winkel ϑ mit der positiven reellen Axe bildet. Da die Variable t wiederum einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt, so folgt aus obiger Substitution die Gleichung

$$\int_{\infty}^{\mathfrak{p}(0)} e^{-2uv} v^{b-1} dv = (2u)^{-b} \int_{\mathfrak{p}'}^{(0)} e^{-t} t^{b-1} dt,$$

in welcher $\mathfrak{p}'$ den Werth

$$\mathfrak{p}' = \lim_{(r=\infty)} re^{\vartheta i}$$

bedeutet. Die Potenz v^{b-1} hat nach § 4 die Eigenschaft, für $v = -l$ (im Punkte q der Fig. 1 und 2) den Werth $e^{(b-1)(\pi i + \log l)}$, in welchem $\log l$ reell ist, anzunehmen. In Folge dessen wird t^{b-1} in demjenigen Punkte $t = -l'$, den die t-Curve mit der negativen reellen Axe gemein hat, gleich $e^{(b-1)(\pi i + \log l')}$, wo $\log l'$ den reellen Logarithmus bezeichnet. Denn bei der kleinen Drehung ($-\varkappa \leqq \vartheta \leqq \varkappa$) des Kreises, die durch die Substitution stattfindet, ist das Auftreten eines anderen Zweiges der Potenz t^{b-1} ausgeschlossen. Auf diese Weise wird die Formel (13) des bereits mehrfach genannten Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$“*) anwendbar, wodurch für Ω die Gleichung

$$\Omega = \frac{1}{2^b} e^{\pi i b} \bar{\Gamma}(b) \int_{\delta}^{\mathfrak{p}(1)} u^{-b} (1 - u^2)^{a-1} du \tag{31}$$

entsteht. Hierin kann die Integralgrenze δ wieder durch 0 ersetzt werden. Führt man nun eine Variable ξ durch die Gleichung $u = +\sqrt{\xi}$ ein, so stellt der Weg von ξ, wie der von u, einen bei dem Nullpunkte beginnenden positiven Umlauf um den Punkt 1 dar. Denn während u von 0 bis h_1 variirt (Fig. 2), durchläuft ξ das Stück der reellen Axe von 0 bis zu dem dicht vor 1 liegenden Punkte $(1-h)^2$. Für die Umgebung des Punktes 1 reducirt sich aber die Substitution $u = +\sqrt{\xi}$ auf eine lineare Beziehung zwischen den Variablen u und ξ, da dieselben sich dort gegenseitig eindeutig abbilden. In der That ist, wenn $u = 1 + u' = 1 + he^{\vartheta i}$ gesetzt, und der Kreisradius h unendlich klein gewählt wird, ξ als identisch mit $1 + 2u'$ anzusehen. Es ergiebt sich demnach

*) Dieser Band, Seite 162.

$$\int_0^{\bar{}(1)} u^{-b}(1-u^2)^{a-1}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{}(1)} \xi^{-\frac{b+1}{2}}(1-\xi)^{a-1}\,d\xi,$$

wofür nach Formel (24) der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale"*) der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}\,e^{\pi i a}\,\bar{E}\Big(\frac{1-b}{2},\ a\Big) = \frac{1}{2}\,e^{\pi i(a-1)}\,\bar{E}\Big(\frac{1-b}{2},\ a\Big)$$

geschrieben werden kann. Indem man diesen Werth in (31) substituirt, findet man die Gleichung

$$(32)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\infty^{\bar{}(0)} v^{b-1}\,dv \int_0^{\bar{}(1)} e^{-2uv}(1-u^2)^{a-1}\,du \\ \displaystyle = -\frac{1}{2^{b+1}}\,e^{\pi i(a+b-1)}\,\overline{E}\Big(\frac{1-b}{2},\ a\Big)\bar{\Gamma}(b), \end{cases}$$

in welcher der reelle Theil der Constante b als negativ vorausgesetzt ist, während a eine beliebige Constante bezeichnet.

Wird in (32) $v = +\sqrt{z}$ gesetzt, so entsteht die zu (28) analoge Formel

$$(33)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\infty^{\bar{}(0,0)} z^{\frac{b}{2}-1}\,dz \int_0^{\bar{}(1)} -2u\sqrt{z}\,(1-u^2)^{a-1}\,du \\ \displaystyle = \frac{1}{2^b}\,e^{\pi i(a+b-1)}\,\overline{E}\Big(\frac{1-b}{2},\ a\Big)\bar{\Gamma}(b). \end{cases}$$

Der Integrationsweg der Variable z enthält hier, wie in (28), einen zweimaligen positiven Umlauf um den Nullpunkt.

Kiel, im Juni 1891.

---

*) Band 35 dieser Annalen, Seite 510. Die Grösse $\overline{E}(p, q)$ ist, wenn die reellen Bestandtheile von p und q positiv sind, mit dem Euler'schen Integral $E(p, q)$ durch die Gleichung

$$\overline{E}(p, q) = (e^{\pi i q} - e^{-\pi i q})E(p, q) = 2i \sin(\pi q)\,E(p, q)$$

verbunden.

Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x)$.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}; x)$$
$$= 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\cdots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} + \cdots$$

genügt, nach § 5 des Aufsatzes des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe“ *), einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

in der $L_1, L_2, \ldots L_{n-1}$ gewisse von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ abhängige Constante bedeuten. Im Folgenden soll auf diese Differentialgleichung in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ näher eingegangen, und deren Lösung durch bestimmte Integrale behandelt werden. Die dem Fall $n = 3$ entsprechende Reihe

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x) = 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho\sigma} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)} + \cdots$$

ist ein particuläres Integral der Gleichung

$$(2) \qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\varrho + \sigma + 1)\, x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

welche ausserdem durch die mehrdeutigen Particulärlösungen

*) Band 38 dieser Annalen, S. 586. (Die Ausdrücke für $L_1, L_2, \ldots L_{n-1}$ sind daselbst in Gl. (26) und (33) angegeben.)

(3) $$x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x),$$

(4) $$x^{1-\sigma}\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x)$$

befriedigt wird. Die Differentialgleichung 4ter Ordnung

(5) $$x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\varrho+\sigma+\tau+3)x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\tau\frac{dy}{dx}-y=0$$

hat einerseits die eindeutige Reihe

(6) $$\mathfrak{F}(\varrho,\sigma,\tau;\ x)=1+\frac{x}{1.\varrho\sigma\tau}+\frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)}+\cdots,$$

andererseits die Producte

(7) $$x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ x),$$

(8) $$x^{1-\sigma}\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ x),$$

(9) $$x^{1-\tau}\mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x)$$

zu particulären Integralen (s. die erwähnte Arbeit). Es gilt hierbei die Voraussetzung, dass keine der Constanten

$$\varrho,\ \sigma,\ \tau,\ \varrho-\sigma,\ \varrho-\tau,\ \sigma-\tau$$

gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei.

Man gelangt nun zu Lösungen der Differentialgleichung (2) in Gestalt bestimmter Integrale, indem man für y das Integral

$$y=\int_g^h e^{\frac{x}{v}}v^{-\sigma}V\,dv$$

einsetzt und V als Function von v durch eine Differentialgleichung 2ter Ordnung bestimmt. Analog wird auf die Gleichung (5) die Substitution

$$y=\int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}}w^{-\tau}W\,dw$$

angewendet. Die nur von w abhängige Grösse W genügt einer Differentialgleichung 3ter Ordnung von der Form (2). Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen von (2) sind Doppelintegrale, die Lösungen von (5) dreifache Integrale.

Die nachstehenden §§ 2—6 beziehen sich auf die Gleichung (2), die §§ 7—9 auf die Gleichung (5). Es ergiebt sich, dass die obigen Reihen auf verschiedene Arten durch bestimmte Integrale darstellbar sind. Werden die bestimmten Integrale, die man mittelst der angeführten Substitution als Lösungen von (2), resp. (5) findet, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so treten Euler'sche Integrale, bezw. Integrale $\bar{\Gamma}$, $\mathfrak{E}$, $\overline{E}$ (s. Band 35 dieser Annalen, S. 495) als constante Multiplicatoren der Reihen auf.

§ 2.

Die Differentialgleichung (2) geht durch die Substitution

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V dv, \tag{10}$$

wo g und h zunächst als constant gelten sollen, und V eine Function von v allein bedeutet, in die Gleichung

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} x^2 v^{-\sigma-3} V dv + (\varrho + \sigma + 1) \int_g^h e^{\frac{x}{v}} x v^{-\sigma-2} V dv + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V \left(\frac{\varrho\sigma}{v} - 1\right) dv = 0$$

über. Mit Hülfe der Formel der theilweisen Integration findet man

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{x}{v^2} v^{-\sigma} V dv = -\left[e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V\right]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{d(v^{-\sigma} V)}{dv} dv$$

und durch zweimalige Anwendung derselben Formel

$$\int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{x^2}{v^2} v^{-\sigma-1} V dv$$

$$= -\left[e^{\frac{x}{v}} x v^{-\sigma-1} V + e^{\frac{x}{v}} v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv}\right]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} \frac{d}{dv}\left(v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv}\right) dv.$$

Wird also durch M die Function

$$M = -e^{\frac{x}{v}} \left\{x v^{-\sigma-1} V + v^2 \frac{d(v^{-\sigma-1} V)}{dv} + (\varrho + \sigma + 1) v^{-\sigma} V\right\} \tag{11}$$

bezeichnet, so folgt, wie eine kurze Rechnung zeigt, aus (2) die Gleichung

$$[M]_{v=g}^{v=h} + \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} \left\{v \frac{d^2 V}{dv^2} + (\varrho - \sigma + 1) \frac{dV}{dv} - V\right\} dv = 0. \tag{12}$$

Man definirt die Function V als ein Integral der Differentialgleichung

$$v \frac{d^2 V}{dv^2} + (\varrho - \sigma + 1) \frac{dV}{dv} - V = 0 \tag{13}$$

und unterwirft die Grössen g und h der Bedingung

$$[M]_{v=h} - [M]_{v=g} = 0. \tag{14}$$

Dann ist das bestimmte Integral (10) eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (2).

Nimmt man in (10) die Integralgrenze h als variabel an, so hat man für $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma-1} V dv + \left[e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V\right]_{v=h} \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Hier verschwindet der zweite Summandus der rechten Seite, wenn man $h = -\varepsilon x$ setzt und unter ε eine unendlich kleine positive reelle Constante versteht. Denn neben der Grösse $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, in welche der Factor $e^{\frac{z}{v}}$ für $v = -\varepsilon x$ übergeht, kommen die negativen Potenzen von ε nicht in Betracht (V ist für $v = 0$ entweder stetig oder wie eine Potenz von v unstetig). Ebenso zeigt man, dass die für ein constantes h geltenden Ausdrücke der höheren Differentialquotienten von y auch im Falle $h = -\varepsilon x$ in Kraft bleiben. Daher darf für h, und nicht minder für g, ausser constanten Werthen auch der Werth $-\varepsilon x$ in (10) und (14) gewählt werden. Da der Ausdruck M für $v = -\varepsilon x$ verschwindet, so wird der Bedingung (14) durch die Werthe $g = h = -\varepsilon x$ genügt. In der That ergeben sich die mehrdeutigen Hauptlösungen der Differentialgleichung (2) aus dem Integral (10), wenn man als Weg der Variable v eine geschlossene Curve nimmt, die im Punkte $-\varepsilon x$ beginnt und endigt (§ 4). Das eindeutige particuläre Integral von (2) wird aus (10) durch Anwendung unendlicher Werthe für g und h erhalten.

§ 3.

Für die Differentialgleichung (13), in welcher die Constante $\varrho - \sigma + 1$ kurz durch s bezeichnet werden möge, lassen sich verschiedene Lösungen mittelst einfacher bestimmter Integrale angeben. Es sollen hier die zwei Arten der Lösung, welche in den Aufsätzen des Verfassers im 38ten *) und in diesem **) Bande der Annalen verzeichnet sind, nach einander benutzt werden. Die Hauptintegrale der Differentialgleichung

$$v\frac{d^2V}{dv^2} + s\frac{dV}{dv} - V = 0$$

lauten in Reihenform

$$\mathfrak{F}(s; v) = 1 + \frac{v}{1.s} + \frac{v^2}{1.2.s(s+1)} + \cdots \tag{15}$$

und

$$v^{1-s}\mathfrak{F}(2-s; v) = v^{1-s}\left\{1 + \frac{v}{1.(2-s)} + \frac{v^2}{1.2(2-s)(3-s)} + \cdots\right\}. \tag{16}$$

Nun ist nach dem erwähnten Aufsatze in diesem Bande (Gl. (10) und (13))

*) „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", §§ 2—4, S. 228—240.

**) „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", S. 174.

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{-(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(1-s)\, \mathfrak{F}(s; v),$$

$$(18) \qquad \int_{-\varepsilon v}^{-(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(s-1)\, v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v),$$

und nach dem Aufsatze im 38ten Bande (Gl. (33), (21), (23))

$$(19) \int_{\infty}^{-(0,v,0,v)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\frac{1}{2}-s}\, \frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2s-1}\, e^{-2\pi i s}\, \bar{\Gamma}(2-2s)\, \mathfrak{F}(s; v),$$

$$(20) \int_{0}^{v} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\frac{1}{2}-s}\, \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int_{v}^{-(0)} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\frac{1}{2}-s}\, \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}-s}\, 2E\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}-s\right) v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v), \qquad \left(s < \tfrac{3}{2}\right)$$

$$(21) \int_{0}^{-(v)} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\frac{1}{2}-s}\, \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_{c}^{-(v,0,v-,0-)} e^{-2\sqrt{u}}\,(u-v)^{\frac{1}{2}-s}\, \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= 2\bar{E}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}-s\right) v^{1-s}\, \mathfrak{F}(2-s; v),$$

wo für die Integrale mit geschlossener Integrationscurve die auf S. 472 des 35ten Bandes dieser Annalen angegebene abgekürzte Schreibweise angewendet ist. Die bestimmten Integrale (17) bis (21) können demnach, als particuläre Lösungen der Gleichung (13), an Stelle von V in das Integral (10) eingesetzt werden. In (20) ist angenommen, dass der reelle Theil von s kleiner als $\frac{3}{2}$, d. h. der reelle Theil von $\varrho - \sigma$ kleiner als $\frac{1}{2}$ sei. Diese Bedingung kann jedoch immer erfüllt werden, da die Differentialgleichung (2) symmetrisch in Bezug auf die Constanten ϱ und σ ist.

Unter $E(a, b)$ wird hier das Euler'sche Integral erster Art

$$E(a, b) = \int_{0}^{1} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du$$

verstanden, während $\bar{E}(a, b)$ und $\bar{\Gamma}(a)$ die in Band 35 dieser Annalen, S. 510 und 514, bezeichneten (Hankel'schen) Integrale sind.

§ 4.

Als Integrationsweg von (10) möge zunächst ein vom Punkte $-cx$ ausgehender positiver Umlauf um den Nullpunkt gewählt, und

dieser Weg nach Fig. 1 aus der geradlinigen Strecke von $-\varepsilon x$ bis $\mathfrak{k}$, dem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}$ und der Strecke von $\mathfrak{k}$ bis $-\varepsilon x$ zusammengesetzt werden. Aus (10) entstehen dann, falls für V die Integrale (18) und (17) substituirt werden (in denen s den Werth $\varrho - \sigma + 1$ hat), die Ausdrücke

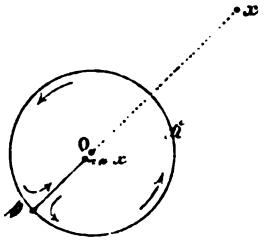


Fig. 1.

$$(22)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\varepsilon v}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du,$$

$$(23)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du.$$

Setzt man ferner für V die Integrale (20) und (19) ein, so gelangt man zu den Doppelintegralen

$$(24)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{0}^{v} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$(25)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{\infty}^{(0,v,0,v)} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Die Reihenentwickelungen der Integrale (22) bis (25) nach steigenden Potenzen von x ergeben sich unmittelbar aus der Formel

$$(26)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{p-1} \left\{c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \cdots\right\} dv$$
$$= x^p \bar{\Gamma}(-p) \left\{c_0 + \frac{c_1 x}{p+1} + \frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)} + \frac{c_3 x^3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots\right\},$$

welche der Verfasser in dem Aufsatze „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen“ *) abgeleitet hat. Für $c_0 + c_1 v + \cdots$ werden in (26) nach einander die Reihen substituirt, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen (17) bis (20) stehen (die Constante p wird gleich $1-\varrho$ oder $1-\sigma$). Dann findet man für die Integrale (22) und (23) die Gleichungen

$$(27)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\varepsilon v}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$
$$= \bar{\Gamma}(\varrho-1)\, \bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\, x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x),$$

$$(28)\quad \int_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$
$$= \bar{\Gamma}(\sigma-1)\, \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\, x^{1-\sigma}\, \mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x),$$

*) Dieser Band, Seite 171.

während das Integral (24) in den Ausdruck

$$(29)\quad (-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, 2\,\bar{\Gamma}(\varrho-1)\, E\left(\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x)$$

und das Integral (25) in den Ausdruck

$$(30)\quad 2^{2\varrho-2\sigma+1}\, e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\, \bar{\Gamma}(\sigma-1)\, \bar{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\, x^{1-\sigma}\, \mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x)$$

übergeht. Abgesehen von constanten Factoren stimmen also die Integrale (22) und (24) mit der Reihe (3), die Integrale (23) und (25) mit der Reihe (4) überein.

§ 5.

Es möge nunmehr angenommen werden, dass in (10) die Variable v von dem unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe ausgeht und nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt zu $-\infty$ zurückkehrt. In dieses Integral, für welches man die abgekürzte Bezeichnung

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{\bar{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, V\, dv$$

hat, wird an Stelle von V wiederum ein particuläres Integral der Differentialgleichung (13) substituirt.

Nach Formel (11) des oben erwähnten Aufsatzes „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung etc.“ (dieser Band, S. 176) besteht, wenn der reelle Theil von s grösser als 1 ist, die zu (17) analoge Gleichung

$$(32)\qquad \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{-s}\, du = \bar{\Gamma}(1-s)\, \mathfrak{F}(s; v).$$

Für den Integrationsweg gilt hierbei die nähere Bestimmung, dass die Variable u, die im Uebrigen die imaginäre Axe durchläuft, den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe umgehen soll. Man setze in (31) für V das Integral (32) und zugleich für die Constante s den Werth $\varrho-\sigma+1$ ein. Das hierdurch entstehende Doppelintegral

$$(33)\qquad \int_{-\infty}^{\bar{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$

geht, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ entwickelt wird, in die Reihe

$$N_0 + N_1 \frac{x}{1} + N_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + N_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

über, in welcher N_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Doppelintegral

$$N_\nu = \int_{-\infty}^{\bar{(0)}} v^{-\sigma-\nu}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1}\, du$$

bezeichnet. Aus der Gleichung (21) der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale“ (Seite 188 dieses Bandes, woselbst $a = 1 - \varrho - \nu$, $b = 1 - \sigma - \nu$ genommen wird) folgt aber

$$N_\nu = \bar{\Gamma}(1 - \varrho - \nu)\,\bar{\Gamma}(1 - \sigma - \nu),$$

unter der Voraussetzung, dass die reellen Theile von $\varrho - 1$, $\sigma - 1$ und $\varrho - \sigma$ positiv sind. Indem man die letztere Annahme macht und die Formel*)

$$\bar{\Gamma}(a - \nu) = (-1)^\nu \frac{\bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\ldots(a-\nu)} \tag{34}$$

berücksichtigt, erhält man die Gleichung

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1}\, du \\ &\quad = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\,\bar{\Gamma}(1-\sigma)\,\mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x). \end{aligned} \right. \tag{35}$$

Das Doppelintegral (33) ist also gleich dem Product aus der Reihe (1) und einer constanten Grösse.

Zu einer anderen Form der eindeutigen particulären Lösung der Differentialgleichung (2) gelangt man, wenn man in (31) für V das bestimmte Integral (20), unter Fortlassung einer Potenz von -1, einführt. Es ergiebt sich dann das Doppelintegral

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v (e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}})\,(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}, \tag{36}$$

welches sich durch die Substitution $u = vu'$, $du = v\,du'$, in den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 (e^{2\sqrt{u'v}} + e^{-2\sqrt{u'v}})\,(1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

verwandelt. Wird $e^{\frac{x}{v}} = 1 + \frac{x}{v} + \cdots$ gesetzt, so entsteht hieraus die Reihe

$$P_0 + P_1 \frac{x}{1} + \cdots + P_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots,$$

in der P_ν die Constante

$$P_\nu = \int_{-\infty}^{(0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 (e^{2\sqrt{u'v}} + e^{-2\sqrt{u'v}})\,(1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

bedeutet. Durch Einführung der Variable $u = +\sqrt{u'}$ erhält man dann

$$P_\nu = 2\int_{-\infty}^{(0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 (e^{2u\sqrt{v}} + e^{-2u\sqrt{v}})\,(1-u^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, du.$$

*) Band 35 dieser Annalen, Seite 515.

Mithin ist die Formel (24) der vorstehenden Abhandlung (Seite 191 dieses Bandes) anwendbar, aus der, unter der Voraussetzung, dass die reellen Theile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sind,

$$P_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} E\left(\varrho - \tfrac{1}{2} + \nu,\ \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2 - 2\varrho - 2\nu)$$

folgt. Da nun für das Euler'sche Integral erster Art die Reductionsformel

$$(37)\quad E(a+\nu, b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} E(a, b)$$

gilt, und $\bar{\Gamma}(2 - 2\varrho - 2\nu)$ sich nach (34) umformen lässt, so findet man (nachdem einige Factoren sich fortgehoben haben) P_ν gleich dem Quotienten

$$P_\nu = \frac{2^{2\varrho-1} E\left(\varrho - \frac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2-2\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\ \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}.$$

Auf diese Weise entsteht für das Integral (36) die Gleichung

$$(38)\quad \begin{cases} \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \dfrac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2^{2\varrho-1} E\left(\varrho - \frac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \frac{1}{2}\right) \bar{\Gamma}(2-2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho, \sigma; x). \end{cases}$$

§ 6.

Es sollen noch zwei weitere Doppelintegrale betrachtet werden, die sich von der Reihe (1) nur durch das Hinzutreten constanter Factoren unterscheiden. Das erste derselben ist das Integral

$$(39)\quad \bar{\int}_{\infty}^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

welches durch die Substitution $u = vu'$, $du = v\, du'$, in den Ausdruck

$$(40)\quad \bar{\int}_{\infty}^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{u'v}} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

übergeht. Die Variable v soll in (39) und (40) einen Weg durchlaufen, der im unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe beginnt und nach zweimaliger positiver Umkreisung des Nullpunktes zu dem genannten unendlich fernen Punkte zurückkehrt. Man setze in (40) $e^{\frac{x}{v}} = 1 + \frac{x}{v} + \cdots$ und definire Q_ν als das Integral

$$Q_\nu = \int_\infty^{(0,0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{u'}\,v} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

(für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Dann ist das obige Integral gleich der Reihe

$$Q_0 + Q_1 \frac{x}{1} + \cdots + Q_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

Durch die Substitution $+\sqrt{u'} = u$ verwandelt sich aber Q_ν in den Ausdruck

$$Q_\nu = 2\int_\infty^{(0,0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^1 e^{-2u\sqrt{v}} (1-u^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\, du,$$

der nach Formel (28) des vorstehenden Aufsatzes (Seite 193 dieses Bandes), unter der Voraussetzung, dass die reellen Bestandtheile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sind, mit dem Werthe

$$2^{2\varrho+2\nu-1}\, e^{-2\pi i\varrho}\, E\Big(\varrho - \tfrac{1}{2} + \nu,\ \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\Big)\, \Gamma(2 - 2\varrho - 2\nu)$$

identisch ist. Hieraus folgt, dass Q_ν aus dem im vorigen Paragraphen behandelten Integral P_ν entsteht, wenn letzteres mit $e^{-2\pi i\varrho}$ multiplicirt wird. Das Integral (39) ist also gleich dem Producte

$$2^{2\varrho-1}\, e^{-2\pi i\varrho}\, E\Big(\varrho - \tfrac{1}{2},\ \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\Big)\, \Gamma(2 - 2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho, \sigma;\ x).$$

Es soll nunmehr von der Annahme, dass der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sei, abgesehen werden. Dann kann man statt des Integrals (40) das analog gebildete Integral

$$\int_\infty^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\varrho}\, dv \int_0^{(1)} e^{-2\sqrt{u'}\,v} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}} \tag{41}$$

anwenden, in welchem die Variable u' vom Nullpunkte aus einen positiven Umlauf um den Punkt 1 ausführt. Der Weg von v ist derselbe wie in (39) und (40). Das Integral (41) liefert, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 \frac{x}{1} + \mathfrak{Q}_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots,$$

in der

$$\mathfrak{Q}_\nu = \int_\infty^{(0,0)} v^{-\varrho-\nu}\, dv \int_0^{(1)} e^{-2\sqrt{u'}\,v} (1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du'}{\sqrt{u'}}$$

gesetzt ist. Der Werth von $\mathfrak{Q}_\nu$ ergiebt sich aus der Formel (33) der vorstehenden Abhandlung (Seite 196 dieses Bandes). Denn wenn man

$+\sqrt{u'} = u$ substituirt, so umkreist auch u, vom Nullpunkte aus, den Punkt 1 im positiven Sinne (cfr. Seite 195 dieses Bandes), so dass die Gleichung

$$\mathfrak{Q}_\nu = 2\int_\infty^{(0,0)} v^{-\varrho-\nu}\,dv \int_0^{(1)} e^{-2u\sqrt{v}}\,(1-u^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du$$

erhalten wird. Folglich ist nach der angeführten Formel

$$\mathfrak{Q}_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1}\,e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\,\overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu).$$

Für die Grösse $\overline{E}\left(\varrho-\frac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)$ wird die Reductionsformel (Band 35 dieser Annalen, S. 511)

$$(42)\qquad \overline{E}(a+\nu,\ b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\,\overline{E}(a,\ b)$$

benutzt. Dann findet man für das Integral (41) die Gleichung

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\infty^{(0,0)} e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\varrho}\,dv\int_0^{(1)} e^{-2\sqrt{u'}v}\,(1-u')^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{u'}} \\ = 2^{2\varrho-1}\,e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\,\overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho,\sigma;x), \end{array}\right.$$

in welcher der reelle Theil der Constante $\varrho - 1$ als positiv vorausgesetzt ist.

Die in §§ 4 und 5 abgeleiteten particulären Integrale der Differentialgleichung (2) ergaben sich aus dem Integral (10), indem in letzteres particuläre Lösungen der Differentialgleichung (13) an Stelle von V substituirt wurden. Man bemerke, dass dies von den Integralen (39) und (41) nicht gilt. Diese Integrale entstehen aus (10), wenn man für V die Function

$$(44)\qquad \int_0^v e^{-2\sqrt{u}}\,(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{u}},$$

resp. die Function

$$(45)\qquad \int_0^{(v)} e^{-2\sqrt{u}}\,(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

einsetzt und die Variable v den oben bezeichneten Integrationsweg durchlaufen lässt. Die Ausdrücke (44) und (45) genügen aber nicht der Differentialgleichung (13)

$$v\,\frac{d^2V}{dv^2} + (\varrho-\sigma+1)\,\frac{dV}{dv} - V = 0,$$

sondern einer Differentialgleichung von der Form*)

$$v\frac{d^2V}{dv^2}+(\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv}-V=\chi(v). \tag{46}$$

In der That lässt sich das in § 2 angegebene Verfahren dahin ausdehnen, dass die Gleichung (13) durch die Gleichung (46), in der $\chi(v)$ irgend eine Function von v bedeutet, ersetzt wird. Man hat dann, wie aus (12) folgt, statt der Bedingung (14) die Bedingung

$$[M]_{v=h}-[M]_{v=g}+\int_g^h e^{\frac{x}{v}}v^{-\sigma}\chi(v)\,dv=0 \tag{47}$$

zu nehmen. Es ändert sich also nur die Gleichung, welche sich auf die Grenzen g, h des Integrals (10) bezieht.

§ 7.

Man geht nun dazu über, die in (5) angegebene Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\varrho+\sigma+\tau+3)x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\tau\frac{dy}{dx}-y=0$$

zu behandeln. Dieselbe gestattet eine ähnliche Lösung durch bestimmte Integrale wie die Differentialgleichung (2). Durch die Substitution

$$y=\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}w^{-\tau}W\,dw, \tag{48}$$

wo W nur von w abhängen soll, nimmt die Gleichung (5) die Form

$$\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}x^3w^{-\tau-4}W\,dw+(\varrho+\sigma+\tau+3)\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}x^2w^{-\tau-3}W\,dw$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}xw^{-\tau-2}W\,dw$$
$$+\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}w^{-\tau}\left(\frac{\varrho\sigma\tau}{w}-1\right)W\,dw=0$$

an. Indem man die Formel der theilweisen Integration auf den ersten Summandus dieser Gleichung dreimal, auf den zweiten zweimal, auf den dritten einmal anwendet (cfr. § 2), findet man

$$[M']_{w=g'}^{w=h'}+\int_{g'}^{h'}e^{\frac{x}{w}}w^{-\tau}\left\{\begin{matrix}w^2\frac{d^3W}{dw^3}+(\varrho'+\sigma'+1)w\frac{d^2W}{dw^2}\\+\varrho'\sigma'\frac{dW}{dw}-W\end{matrix}\right\}dw=0,$$

wo unter M' der Ausdruck

*) Man vergleiche § 2 der Abhandlung des Verfassers „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 38 dieser Annalen, Seite 229.

$$(49)\quad M' = -e^{\frac{x}{w}}\left\{\begin{array}{l} w^{-\tau-2}\{x^2-(\tau+2)wx+(\tau+1)(\tau+2)w^2\}\,W \\ +w^{-\tau}\{x-2(\tau+1)w\}\,\frac{dW}{dw}+w^{-\tau+2}\,\frac{d^2W}{dw^2} \\ +(\varrho+\sigma+\tau+3)w^{-\tau-1}\{(x-[\tau+1]w)\,W+w^2\,\frac{dW}{dw}\} \\ +(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)w^{-\tau}W \end{array}\right\}$$

und unter ϱ', σ' die Constanten

$$(50)\qquad \varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

verstanden werden. Die Function W sei nun ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$(51)\qquad w^2\,\frac{d^3W}{dw^3}+(\varrho'+\sigma'+1)w\,\frac{d^2W}{dw^2}+\varrho'\sigma'\,\frac{dW}{dw}-W=0.$$

Zugleich mögen die Grössen g', h', für welche man nach § 2 entweder Constante oder den Werth $-\mathfrak{c}x$ setzt, die Bedingung

$$(52)\qquad [M']_{w=h'} - [M']_{w=g'} = 0$$

befriedigen. Dann genügt das bestimmte Integral (48) der Differentialgleichung (5).

Die Gleichung (51) entsteht aus (2), wenn man ϱ', σ', w, W statt ϱ, σ, x, y schreibt. Also kann man für W Doppelintegrale von der Art, wie sie in den vorstehenden Paragraphen erhalten wurden, substituiren. Der Ausdruck (48) geht hierdurch in ein dreifaches Integral über.

§ 8.

Um zu den mehrdeutigen Hauptintegralen der Differentialgleichung (5) zu gelangen, lässt man in (48) die Variable w den in § 4 (Fig. 1) erwähnten Integrationsweg durchlaufen, der im Punkte $-\mathfrak{c}x$ beginnt und endigt und den Nullpunkt im positiven Sinne umkreist. Man bildet also das Integral

$$(53)\qquad \int_{-\mathfrak{c}x}^{(0)} e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\,W\,dw.$$

Werden hierin für W die zu (22) und (23) analogen Doppelintegrale

$$(54)\qquad \int_{-\mathfrak{c}w}^{(0)} e^{\frac{w}{v}}\,v^{\tau-\sigma-1}\,dv \int_{-\mathfrak{c}v}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du,$$

$$(55)\qquad \int_{-\mathfrak{c}w}^{(0)} e^{\frac{w}{v}}\,v^{\tau-\sigma-1}\,dv \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$

eingesetzt, so entstehen die dreifachen Integrale

$$\int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\epsilon w}^{(0)} dv \int_{-\epsilon v}^{(0)} \Phi\, du, \tag{56}$$

$$\int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\epsilon w}^{(0)} dv \int_{-\infty}^{(0)} \Phi\, du, \tag{57}$$

in denen Φ die Function

$$\Phi = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} \tag{58}$$

und ϵ (wie in §§ 3 und 4) eine unendlich kleine positive reelle Constante bezeichnet.

. Zur Entwickelung der Integrale (56) und (57) nach steigenden Potenzen von x wird wiederum die Formel (26), in welcher w an die Stelle von v tritt, benutzt. Nach Berücksichtigung der Gleichungen (27) und (28) (mit ϱ', σ', w statt ϱ, σ, x) findet man für das Integral (56) den Ausdruck

$$\bar{\Gamma}(\varrho-1)\,\bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\bar{\Gamma}(\varrho-\tau)\,x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ x) \tag{59}$$

und für das Integral (57) den Ausdruck

$$\bar{\Gamma}(\sigma-1)\,\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\bar{\Gamma}(\sigma-\tau)\,x^{1-\sigma}\,\mathfrak{F}(2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ x). \tag{60}$$

Reihen derselben Art, die sich von (7) und (8) nur durch constante Factoren unterscheiden, ergeben sich, wenn in (53) für W die zu (24) und (25) analogen Doppelintegrale substituirt werden.

Man erhält ferner dreifache Integrale, die, von einem constanten Factor abgesehen, in die Reihe (9) übergehen, indem man für die Grösse W in (53) eines der Doppelintegrale nimmt, welche die eindeutige Hauptlösung der Differentialgleichung (51) darstellen (§§ 5 und 6). Es sollen hier zwei der bezüglichen Ausdrücke angegeben werden, bei denen für W nach einander das zu (33) und das zu (41) analoge Integral gewählt ist. Aus den Formeln (26), (35) und (43) folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} \Phi\, du \\ &= \bar{\Gamma}(\tau-1)\,\bar{\Gamma}(\tau-\varrho)\,\bar{\Gamma}(\tau-\sigma)\,x^{1-\tau}\,\mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x) \end{aligned}\right. \tag{61}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\epsilon x}^{(0)} dw \int_{\infty}^{(0,0)} dv \int_{0}^{(1)} \Psi\, du \\ &= \mathfrak{C}\, x^{1-\tau}\,\mathfrak{F}(2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x), \end{aligned}\right. \tag{62}$$

wo unter Φ die Function (58), unter Ψ die Function

$$\Psi = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\varrho-1} e^{-2\sqrt{uv}} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} \tag{63}$$

und unter $\mathfrak{C}$ die Constante

$$2^{2\varrho-2\tau+1} e^{-\pi i\left(3\varrho-\sigma-2\tau+\frac{1}{2}\right)} \bar{\Gamma}(\tau-1)\bar{\Gamma}(2\tau-2\varrho)\bar{E}\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)$$

verstanden wird. In (61) sind die reellen Theile von $\varrho-\sigma$, $\varrho-\tau$, $\sigma-\tau$, in (62) der reelle Theil von $\varrho-\tau$ als positiv vorausgesetzt.

§ 9.

Für das Integral (48) soll schliesslich ein Integrationsweg gewählt werden, der (wie der Weg von v in (39), (40), (41)) seinen Anfang und sein Ende in dem unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Axe hat und einen zweimaligen positiven Umlauf um den Nullpunkt enthält. An Stelle von W wird wiederum ein Doppelintegral nach u und v eingeführt; jedoch soll für v ein ähnlicher Integrationsweg zur Anwendung kommen, wie für das Integral (17) des Aufsatzes „Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen“*) angegeben ist. Es seien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die Producte

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}e^{-i\varkappa}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}e^{i\varkappa}, \tag{64}$$

in denen $\varkappa$ eine reelle, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende Constante, und $\mathfrak{e}$ wiederum einen unendlich kleinen reellen positiven Werth bedeutet. Man betrachtet, indem man Ω die Function

$$\Omega = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} \tag{65}$$

nennt, das dreifache Integral

$$\int_{\infty}^{(0,0)} dw \int_{\mathfrak{e}_1 w}^{\mathfrak{e}_2 w} dv \int_0^v \Omega\, du, \tag{66}$$

das sich, abgesehen von einem constanten Factor, als identisch mit der Reihe (6) erweist. Der Weg der Variable v möge, für einen beliebigen der vorkommenden Werthe von w, nach Fig. 2 aus einer geradlinigen Strecke von $\mathfrak{e}_1 w$ bis zum Punkte m_1, einem Kreisbogen $m_1 d m_2$, welcher in positiver Drehungsrichtung durchlaufen wird, und der geradlinigen Strecke von m_2 bis zum Punkte $\mathfrak{e}_2 w$ bestehen. Die beiden genannten geraden Wegstrecken bilden mit der Verbindungslinie der Punkte 0 und w den stumpfen Winkel $\varkappa$. Man setzt in (66) die reellen Theile der Constanten $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv voraus.

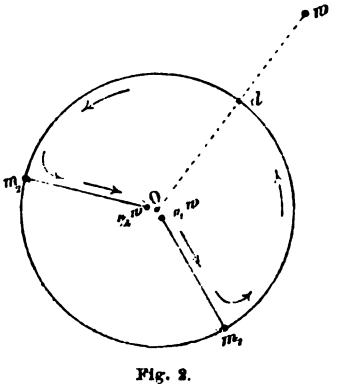


Fig. 2.

*) Dieser Band, Seite 172.

Das Integral (66) nimmt durch die Substitution

$$u = vu = vwu, \qquad v = wv,$$
$$du = vdu = vwdu, \quad dv = wdv$$

die Gestalt

$$\int_{\infty}^{(0,0)} e^{\frac{x}{w}} w^{-\varrho} dw \int_{c_1}^{c_2} e^{v} v^{\varrho-\varrho-1} dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{uvw}} (u-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

an. Wird hierin $e^{\frac{x}{w}} = 1 + \frac{x}{w} + \cdots$ gesetzt, so hat man für das Integral (66) die Entwickelung

$$(67) \qquad (-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \left\{ \Lambda_0 + \Lambda_1 \frac{x}{1} + \Lambda_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \Lambda_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots \right\},$$

woselbst Λ_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante dreifache Integral

$$\int_{\infty}^{(0,0)} w^{-\varrho-\nu} dw \int_{c_1}^{c_2} e^{\frac{1}{v}} v^{\varrho-\varrho-1} dv \int_0^1 e^{-2\sqrt{uvw}} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

bezeichnet. In Λ_ν wird die Variable $w = +\sqrt{w}$ eingeführt, welche den Nullpunkt einmal umkreist, wenn w zwei Umläufe um denselben macht. Nennt man

$$(68) \qquad \Omega' = 2w^{1-2\varrho-2\nu} e^{\frac{1}{v}} v^{\varrho-\varrho-1} e^{-2w\sqrt{uv}} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}},$$

so ergiebt sich für Λ_ν der Ausdruck

$$(69) \qquad \Lambda_\nu = \int_{\infty}^{(0)} dw \int_{c_1}^{c_2} dv \int_0^1 \Omega' du.$$

Die Rechnung, durch welche man den Werth des letzteren Integrals ermittelt, ist derjenigen analog, die in § 4 der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale" angestellt wurde. Man ändert die Integrationsfolge, indem man zeigt, dass nach w zuerst integrirt werden darf. Zu diesem Behuf soll zunächst bewiesen werden, dass die zu $u = 0$ und $v = 0$ benachbarten Integralelemente nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe von Λ_ν liefern. Es seien δ und ε zwei endliche, jedoch überaus kleine positive reelle Constante, und ε_1, ε_2 die Producte

$$\varepsilon_1 = \varepsilon e^{-i\varkappa}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon e^{i\varkappa},$$

wo unter $\varkappa$ die in (64) genannte (zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende) Constante verstanden wird. Die drei Integrale

$$(70)\qquad \begin{cases} \mathfrak{G} = \int_{\infty}^{(0)} dw \int_{c_1}^{c_2} dv \int_0^{\delta} \Omega' du, \\ \mathfrak{H}_1 = \int_{\infty}^{(0)} dw \int_{c_1}^{\varepsilon_1} dv \int_{\delta}^{1} \Omega' du, \\ \mathfrak{H}_2 = \int_{\infty}^{(0)} dw \int_{\varepsilon_2}^{c_2} dv \int_{\delta}^{1} \Omega' du \end{cases}$$

enthalten diejenigen Elemente von Λ_r, in denen u oder v unendlich klein ist. Indem man $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ in ihre einzelnen Bestandtheile zerlegt, kann man nachweisen, dass sie mit δ, ε zugleich beliebig klein werden.

In dem Integral (69) sowohl als in dem Integral $\mathfrak{G}$ durchläuft die Variable v einen Weg, der nach Fig. 3 aus den Abschnitten $c_1 m_1'$, $m_1' l m_2'$ und $m_2' c_2$ gebildet wird. Bezeichnet man mod. v durch r und setzt $v = r e^{\vartheta i}$, so folgt

$$e^{\frac{1}{v}} = e^{\frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)}.$$

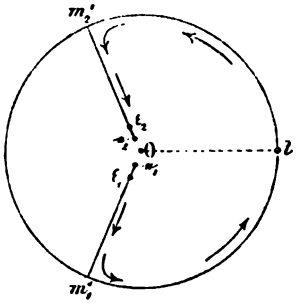


Fig. 3.

Auf den geradlinigen Strecken $c_1 m_1'$ und $m_2' c_2$ ist $\cos\vartheta$ negativ ($\vartheta = -\varkappa$ auf $c_1 m_1'$, $\vartheta = +\varkappa$ auf $m_2' c_2$); daher nimmt $e^{\frac{1}{v}}$ nur endliche, resp. unendlich kleine Werthe an. Ebenso ist der Werth von $e^{-2w\sqrt{uv}}$ hier stets ein endlicher. Denn in $\sqrt{v}$, $= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$, und folglich auch in $\sqrt{uv}$ ist der reelle Bestandtheil positiv $\left(\text{da } -\frac{\varkappa}{2} \leqq \frac{\vartheta}{2} \leqq \frac{\varkappa}{2}\right)$, so dass für grosse positive reelle Werthe von w die Grösse $e^{-2w\sqrt{uv}}$ sich der Null nähert. Das in $\mathfrak{G}$ vorkommende Doppelintegral

$$\int_{c_1}^{c_2} e^{\frac{1}{v}} v^{\tau-\varrho-1} dv \int_0^{\delta} e^{-2w\sqrt{uv}} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du$$

ist demnach für ein genügend kleines δ kleiner als jede angebbare Zahl. Dieser Schluss überträgt sich auf diejenigen Bestandtheile von $\mathfrak{G}$, bei denen nach w über endliche Wegstrecken integrirt wird. Es bleibt übrig zu zeigen, dass wenn p irgend eine positive reelle Zahl ist, das Integral

$$\mathfrak{G}' = \int_p^{\infty} dw \int_{c_1}^{c_2} dv \int_0^{\delta} \Omega' du$$

mit δ zugleich beliebig klein wird.

In $\mathfrak{G}'$ ist, wie aus den obigen Bemerkungen folgt, mod. $e^{-2w\sqrt{uv}}$ kleiner als 1, da der reelle Theil des Exponenten das negative Vorzeichen hat. Setzt man

$$\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2, \quad \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2,$$

wo ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2, τ_1, τ_2 reelle Zahlen bedeuten, so wird

$$\text{mod.}\left[(1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\right] = (1-u)^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}, \quad \text{mod.}\,[w^{1-2\varrho-2\nu}] = w^{1-2\varrho_1-2\nu};$$

denn $1-u$ und w sind reell und positiv. Ferner ist

$$\text{mod.}\left(\frac{1}{e^v}\right) = \text{mod.}\left(e^{\frac{1}{r}[\cos\vartheta - i\sin\vartheta]}\right) = e^{\frac{1}{r}\cos\vartheta}$$

und

$$\text{mod.}\,(v^{\tau-\varrho-1}) = \text{mod.}\,(r^{\tau-\varrho-1}\, e^{[\tau-\varrho-1]\vartheta i}) = r^{\tau_1-\varrho_1-1}\, e^{-\vartheta(\tau_2-\varrho_2)}.$$

Für die zu integrirende Function in $\mathfrak{G}'$ gilt also die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,\Omega' < 2w^{1-2\varrho_1-2\nu}\, e^{\frac{1}{r}\cos\vartheta - \vartheta(\tau_2-\varrho_2)}\, r^{\tau_1-\varrho_1-1}(1-u)^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\, u^{-\frac{1}{2}}.$$

Es sind nun die einzelnen Abschnitte des Integrationsweges von v zu unterscheiden. Es sollen durch $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2'$, $\mathfrak{G}_3'$ die Theile von $\mathfrak{G}'$, welche den drei Strecken $c_1 m_1'$, $m_1' l m_2'$, $m_2' c_2$ des Integrals nach v entsprechen, bezeichnet werden, so dass

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_2' + \mathfrak{G}_3'$$

ist. Für das Integral $\mathfrak{G}_1'$, in welchem v die Werthe $re^{-\varkappa i}$ (von $r = c$ bis $r = l$) durchläuft, besteht die Ungleichheit

$$\text{mod.}\,\mathfrak{G}_1' < e^{\varkappa(\tau_2-\varrho_2)}\,\mathfrak{P}\mathfrak{D}\int_c^l e^{\frac{1}{r}\cos\varkappa}\, r^{\tau_1-\varrho_1-1}\, dr,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{D}$ die Grössen

$$\mathfrak{P} = 2\int_p^\infty w^{1-2\varrho_1-2\nu}\, dw = \frac{2p^{2-2\varrho_1-2\nu}}{2\varrho_1+2\nu-2},$$

$$\mathfrak{D} = \int_0^\delta (1-u)^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

bedeuten. Die rechte Seite der letzteren Ungleichheit geht, wenn $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt wird, in einen Ausdruck über, der grösser als mod. $\mathfrak{G}_3'$ ist. Nun sind sowohl $\mathfrak{P}$ und $e^{\varkappa(\tau_2-\varrho_2)}$ als auch das Integral

$$\int_c^l e^{\frac{1}{r}\cos\varkappa}\, r^{\tau_1-\varrho_1-1}\, dr$$

(in welchem die zu integrirende Function an der unteren Grenze verschwindet) endliche Werthe. Andererseits findet man für $\mathfrak{D}$ mit Hülfe des Satzes vom Mittelwerth die Gleichung

$$\mathfrak{D} = (1-\delta')^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}}\int_0^\delta \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\delta^{\frac{1}{2}}(1-\delta')^{\sigma_1-\varrho_1-\frac{1}{2}},$$

in der $0 < \delta' < \delta$ ist. Demnach nehmen $\mathfrak{D}$, und folglich auch mod. $\mathfrak{G}_1'$ und mod. $\mathfrak{G}_3'$ mit δ zugleich bis zur Null ab. Dasselbe gilt von der Grösse $\mathfrak{G}_2'$. Da in $\mathfrak{G}_2'$

$$\mathfrak{v} = le^{\vartheta i}, \quad d\mathfrak{v} = lie^{\vartheta i}\, d\vartheta$$

zu setzen ist, so ergiebt sich die Ungleichheit

$$\text{mod. } \mathfrak{G}_2' < l^{\tau_1 - \varrho_1}\, \mathfrak{P}\mathfrak{D} \int_{-\varkappa}^{+\varkappa} e^{\frac{1}{l}\cos\vartheta - (\tau_2 - \varrho_2)\vartheta}\, d\vartheta,$$

deren rechte Seite wiederum den Factor $\mathfrak{D}$ enthält, während $l^{\tau_1 - \varrho_1}$, $\mathfrak{P}$ und das Integral nach ϑ endliche Grössen bezeichnen.

Es ist somit bewiesen, dass das in (70) genannte Integral $\mathfrak{G}$ einen zu vernachlässigenden Werth hat, sobald für δ eine genügend kleine endliche Zahl gewählt wird.

Man kann ferner leicht zeigen, dass die Grössen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ beliebig klein werden, weil die in ihnen enthaltenen Integrale nach $\mathfrak{v}$ diese Eigenschaft haben. Für positive reelle $\mathfrak{w}$ ist auch hier mod. $e^{-2\mathfrak{w}\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}$ kleiner als 1, so dass analoge Schlüsse wie bei $\mathfrak{G}_1'$ und $\mathfrak{G}_3'$ angewendet werden können.

In dem Integral (69) sind die unendlich kleinen Werthe von $\mathfrak{u}$, resp. $\mathfrak{v}$, noch als unendlich klein gegen die Werthe $\frac{1}{\mathfrak{w}}$, in denen $\mathfrak{w}$ unendlich gross wird, anzusehen, da nach $\mathfrak{w}$ zuletzt integrirt werden soll. Dieses Verhältniss kehrt sich um, falls man die Integrationsfolge in der Art ändert, dass die Integration nach $\mathfrak{w}$ zuerst ausgeführt wird. Aus dem Umstande, dass die Ausdrücke $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ beliebig klein sind, geht indessen hervor, dass der genannte Wechsel in dem gegenseitigen Verhältnis der unendlich kleinen Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\frac{1}{\mathfrak{w}}$ keinen Einfluss auf den Werth des Integrals Λ_ν ausübt.

Lässt man in (69) die zu vernachlässigenden Bestandtheile $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ fort, so entsteht für Λ_ν der Ausdruck

$$\Lambda_\nu = \int_{\infty}^{\overline{+(0)}} d\mathfrak{w} \int_{\varrho_1}^{+\varrho_2} d\mathfrak{v} \int_{\vartheta}^{1} \Omega'\, d\mathfrak{u}. \tag{71}$$

Hierin ist die zu integrirende (in (68) angegebene) Function Ω' für alle Werthe von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ stetig. Nennt man ferner $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, bezw. $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ beliebige Punktepaare der obigen Integrationswege von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, so erhält man bei dem Uebergang von den Argumenten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ zu den Argumenten $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$ einen und denselben Werth $\Omega'(\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2)$, ohne Rücksicht darauf, in welcher Reihenfolge die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ variiren. Da ausserdem die Integrationswege feststehende sind, so kann auf Grund der vorangegangenen Rechnungen

die Integrationsfolge geändert werden. Indem man zuerst nach w integrirt, gewinnt man aus (1) die Gleichung

$$\Lambda_\nu = 2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{\frac{1}{v}} v^{\sigma-\varrho-1}\,dv \int_\delta^{\vartheta_1} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \int_x^{\infty+\vartheta i} e^{-2w\sqrt{uv}}\, w^{1-2\varrho-2\nu}\,dw.$$

Es werde nun an Stelle von w die Variable t durch die Substitution

$$w = \frac{t}{2\sqrt{uv}}, \qquad dw = \frac{dt}{2\sqrt{uv}}$$

eingeführt. Da u reell und positiv ist, und $v = re^{\vartheta i}$ gesetzt wurde, so beginnt und endigt der Weg der Variable t in dem unendlich entfernten Punkte

$$\lim_{t=\infty} \left(se^{\frac{\vartheta i}{2}}\right),$$

welcher kurz durch q' bezeichnet werden soll. Das Integral nach w geht, weil auch t den Nullpunkt einmal im positiven Sinne umkreist, hierdurch in den Ausdruck

$$\int_x^{\infty(0)} e^{-2w\sqrt{uv}}\, w^{1-2\varrho-2\nu}\,dw = (4uv)^{\varrho+\nu-1} \int_0^{\infty(0)} e^{-t}\, t^{1-2\varrho-2\nu}\,dt$$

über. Die Verbindungslinie der Punkte 0 und q' bildet mit der positiven reellen Axe einen spitzen Winkel; denn es ist

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\vartheta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < \varkappa < \pi.$$

In Folge dessen wird die Formel (13) des Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(a)$“ *) anwendbar, welche für das Integral nach t (obwohl die Grenze q' von ϑ abhängt) den constanten Werth

$$\int_{q'}^{\infty(0)} e^{-t}\, t^{1-2\varrho-2\nu}\,dt = e^{-2\pi i\varrho}\,\bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)$$

ergiebt. Also ist

$$\Lambda_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1}\, e^{-2\pi i\varrho}\,\bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{\frac{1}{v}}\, v^{\sigma+\nu-2}\,dv \int_\delta^{\vartheta_1} u^{\varrho+\nu-\frac{3}{2}} (1-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du,$$

woselbst die Integralgrenzen δ, ε_1, ε_2 wieder durch 0, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ ersetzt werden können. Das Integral nach v hat gemäss der Formel (16)

*) Dieser Band, S. 162.

der soeben genannten Arbeit „Bemerkungen etc." den Werth $\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu)$, und das Integral nach u ist das Euler'sche Integral

$$E\left(\varrho+\nu-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right).$$

Folglich besteht, unter der Annahme, dass die reellen Theile von $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ positiv sind, die Gleichung

$$\Lambda_\nu = \int_\infty^{\bar{(0)}} dw \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} dv \int_0^1 \Omega' du$$

$$= 2^{2\varrho+2\nu-1} e^{-2\pi i\varrho} \bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu) E\left(\varrho+\nu-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right), \tag{72}$$

in der Ω' die Function (68), und ϵ_1, ϵ_2 die unendlich kleinen Grössen (64) sind. Durch Benutzung der Reductionsformeln (34) und (37) findet man dann

$$\Lambda_\nu = \frac{2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho}\, \bar{\Gamma}(2-2\varrho)\, \bar{\Gamma}(1-\tau)\, E\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)\,\tau(\tau+1)\ldots(\tau+\nu-1)}.$$

Wird dieser Werth in die Reihe (67) eingesetzt, so ergiebt sich für das in (66) genannte Integral die Gleichung

$$\left\{ \int_\infty^{\bar{(0,0)}} dw \int_{\epsilon_1 w}^{\epsilon_2 w} dv \int_0^v \Omega\, du \right.$$
$$\left. = \mathfrak{C}'\,\mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x), \right. \tag{73}$$

wo unter $\mathfrak{C}'$ die Constante

$$\mathfrak{C}' = (-1)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} 2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho} \bar{\Gamma}(2-2\varrho)\, \bar{\Gamma}(1-\tau)\, E\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right),$$

und unter Ω die Function (65) verstanden wird.

Das auf der linken Seite von (73) stehende dreifache Integral möge, wenn der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ negativ oder gleich Null ist, durch das Integral

$$\int_\infty^{\bar{(0,0)}} dw \int_{\epsilon_1 w}^{\epsilon_2 w} dv \int_0^{\bar{(v)}} \Omega\, du \tag{74}$$

ersetzt werden, welches sich von dem erstgenannten dadurch unterscheidet, dass die Variable u, vom Nullpunkte aus, einen positiven Umlauf um den Punkt v ausführt. Wird das Integral (74) in eine Reihe von der Form (67) entwickelt, so können für die Coefficienten, in Bezug auf die Umkehrung der Integrationsordnung, dieselben Schlüsse wie für das Integral (69) angewendet werden*). Man erhält

*) Man vergleiche auch § 5 der vorstehenden Abhandlung „Ueber fünf Doppelintegrale."

auf diese Weise, unter der Voraussetzung, dass der reelle Theil von $\varrho - 1$ positiv ist, für das Integral (74) den Ausdruck

$$\mathfrak{C}'' \mathfrak{F}(\varrho, \sigma, \tau; x),$$

in welchem $\mathfrak{C}''$ die Constante

$$\mathfrak{C}'' = 2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i \varrho} \bar{\Gamma}(2-2\varrho) \bar{\Gamma}(1-\tau) \overline{E}\left(\varrho - \tfrac{1}{2}, \sigma - \varrho + \tfrac{1}{2}\right)$$

bedeutet.*)

Kiel, im Juni 1891.

---

*) Man vergleiche auch die Abhandlung des Verfassers „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$" im 110ten Bande des Crelle'schen Journals.

Ein Beitrag zur Discussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes.

Von

Otto Staude in Rostock.

Einleitung.

Um die Richtung und Krümmung einer räumlichen Curve in irgend einem ihrer Punkte zu untersuchen, vergleicht man die Curve in der Umgebung des Punktes mit der Curve constanter Richtung, der geraden Linie, und mit der Curve constanter Krümmung, dem Kreise. So wird man auf den Begriff der Tangente und des Krümmungskreises geführt. Zur analytischen Darstellung dieser Gebilde bedarf man die ersten und zweiten Differentialquotienten der die Curve analytisch definirenden Functionen.

Neben die solchergestalt entwickelte Theorie der Krümmung der räumlichen Curven, dürfte sich als gleichberechtigt eine entsprechende Theorie stellen, die sich auf die Bewegung eines Punktes im Raume bezieht. Man wird die Bewegung eines Punktes in irgend einem Zeitpunkte in erster Linie in Beziehung setzen zu der Bewegung constanter Geschwindigkeit, der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, in zweiter Linie zu der Bewegung constanter Beschleunigung, der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Dadurch erhält jede Bewegung in jedem Zeitpunkte ihre „Tangentialbewegung“ und ihre „Schmiegungsbewegung“. Zur analytischen Darstellung dieser Bewegungsgebilde bedarf es wieder der ersten und zweiten Differentialquotienten der die Bewegung analytisch definirenden Functionen.

Der Zweck einer solchen Theorie, wie sie in den §§ 1—4 der vorliegenden Mittheilung entwickelt wird, ist zunächst der analoge, wie bei der eben vergleichsweise erwähnten Theorie der Krümmung der Raumcurven. Man gewinnt aus der Form der Tangential- und Schmiegungsbewegung eine übersichtliche Classification der verschiedenen Zeitpunkte einer durch ihre endlichen Gleichungen gegebenen Bewegung, wie solche in § 5 allgemein ausgeführt und in § 6 an einigen Beispielen erläutert ist.

Als Nebenzweck könnte man hierbei eine Ergänzung der analytischen Theorie der Krümmung räumlicher Curven in's Auge fassen. Entwickelt man nämlich die Formeln für die Krümmungsverhältnisse einer Raumcurve unter Zugrundelegung einer Parameterdarstellung, welche die 3 Coordinaten eines Punktes der Curve als Functionen einer Variabeln giebt, so vermischen sich in diesen Formeln die Singularitäten, welche die Raumcurve als solche unabhängig von dem gerade benutzten Parameter besitzt, und diejenigen, welche die Formeln in Folge der Wahl des Parameters in sich aufgenommen haben. Beide Bestandtheile werden durch Vermittlung der hier gegebenen Theorie in anschaulicher Weise auseinander gehalten, worüber am Schlusse der §§ 1 und 5 nähere Erläuterung gegeben ist.

Ein weiterer Zweck der Theorie der Tangential- und Schmiegungsbewegung liegt nun aber in ihrer Verwerthung zur Discussion der Bewegung eines Punktes, wenn dieselbe nicht durch ihre endlichen, sondern durch ihre Differentialgleichungen gegeben ist. Da nämlich die analytischen Bestimmungsstücke der Schmiegungsbewegung wesentlich von den 1. und 2. Differentialquotienten der Coordinaten des bewegten Punktes nach der Zeit abhängen, so können gewisse Sätze über die Bewegung aus den Bewegungsdifferentialgleichungen hergeleitet werden, ohne die vollständige Integration der letzteren auszuführen. Diesen Anwendungen sind die Capitel II und III der Mittheilung gewidmet, von denen das erstere die freie, das andere die an eine Fläche gebundene Bewegung mit Kräftefunction behandelt. Es wird hier beispielsweise der Satz aus der Theorie der parabolischen Wurfbewegung: „Lässt man von einem Punkte des Raumes mit der gleichen Geschwindigkeit, aber unter allen möglichen Elevationswinkeln parabolische Wurfbewegungen ausgehen, so liegen die Directricen der Bahnparabeln aller Bewegungen in einer und derselben Ebene" auf die Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction mit entsprechenden Modificationen verallgemeinert (§ 7). Es wird ferner eine Eigenschaft der Newton'schen Centralbewegung abgeleitet, durch welche diese Bewegung als die einfachste aller Centralbewegungen erscheint, in ähnlichem Sinne, wie der Kreis als die Curve der einfachsten Krümmungsverhältnisse (§ 10). Es wird weiter untersucht, wann eine Spitze der Bahncurve einer Bewegung eine völlige Umkehr der Bewegung in die bereits durchlaufene Bahn oder einen Uebergang auf einen neuen in der Spitze sich anschliessenden Curvenzweig mit sich bringt (§ 9, § 14). Zur Erläuterung dieser letzteren Betrachtung wird ausführlich ein bisher wohl nicht hervorgehobenes Vorkommniss bei der viel behandelten Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Fläche erörtert, nämlich das Vorkommen einer pendelartigen Oscillation auf einer doppelt gekrümmten Bahncurve (§ 15).

Durch die hiermit angedeuteten Verwerthungen dürfte sich die Entwicklung der Theorie der Tangential- und Schmiegungsbewegung einigermaassen rechtfertigen.

Capitel I.

Theorie der Tangential- und Schmiegungsbewegung.

§ 1.

Die Tangentialbewegung.

Die Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes im Raume seien:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t), \tag{1}$$

es bedeuten x, y, z die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Massenpunktes zur Zeit t und φ, χ, ψ gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen t. Wir bezeichnen die Gleichungen (1) als die „Gleichungen der Bewegung in laufenden Elementen x, y, z, t."

Es sei gegenwärtig t ein bestimmter Zeitpunkt und x, y, z der zugehörige Ort des Punktes, während die laufenden Elemente der Bewegung neuerdings ξ, η, ζ, τ genannt werden sollen. Wir nehmen die Taylor'schen Entwicklungen:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(\tau) = \varphi(t+\tau-t) = x + x'(\tau-t) + \frac{1}{2}x''(\tau-t)^2 + \cdots, \\ \eta = y + y'(\tau-t) + \frac{1}{2}y''(\tau-t)^2 + \cdots, \\ \zeta = z + z'(\tau-t) + \frac{1}{2}z''(\tau-t)^2 + \cdots, \end{cases} \tag{2}$$

in welchen die Accente die Differentiation nach t bezeichnen, für hinreichend kleine Werthe der Differenz $\tau - t$ als convergent an. Die erhaltenen Gleichungen (2) sind die Gleichungen der Bewegung in der Umgebung des Zeitpunktes t in laufenden Elementen ξ, η, ζ, τ.

Die nach den ersten Potenzen abgebrochenen Gleichungen:

$$\begin{cases} \xi = x + x'(\tau-t), \\ \eta = y + y'(\tau-t), \\ \zeta = z + z'(\tau-t) \end{cases} \tag{3}$$

stellen alsdann die „*Tangentialbewegung* der durch die Gleichungen (1) gegebenen Hauptbewegung im Zeitpunkte t" in laufenden Elementen ξ, η, ζ, τ dar. Diese Tangentialbewegung ist — nach der Form der Gleichungen (3) — eine gleichförmige geradlinige Bewegung eines Punktes und ist — nach der Beziehung der Gleichungen (3) und (2) —

in einer hinreichend kleinen Umgebung des Zeitpunktes t (bis auf Glieder 1. Ordnung des Zeitunterschiedes $\tau - t$ einschliesslich) mit der Hauptbewegung identisch. Als gleichförmige geradlinige Bewegung hat sie eine gewisse Geschwindigkeit, die wir sowohl nach ihrer Grösse:

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{4}$$

(der doppelte Horizontalstrich bezeichnet den positiven Werth der Quadratwurzel), als auch nach ihren Richtungscosinus:

$$\frac{x'}{s'}, \quad \frac{y'}{s'}, \quad \frac{z'}{s'} \tag{4}$$

auffassen und geometrisch durch eine Richtungslinie (Vector), eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung (einschliesslich Pfeilspitze), dargestellt denken.

Ist der Begriff der Geschwindigkeit nur für die gleichförmige geradlinige Bewegung definirt, so haben wir unter der *Geschwindigkeit der allgemeinen Bewegung* (1) *im Zeitpunkte* t die Geschwindigkeit der diesem Zeitpunkt entsprechenden Tangentialbewegung zu verstehen.

Die Richtungscosinus (4) der Geschwindigkeit (und zwar ohne bestimmtes Vorzeichen der Quadratwurzel) sind zugleich die Richtungscosinus der Tangente derjenigen Raumcurve im Punkte x, y, z, welche in den Gleichungen (1) ohne Rücksicht auf die Bedeutung von t ihre Parameterdarstellung und eventuell nach Elimination von t eine von t unabhängige analytische Darstellung findet, und die im allgemeinen als Bahncurve der Bewegung (1) zu betrachten ist. Wir können daher sagen:

Die geradlinige Bahn der Tangentialbewegung für den Zeitpunkt t ist die Tangente der Bahncurve der Hauptbewegung im Punkte xyz.

In einem Falle — immer die Gültigkeit der Entwicklungen (2) vorausgesetzt — hat die Tangentialbewegung keine Bahncurve, wenn nämlich:

$$x' = 0, \; y' = 0, \; z' = 0 : s' = 0. \tag{5}$$

Dann ist sie überhaupt keine eigentliche Bewegung mehr, sondern in Ruhe übergegangen; ihre Geschwindigkeit ist an Grösse 0 und an Richtung unbestimmt (vgl. (4)). Der ausgesprochene Satz bleibt aber in entsprechendem Sinne bestehen, wenn wir zwischen der obenerwähnten, unabhängig von t rein geometrisch betrachteten Raumcurve und der Bahncurve der Bewegung unterscheiden, und in dem Falle, wo die Tangentialbewegung keine Bahn mehr hat, der Bahncurve der Hauptbewegung die Tangente absprechen. Die zugehörige Raumcurve kann trotzdem eine Tangente haben. Wir mögen beispielsweise an die oscillirende Bewegung des gewöhnlichen Kreispendels

denken; nach unserer Auffassung hat die Bahncurve derselben an den beiden Umkehrstellen der Pendelbewegung keine Tangente, während der Kreis, auf dem sie liegt, daselbst eine Tangente besitzt.

§ 2.

Die Schmiegungsbewegung.

Die nach den zweiten Potenzen abgebrochenen Gleichungen (2):

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi = x + x'(\tau - t) + \frac{1}{2}x''(\tau - t)^2, \\ \eta = y + y'(\tau - t) + \frac{1}{2}y''(\tau - t)^2, \\ \zeta = z + z'(\tau - t) + \frac{1}{2}z''(\tau - t)^2 \end{cases}$$

stellen eine Bewegung in laufenden Elementen ξ, η, ζ, τ dar, welche wir die *Schmiegungsbewegung* der Hauptbewegung im Zeitpunkte t nennen wollen. Sie ist — nach der Form der Gleichungen (6) — eine gleichförmig beschleunigte Bewegung und ist in einer hinreichend kleinen Umgebung des Zeitpunktes t (bis auf Glieder 2. Ordnung der Zeitdifferenz $\tau - t$ einschliesslich) mit der Hauptbewegung identisch. Als gleichförmig beschleunigte Bewegung hat sie eine gewisse Beschleunigung, die wir sowohl nach ihrer Grösse:

$$(7)\qquad g = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

als nach ihren Richtungscosinus:

$$7)\qquad \frac{x''}{g}, \frac{y''}{g}, \frac{z''}{g}$$

auffassen und geometrisch durch eine Richtungslinie dargestellt denken.

Ist der Begriff der Beschleunigung nur für die gleichförmig beschleunigte Bewegung definirt, so haben wir unter der *Beschleunigung der Bewegung* (1) *im Zeitpunkte* t die Beschleunigung der diesem Zeitpunkte entsprechenden Schmiegungsbewegung zu verstehen.

Die Schmiegungsbewegung hat im Zeitpunkte t dieselbe Tangentialbewegung wie die Hauptbewegung, also auch dieselbe Geschwindigkeit. Im Allgemeinen ist die Bahn der Schmiegungsbewegung als einer gleichförmig beschleunigten Bewegung eine Parabel, welche mit der Bahn der Hauptbewegung im Punkte x, y, z nicht nur die Tangente, sondern auch die Schmiegungsebene und den Krümmungskreis gemein hat und sie in der 2. Ordnung berührt. Für Mittelpunkt ξ, η, ζ und Radius q des letzteren würden im vorliegenden Falle bekanntlich die Formeln gelten:

$$\xi - x = \frac{s'(s'x'' - x's'')}{g^2 - s''^2}, \quad \eta - y = \frac{s'(s'y'' - y's'')}{g^2 - s''^2}, \quad \zeta - z = \frac{s'(s's'' - z's'')}{g^2 - s''^2},$$

$$q = \frac{s'^2}{\sqrt{g^2 - s''^2}},$$

wobei $s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''$ ist, Formeln, von denen wir später (§ 6, 2; § 13) Gebrauch zu machen haben.

Die Ebene der Schmiegungsbewegung geht durch die Richtungslinien der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Hauptbewegung im Zeitpunkte t.

§ 3.

Die Normalform der Gleichungen der Schmiegungsbewegung.

Bevor wir auf die Betrachtung besonderer Fälle eingehen, wollen wir die Gleichungen der Schmiegungsbewegung durch Coordinatentransformation in die übliche Normalform der Gleichungen der parabolischen Wurfbewegung versetzen. Die Richtungscosinus der vom Punkte x, y, z ausgehenden Axen Ξ, H, Z des neu einzuführenden Coordinatensystems seien α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Der zwischen 0 und π gerechnete Winkel zwischen Geschwindigkeit s' und Beschleunigung g sei ω $(0 \leqq \omega \leqq \pi)$, sodann:

$$(8) \qquad \cos\omega = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{s'g} = \frac{s''}{g}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{g^2 - s''^2}}{g}.$$

Wir setzen voraus, dass g nicht verschwindet. Es soll nun (vgl. Fig. 1)

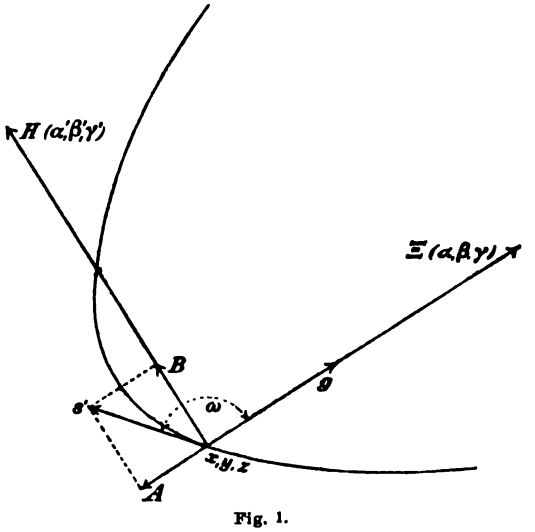


Fig. 1.

die Ξ-Axe die Richtung der Beschleunigung haben, also nach (7):

$$\alpha = \frac{x''}{g}, \quad \beta = \frac{y''}{g}, \quad \gamma = \frac{z''}{g};$$

die Z-Axe auf den Richtungen von s' und g senkrecht stehen, also:

$$\alpha'' = \frac{y'z'' - z'y''}{s'g \sin\omega}, \quad \beta'' = \frac{z'x'' - x'z''}{s'g \sin\omega}, \quad \gamma'' = \frac{x'y'' - y'x''}{s'g \sin\omega};$$

endlich die H-Axe in der Ebene von s' und g liegen und mit der Richtungslinie von s' einen spitzen Winkel bilden, woraus folgt:

$$\alpha' = \frac{gx' - s'x'' \cos\omega}{s'g \sin\omega}, \quad \beta' = \frac{gy' - s'y'' \cos\omega}{s'g \sin\omega}, \quad \gamma' = \frac{gz' - s'z'' \cos\omega}{s'g \sin\omega}.$$

Hiernach ergiebt sich mit den Abkürzungen:

(9) $$A = s' \cos\omega, \quad B = s' \sin\omega \ (\geqq 0):$$

$$\begin{aligned} \alpha x' + \beta y' + \gamma z' &= A, & \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' &= g, \\ \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' &= B, & \alpha' x'' + \beta' y'' + \gamma' z'' &= 0, \\ \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z' &= 0, & \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z'' &= 0 \end{aligned}$$

und bestehen zwischen den beiderseitigen Coordinaten ξ, η, ζ und Ξ, H, Z eines Punktes die Relationen:

$$\begin{aligned} \Xi &= \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z), & \xi - x &= \alpha\Xi + \alpha' \mathsf{H} + \alpha'' \mathsf{Z}, \\ \mathsf{H} &= \alpha'(\xi - x) + \beta'(\eta - y) + \gamma'(\zeta - z), & \eta - y &= \beta\Xi + \beta' \mathsf{H} + \beta'' \mathsf{Z}, \\ \mathsf{Z} &= \alpha''(\xi - x) + \beta''(\eta - y) + \gamma''(\zeta - z), & \zeta - z &= \gamma\Xi + \gamma' \mathsf{H} + \gamma'' \mathsf{Z}. \end{aligned}$$

Die Benutzung dieser Formeln führt alsbald zu der erwähnten *Normalform der Gleichungen der Schmiegungsbewegung:*

(10) $$\begin{cases} \Xi = A(\tau - t) + \frac{1}{2} g(\tau - t)^2, \\ \mathsf{H} = B(\tau - t), \\ \mathsf{Z} = 0. \end{cases}$$

Haben Geschwindigkeit und Beschleunigung gleiche oder entgegengesetzte Richtung ($x' : y' : z' = x'' : y'' : z''$; $\omega = 0, \pi$) oder wird die erstere 0, so werden die H- und Z-Axe unbestimmt, die Ξ-Axe aber bleibt in der bisherigen Bedeutung erhalten und die Gleichungen (10) fahren fort zu gelten, nur dass $B = 0$ und beziehungsweise $A = \pm s'$ oder $A = 0$ wird.

§ 4.

Die geometrischen Elemente der Schmiegungsbewegung.

In der Form (10) pflegt die gleichförmig beschleunigte Bewegung mit vertical abwärts gerichteter Ξ-Axe als „parabolische Wurfbewegung" discutirt zu werden.*) Man erhält dabei für den Parameter der Bahnparabel:

*) Vgl. etwa Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. I, S. 360ff. Bauer, Ueber einige, auf die parabolischen Wurflinien bezügliche, geometrische Oerter etc., Poggendorff's Annalen, Bd. 134, S. 265 (1868).

$$p = \frac{B^2}{g}$$

für die Entfernung der Directrix vom Punkte x, y, z ($\Xi = 0$, $\mathsf{H} = 0$, $\mathsf{Z} = 0$) (vgl. Fig. 2):

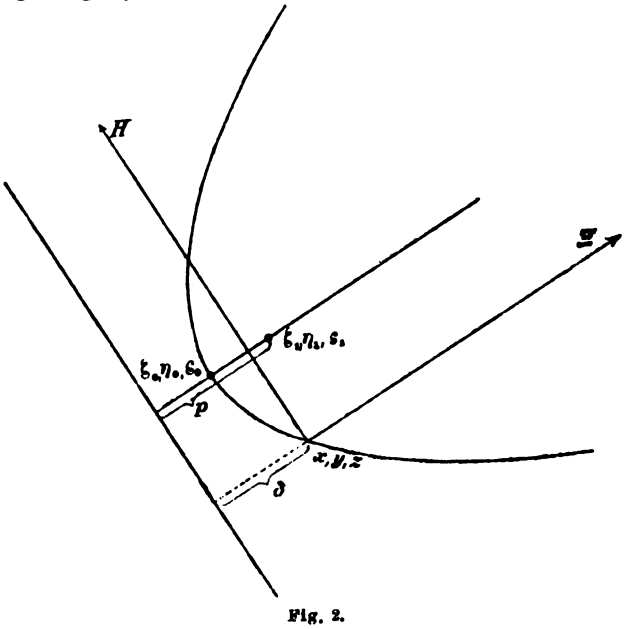


Fig. 2.

$$\delta = \frac{s'^2}{2g}$$

und als Gleichungen der Directrix:

$$\Xi = -\delta, \quad \mathsf{Z} = 0.$$

Für die Coordinaten des Scheitelpunktes der Parabel ergiebt sich:

$$\Xi_0 = -\frac{A^2}{2g}, \quad \mathsf{H}_0 = -\frac{AB}{g}, \quad \mathsf{Z}_0 = 0;$$

für die Coordinaten des Brennpunktes:

$$\Xi_1 = -\frac{A^2 - B^2}{2g}, \quad \mathsf{H}_1 = -\frac{AB}{g}, \quad \mathsf{Z}_1 = 0;$$

endlich gehen als Gleichungen der Symmetrieaxe der Parabel hervor:

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_1, \quad \mathsf{Z} = 0.$$

Mittels der in § 3 angegebenen Transformation findet man die Bestimmungsstücke dieser geometrischen Elemente der Schmiegungsbewegung in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem. Wir fassen das Resultat in folgenden Satz zusammen, der sich in allen

Theilen wieder auf das ursprüngliche Coordinatensystem der x, y, z oder ξ, η, ζ bezieht:

Die Elemente der Bahnparabel der Schmiegungsbewegung der durch die Gleichungen:

1) $$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

gegebenen Hauptbewegung für den Zeitpunkt t sind, wenn die Differentiation nach t durch Accente bezeichnet, ferner zur Abkürzung

(4) $$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad (7)\ g = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

gesetzt und $g \neq 0$ angenommen wird, die folgenden:
der Parameter:

$$(11) \quad p = \frac{s'^2(g^2 - s''^2)}{g^3} = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{g^3};$$

die Entfernung der Directrix vom Punkte x, y, z:

$$(12) \qquad \delta = \frac{s'^2}{2g};$$

die Coordinaten des Scheitelpunktes:

$$(13) \quad \begin{cases} \xi_0 = x - s's'' \dfrac{g^2x' - \frac{1}{2}s's''x''}{g^4}, \quad \eta_0 = y - s's'' \dfrac{g^2y' - \frac{1}{2}s's''y''}{g^4}, \\ \zeta_0 = z - s's'' \dfrac{g^2z' - \frac{1}{2}s's''z''}{g^4}; \end{cases}$$

die Coordinaten des Brennpunktes:

$$(14) \quad \begin{cases} \xi_1 = x - s' \dfrac{x's'' - \frac{1}{2}s'x''}{g^2}, \quad \eta_1 = y - s' \dfrac{y's'' - \frac{1}{2}s'y''}{g^2}, \\ \zeta_1 = z - s' \dfrac{z's'' - \frac{1}{2}s'z''}{g^2}. \end{cases}$$

Die Symmetrieaxe der Parabel erhält die Gleichungen:

$$(15) \qquad \xi - \xi_0 : \eta - \eta_0 : \zeta - \zeta_0 = x'' : y'' : z''$$

und stimmt in ihrer Richtung vom Scheitelpunkte nach dem Brennpunkte mit der Richtung der Beschleunigung überein.

Die Directrix kann mit einem Parameter σ durch folgende 3 Gleichungen dargestellt werden:

$$(16)\quad \begin{cases} \xi - x + \frac{1}{2}\frac{s'^2 x''}{g^2} = \{(x'y'' - y'x'')y'' - (z'x'' - x'z'')z''\}\sigma \\ \qquad\qquad = \{g^2 x' - s's''x''\}\sigma, \\ \eta - y + \frac{1}{2}\frac{s'^2 y''}{g^2} = \{y'z'' - z'y'')z'' - (x'y'' - y'x'')x''\}\sigma \\ \qquad\qquad = \{g^2 y' - s's''y''\}\sigma, \\ \zeta - z + \frac{1}{2}\frac{s'^2 z''}{g^2} = \{z'x'' - x'z'')x'' - (y'z'' - z'y'')y''\}\sigma \\ \qquad\qquad = \{g^2 z' - s's''z''\}\sigma. \end{cases}$$

Für eine ebene Bewegung in der Ebene $z = 0$ leitet man aus den beiden ersten Gleichungen (16) als Gleichung der Directrix (in der Hesse'schen Normalform) ab:

$$(16')\qquad (\xi - x)\frac{x''}{g} + (\eta - y)\frac{y''}{g} + \frac{s'^2}{2g} = 0.$$

§ 5.

Eintheilung der regulären Momente der Bewegung.

Wir betrachten bei der Bewegung (1) als *reguläre Zeitpunkte* der Bewegung alle diejenigen endlichen Zeitpunkte t, in deren Umgebung die Entwicklungen (2) für hinreichend kleine Werthe von $(\tau - t)$ convergiren. In einem regulären Zeitpunkte kann also weder die Geschwindigkeit noch die Beschleunigung unendlich gross werden.

Die regulären Zeitpunkte der Bewegung ordnen wir nun nach der Beschaffenheit der Tangential- und Schmiegungsbewegung in folgender Weise an:

I) $g \neq 0$, die Beschleunigung im Zeitpunkte t verschwindet nicht: Die Schmiegungsbewegung ist eine eigentliche gleichförmig beschleunigte Bewegung.

1) $s's'' \neq 0$, Geschwindigkeit und Beschleunigung stehen nicht senkrecht zu einander: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung berührt die Bahn der Hauptbewegung nicht mit ihrem Scheitelpunkt.

a) $x' : y' : z' \neq x'' : y'' : z''$, Geschwindigkeit und Beschleunigung fallen nicht in dieselbe Gerade: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ist eine eigentliche Parabel („*gewöhnlicher Wurfmoment der Bewegung*").

b) $x' : y' : z' = x'' : y'' : z''$, Geschwindigkeit und Beschleunigung fallen in dieselbe Gerade: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ist in eine gerade Linie zusammengeklappt („*gewöhnlicher Fallmoment der Bewegung*").

2) $s's'' = 0$, Geschwindigkeit und Beschleunigung stehen senkrecht zu einander oder die erstere verschwindet: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung berührt die Bahn der Hauptbewegung in ihrem Scheitelpunkt.

a) $s' \neq 0$, die Geschwindigkeit verschwindet nicht: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ist eine eigentliche Parabel („*Scheitelwurfmoment der Bewegung*").

b) $s' = 0$, die Geschwindigkeit verschwindet: Die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ist in eine gerade Linie zusammengeklappt („*Scheitelfallmoment der Bewegung*").

II) $g = 0$, die Beschleunigung verschwindet: Die Schmiegungsbewegung ist in eine gleichförmige geradlinige Bewegung ausgeartet; in zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ist die Tangentialbewegung die nämliche.

1) $s' \neq 0$, die Geschwindigkeit verschwindet nicht: Die Schmiegungsbewegung ist eine eigentliche gleichförmige geradlinige Bewegung („*Stationärer Moment der Bewegung*").

2) $s' = 0$, die Geschwindigkeit verschwindet: Die Schmiegungsbewegung ist Ruhe („*Ruhemoment der Bewegung*").

Folgende Bemerkungen dienen zur Erläuterung der Classification.

Das Unterscheidungsmerkmal der beiden Hauptgruppen I und II ist ein hauptsächliches; denn die Gleichungen (6) der Schmiegungsbewegung stellen immer dann aber auch nur dann eine gleichförmige geradlinige Bewegung dar, wenn alle quadratischen Glieder fehlen, also $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$ oder $g = 0$ ist.

Das Unterscheidungsmerkmal der beiden Gruppen 1 und 2 unter I ist der Frage nach dem Zusammenfallen des Scheitelpunktes ξ_0, η_0, ζ_0 der Schmiegungsbewegung des Zeitpunktes t mit dem Orte x, y, z des bewegten Punktes zur Zeit t hergenommen. Dazu ergiebt sich aus (13) als nothwendig und hinreichend, dass gleichzeitig:

$$s's''\left(g^2x' - \tfrac{1}{2}s's''x''\right) = 0, \qquad s's''\left(g^2y' - \tfrac{1}{2}s's''y''\right) = 0,$$

$$s's''\left(g^2z' - \tfrac{1}{2}s's''z''\right) = 0.$$

Setzen wir diese 3 Gleichungen als erfüllt voraus, so folgt, dass entweder $s's'' = 0$ oder, wenn $s's'' \neq 0$ ist, dass

$$g^2x' - \tfrac{1}{2}s's''x'' = 0, \quad g^2y' - \tfrac{1}{2}s's''y'' = 0, \quad g^2z - \tfrac{1}{2}s's''z'' = 0;$$

eliminiren wir hieraus die nicht verschwindenden Grössen g^2 und $s's''$, so ergiebt sich:

$$y'z'' - z'y'' = 0, \quad z'x'' - x'z'' = 0, \quad x'y'' - y'x'' = 0,$$

oder mit einem Proportionalitätsfactor $\varkappa$:

$$x' = \varkappa x'', \quad y' = \varkappa y'', \quad z' = \varkappa z''.$$

Damit wird:

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = \varkappa g^2$$

und nehmen die 3 obigen Gleichungen, aus denen g^2 und $s's''$ eliminirt wurden, die Gestalt an:

$$\tfrac{1}{2}\varkappa g^2 x'' = 0, \quad \tfrac{1}{2}\varkappa g^2 y'' = 0, \quad \tfrac{1}{2}\varkappa g^2 z'' = 0.$$

Da aber g nicht 0 und daher x'', y'', z'' nicht alle 0 sind, so erhalten wir $\varkappa = 0$ und damit nach der voraufgegangenen Formel: $s's'' = 0$.

Die Bedingung $s's'' = 0$ ist also im Falle $g \neq 0$ nothwendig und hinreichend dafür, dass der Punkt x, y, z mit dem Scheitelpunkt ξ_0, η_0, ζ_0 der Schmiegungsbewegung zusammenfällt.

Die Unterscheidung endlich der Fälle a und b unter I, 1 und 2 ergiebt sich beidemal aus dem Werthe (11) des Parameters p der Schmiegungsbewegung.

Auf die weitere Unterscheidung der Zeitpunkte, wo sowohl $s' = 0$ als $g = 0$ ist, mit Bezug auf die Glieder 3. und höherer Ordnung der Entwicklungen (2) soll hier verzichtet werden.

Bezüglich des gemeinsamen Krümmungsradius q der Bahncurve der Hauptbewegung und der Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ist ähnlich wie am Schlusse des § 1 zu bemerken, dass derselbe in den Fällen I, 1, a und b; I, 2, a; II, 1 übereinkommt mit dem Krümmungsradius derjenigen Raumcurve, welche durch die Gleichungen (1) unabhängig von t dargestellt wird. Im Besonderen ist bei I, 1, b und II, 1: $q = \infty$. Wenn jedoch, wie bei I, 2, b und II, 2, $s' = 0$ ist, so brauchen die Krümmungsradien von Bahncurve und Raumcurve nicht mehr übereinzustimmen. Nach der am Schlusse des § 1 entwickelten Auffassung sind dann für die Bahncurve der Hauptbewegung die Richtungscosinus $\frac{x'}{s'}, \frac{y'}{s'}, \frac{z'}{s'}$ der Tangente unbestimmt und damit $s'' = \frac{x'}{s'}x'' + \frac{y'}{s'}y'' + \frac{z'}{s'}z''$ in den beiden Fällen $g \neq 0$ und $g = 0$ beziehungsweise unbestimmt oder 0. Dementsprechend geben die am Schlusse des § 2 angeführten Formeln für den Krümmungsradius q den Werth $q = 0$ oder einen unbestimmten Werth, jenachdem der Fall I, 2, b oder II, 2 vorliegt.

§ 6.

Anwendung auf gegebene Bewegung.

1. Ist die Hauptbewegung eine *gleichförmig beschleunigte*, so ist sie mit der gemeinsamen Schmiegungsbewegung aller ihrer Zeitpunkte

identisch, da dann die Gleichungen (2) auch ohne Vernachlässigung höherer Potenzen von $\tau - t$ mit den Gleichungen (6) zusammenfallen.

2. Bewegt sich ein Punkt *auf seiner übrigens beliebig gestalteten Bahn gleichförmig* d. h. mit constanter Grösse der Geschwindigkeit, $s' = c$, so wird für jeden Zeitpunkt $s's'' = 0$. Es tritt also, da $s' = c \neq 0$ ist, für jeden Zeitpunkt t, wo die Entwicklungen (2) gelten, der Fall I, 2, a ein; alle Zeitpunkte der Bewegung sind *Scheitelwurfmomente.* Für den Brennpunkt der Schmiegungsbewegung ergiebt sich aus (14):

$$\xi_1 - x = \frac{1}{2}\frac{s'^2}{g^2}x'', \quad \eta_1 - y = \frac{1}{2}\frac{s'^2}{g}y'', \quad \zeta_1 - z = \frac{1}{2}\frac{s'^2}{g}z''$$

und für den Parameter aus (11):

$$p = \frac{s'^2}{g}.$$

Hieraus erkennt man mit Rücksicht auf die am Schlusse des § 2 angegebenen Formeln, dass die Symmetrieaxe der Bahnparabel der Schmiegungsbewegung in die Hauptnormale der Bahncurve der gegebenen Bewegung fällt und der Parameter jener gleich dem Krümmungsradius dieser ist. Der Brennpunkt ξ_1, η_1, ζ_1 der Parabel fällt also in die Mitte zwischen den Punkt x, y, z und den Krümmungsmittelpunkt der Bahncurve.

3. Bewegt sich ein Punkt nach irgend welchem Gesetze *auf einer geradlinigen Bahn*, die wir als x-Axe nehmen, so werden die beiden letzten Gleichungen (1): $y = 0$, $z = 0$ und folgt: $y' = 0$, $z' = 0$; $y'' = 0$, $z'' = 0$. Es wird daher nach (4) und (7)

$$s' = |x'|, \quad g = |x''|,$$

wo die Verticalstriche die absoluten Werthe bezeichnen, ferner $s's'' = x'x''$ und nach (11): $p = 0$. Aus (13) und (14) folgt:

$$\xi_0 = x - \frac{1}{2}\frac{x'^2}{x''}, \quad \eta_0 = 0, \ \zeta_0 = 0;$$

$$\xi_1 = x - \frac{1}{2}\frac{x'^2}{x''}, \quad \eta_1 = 0, \ \zeta_1 = 0.$$

und aus (15) für die Symmetrieaxe der Bahnparabel der Schmiegungsbewegung:

$$\xi - \xi_0 : \eta : \zeta = x'' : 0 : 0.$$

Bei jeder geradlinigen Bewegung fällt daher die Bahnparabel der Schmiegungsbewegung ganz in die Bahngerade der gegebenen Bewegung hinein; Brennpunkt und Scheitelpunkt der Parabel fallen zusammen; die Entfernung des Scheitelpunktes ξ_0 vom Punkte x ist:

$$\xi_0 - x = -\frac{1}{2}\frac{x'^2}{x''}.$$

Wir betrachten beispielsweise die geradlinige Oscillation:

$$x = a \cos \frac{\pi t}{\omega}$$

wo a und ω Constanten sind. Für dieselbe ergiebt sich:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} a \left\{ \cos \frac{\pi t}{\omega} + \frac{1}{\cos \frac{\pi t}{\omega}} \right\}.$$

Es entsprechen sich daher die Werthe:

$$0 < t < \frac{\omega}{2} : a > x > 0 \quad \text{und} \quad a < \xi_0 < +\infty,$$

$$\frac{\omega}{2} < t < \omega : 0 > x > -a \quad \text{und} \quad -\infty < \xi_0 < -a, \quad \text{etc.}$$

Während also der Hauptpunkt x zwischen a und $-a$ über 0 oscillirt, bewegt sich der Scheitelpunkt der Schmiegungsbewegung zwischen a und $-a$ durch ∞ hindurch. Die Zeitpunkte, da sich der Hauptpunkt in $x = \pm a$ befindet, sind *Scheitelfallmomente*, die Zeitpunkte, da er sich in $x = 0$ befindet, *stationäre Momente*, alle übrigen Zeitpunkte *gewöhnliche Fallmomente* der Bewegung.

4. Für die *Centralbewegung unter Einfluss einer der Entfernung proportionalen Kraft* gelten die Bewegungsgleichungen:

$$x = a \cos \mu t, \quad y = b \sin \mu t,$$

wo a, b, μ Constanten sind. Es wird daher mit:

$$x' = -a\mu \sin \mu t, \quad y' = b\mu \cos \mu t;$$

$$x'' = -a\mu^2 \cos \mu t, \quad y'' = -b\mu^2 \sin \mu t:$$

$$s'^2 = \mu^2(a^2 \sin^2 \mu t + b^2 \cos^2 \mu t), \quad s's'' = \mu^3(a^2 - b^2) \cos \mu t \sin \mu t,$$

$$g^2 = \mu^4(a^2 \cos^2 \mu t + b^2 \sin^2 \mu t).$$

Man erhält dann als Parameterdarstellung des Ortes der Scheitelpunkte aller Schmiegungsbewegungen (mit u für μt):

$$\xi_0 = \frac{1}{2} a \cos u \frac{(a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + a^2) + (a^2 - b^2) b^2 \sin^2 u}{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^2},$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2} b \sin u \frac{(a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + b^2) + (b^2 - a^2) a^2 \cos^2 u}{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^2}$$

und des Ortes der Brennpunkte:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} a \cos u \frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + a^2 - b^2}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2} b \sin u \frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + b^2 - a^2}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u},$$

zwei rationale Curven, welche neben der Krümmungsmittelpunktscurve der elliptischen Bahn der Centralbewegung Beachtung verdienen. Die erstere geht für $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2\mu}$, $t = \frac{2\pi}{2\mu}$, $t = \frac{3\pi}{2\mu}$, $\cdots$ durch die 4 Scheitelpunkte der Ellipse, da dieselben in Scheitelwurfmomenten

der Bewegung getroffen werden, während die zweite für dieselben Augenblicke durch die Punkte:

$$\xi_1 = a - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}, \quad \eta_1 = 0; \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = b - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}; \text{ etc.}$$

hindurchgeht, welche die Krümmungshalbmesser der Scheitelpunkte der Ellipse halbiren.

Capitel II.

Freie Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction.

§ 7.

Die den Niveauflächen zugeordneten Flächen.

Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einfluss einer nur von seinem Orte x, y, z abhängenden Kräftefunction $U(x, y, z)$, die eine eindeutige analytische Function ihrer 3 Argumente sei. Wir verstehen unter U_1, U_2, U_3 die partiellen Differentialquotienten von U nach x, y, z, sodass:

$$U' = U_1 x' + U_2 y' + U_3 z' \tag{1}$$

wird und die Differentialgleichungen der Bewegung die Gestalt annehmen:

$$x'' = U_1, \quad y'' = U_2, \quad z'' = U_3. \tag{2}$$

Wir haben dann (vgl. § 2, 7)

$$g^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2, \quad s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = U', \tag{3}$$

und erhalten das Integral der lebendigen Kraft mit einer Integrationsconstanten h in der Form:

$$\frac{1}{2}s'^2 = U + h. \tag{4}$$

Für den Scheitelpunkt und den Brennpunkt der Schmiegungsbewegung, welche zum Zeitpunkt t und zum Orte x, y, z gehört, folgt daher nach § 4, 13; 14:

$$\xi_0 - x = \frac{1}{2}\frac{U_1 U'^2}{g^4} - \frac{U'x'}{g^2}, \quad \eta_0 - y = \frac{1}{2}\frac{U_2 U'^2}{g^4} - \frac{U'y'}{g^2}, \quad \zeta_0 - z = \frac{1}{2}\frac{U_3 U'^2}{g^4} - \frac{U'z'}{g^2}, \tag{5}$$

$$\xi_1 - x = \frac{U_1(U+h)}{g^2} - \frac{U'x'}{g^2}, \quad \eta_1 - y = \frac{U_2(U+h)}{g^2} - \frac{U'y'}{g^2}, \quad \zeta_1 - z = \frac{U_3(U+h)}{g^2} - \frac{U'z'}{g^2} \tag{6}$$

und für den Parameter nach § 4, 11:

$$(7) \qquad p = \frac{2(U+h)\,g^2 - U'^2}{g^3}.$$

Zufolge der Schlussbemerkung des § 2 geht gegenwärtig die Ebene der Schmiegungsbewegung im Zeitpunkte t durch die Richtungslinie der Geschwindigkeit x', y', z' und die Normale der Niveaufläche der Kräftefunction im Punkte x, y, z hindurch.

Wir knüpfen nun zuerst an die aus § 4, 16 hervorgehende Parameterdarstellung der Directrix der Schmiegungsbewegung an, welche im vorliegenden Falle lautet:

$$(8)\begin{cases} \xi - x + \frac{U+h}{g^2} U_1 = \{(U_2^2 + U_3^2)\,x' - U_1 U_2 y' - U_1 U_3 z'\}\,\sigma, \\ \eta - y + \frac{U+h}{g^2} U_2 = \{-U_2 U_1 x' + (U_3^2 + U_1^2)\,y' - U_2 U_3 z'\}\,\sigma, \\ \zeta - z + \frac{U+h}{g^2} U_3 = \{-U_3 U_1 x' - U_3 U_2 y' + (U_1^2 + U_2^2)\,z'\}\,\sigma. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese 3 Gleichungen der Reihe nach mit U_1, U_2, U_3 und addirt, so ergiebt sich:

$$(9) \qquad U_1(\xi - x) + U_2(\eta - y) + U_3(\zeta - z) + (U+h) = 0$$

und folgt:

Bei unveränderlichem Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft gehört zu jedem Punkte x, y, z des Raumes eine bestimmte Ebene (9) *„die dem Werthe h entsprechende Directrixebene des Punktes." In dieser liegt die Directrix der Schmiegungsbewegung, so oft die den Differentialgleichungen* (2) *genügende Hauptbewegung den Punkt x, y, z in irgend welcher Richtung $x' : y' : z'$ trifft.*

Da die Directrix selbst in der Ebene der Schmiegungsbewegung, also in der durch die Geschwindigkeit gelegten Normalebene der Niveaufläche liegt, ist sie der Schnitt dieser Normalebene mit der Directrixebene.

Die Ebene (9) ist der Tangentialebene der Niveaufläche im Punkte x, y, z parallel und hat von dieser den Abstand:

$$(10) \qquad \delta = -\frac{U+h}{g}.$$

Jeder Punkt x, y, z hat nach vorigem Satze seine Directrixebene; wir betrachten nun die Gesammtheit der Directrixebenen, welche den einzelnen Punkten der Niveaufläche $U(x, y, z) = c$ zugehören. Dieselben umhüllen eine Fläche, deren Gleichung in Ebenencoordinaten u, v, w wir erhalten, indem wir aus den 4 Gleichungen:

$$(11) \quad u = \frac{U_1}{(U+h) - (U_1 x + U_2 y + U_3 z)}, \quad v = \frac{U_2}{(U+h) - (U_1 x + U_2 y + U_3 z)},$$
$$w = \frac{U_3}{(U+h) - (U_1 x + U_2 y + U_3 z)}, \quad U(x, y, z) = c$$

die 3 Grössen x, y, z eliminiren.

Für einen bestimmten Werth von h ergiebt sich daher zu jeder Niveaufläche eine zugeordnete Fläche, die von den Directrixebenen aller Punkte der Niveaufläche umhüllt wird.

Ist $U(x, y, z)$ eine homogene Function n^{ten} Grades, also:

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = n U,$$

so werden die Gleichungen (11):

$$(11') \quad u = \frac{U_1}{c + h - nc}, \quad v = \frac{U_2}{c + h - nc}, \quad w = \frac{U_3}{c + h - nc},$$
$$U(x, y, z) = c.$$

Setzt man nun $c + h - nc = -\mu nc$, indem man hierdurch eine Grösse μ definirt, so kann man, da wegen der homogenen Beschaffenheit von U, U_1, etc.:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\mu^n} U(\mu x, \mu y, \mu z),$$
$$U_1(x, y, z) = \frac{1}{\mu^{n-1}} U_1(\mu x, \mu y, \mu z), \quad \text{etc.},$$

die Gleichungen (11') so schreiben:

$$(11'') \quad u = -\frac{U_1(\mu x, \mu y, \mu z)}{n \cdot \mu^n c}, \quad v = -\frac{U_1(\mu x, \mu y, \mu z)}{n \cdot \mu^n c},$$
$$w = -\frac{U_3(\mu x, \mu y, \mu z)}{n \cdot \mu^n c}, \quad U(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^n c.$$

Die Eliminationsresultante von μx, μy, μz aus diesen Gleichungen (11'') ist aber identisch mit der Eliminationsresultante von x, y, z aus den Gleichungen:

$$(11''') \quad u = -\frac{U_1(x, y, z)}{n \cdot \mu^n c}, \quad v = -\frac{U_2(x, y, z)}{n \cdot \mu^n c},$$
$$w = -\frac{U_3(x, y, z)}{n \cdot \mu^n c}, \quad U(x, y, z) = \mu^n c.$$

Durch Elimination von x, y, z aus (11''') erhält man aber die Gleichung der Niveaufläche $U(x, y, z) = \mu^n c$ in Ebenencoordinaten u, v, w. Es folgt also:

Wenn die Kräftefunction $U(x, y, z)$ eine homogene Function n^{ten} Grades in x, y, z ist, so ist die der Niveaufläche $U = c$ $(c \neq 0)$ zugeordnete Fläche wieder eine Niveaufläche, nämlich $U = \mu^n c$, wo:

$$\mu = \frac{nc - (c + h)}{nc}.$$

Für $n = 1$ wird $\mu = -\frac{h}{c}$, also $\mu^n c = -h$; in diesem Falle haben alle Niveauflächen $U = c$ eine und dieselbe zugeordnete Fläche, nämlich die Niveaufläche der Geschwindigkeit 0: $U = -h$. Dies

ist der bekannte Fall*) der parabolischen Wurfbewegung selbst, wo die Directrix der parabolischen Bahn bei festgehaltenem h immer in der Niveauebene der Geschwindigkeit 0 liegt.

Ist die Kräftefunction $U = U(r)$ nur von der Entfernung r des bewegten Punktes vom Coordinatenanfang abhängig, so ist mit

$$\frac{dU(r)}{dr} = U_0 : U_1 = U_0 \frac{x}{r}, \quad U_2 = U_0 \frac{y}{r}, \quad U_3 = U_0 \frac{z}{r};$$

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = U_0 r$$

und werden die Gleichungen (11):

$$u = \frac{U_0 \frac{x}{r}}{U + h - U_0 r}, \quad v = \frac{U_0 \frac{y}{r}}{U + h - U_0 r}, \quad w = \frac{U_0 \frac{z}{r}}{U + h - U_0 r}, \quad U_{(r)} = c.$$

Es folgt daher:

$$u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{U_0}{U + h - U_0 r}\right)^2,$$

wo r den aus $U(r) = c$ hervorgehenden constanten Werth hat, also:

Bei der Centralbewegung mit Kräftefunction ist der Niveaukugel vom Radius r die Niveaukugel vom Radius $\left(\frac{U+h}{U_0} - r\right)$ zugeordnet.

§ 8.

Das Niveau der Geschwindigkeit 0 und das Verschwinden des Parameters.

Ohne Voraussetzung über die Form von U wird für einen speciellen Werth von c, nämlich für $c = -h$, die zugeordnete Fläche der Niveaufläche $U = c = -h$ wieder eine Niveaufläche; denn die Elimination von x, y, z aus (11) liefert dann die Gleichung der Fläche

$$U + h = 0 \tag{12}$$

selbst in Ebenencoordinaten. In der That zeigt auch die Gleichung (9), in welcher dann das Glied $U + h$ wegfällt:

Die Directrixebene eines Punktes der Niveaufläche $U + h = 0$ ist die Tangentialebene dieser Niveaufläche im Punkte x, y, z.

Da mit $U + h$, nach (4), auch x', y', z' und U' verschwinden, so wird nach (5), (6) und (7):

$$\xi_0 = \xi_1 = x, \quad \eta_0 = \eta_1 = y, \quad \zeta_0 = \zeta_1 = z \quad \text{und} \quad p = 0$$

und folgt:

Die Zeitpunkte, wo das Niveau der Geschwindigkeit 0 getroffen wird, sind im Allgemeinen Scheitelfallmomente der Bewegung.

Die Axe der zusammengeklappten Bahnparabel der Schmiegungsbewegung fällt nach § 4, 15 in die Normale der Niveaufläche.

*) Vgl. Schell, a. a. O, S. 362.

Im Besonderen würde statt eines Scheitelfallmomentes ein Ruhemoment eintreten, wenn an der betreffenden Stelle der Niveaufläche $U + h = 0$ zugleich die Beschleunigung g verschwände. Dies erfordert nach (3) die Bedingungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, also einen singulären Punkt der Niveaufläche, und soll daher nicht weiter verfolgt werden.

Um die Bedingung für das Verschwinden des Parameters p überhaupt zu erhalten, wollen wir den Winkel ω zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung einführen und haben nach § 3, 8 und § 7, 3. 4:

$$\cos\omega = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{s'g} = \frac{U'}{g\sqrt{2(U+h)}}.$$

Setzen wir den hieraus folgenden Werth von U' in die Gleichung § 7, 7 ein, so ergiebt sich:

$$p = \frac{2(U+h)\sin^2\omega}{g}, \tag{13}$$

wo der Zähler das Quadrat der in die Tangentialebene der Niveaufläche fallenden Componente der Geschwindigkeit ist. Also:

Der Parameter der Schmiegungsbewegung im Punkte x, y, z (Zeitpunkte t) wird nur dann gleich 0, *wenn die in die Tangentialebene der Niveaufläche im Punkte x, y, z fallende Componente der Geschwindigkeit verschwindet.*

§ 9.

Von der Umkehr einer Bewegung in sich selbst.

In den Gleichungen der parabolischen Wurfbewegung:

$$x = a_0 + a_1 t + \tfrac{1}{2} a_2 t^2, \quad y = b_0 + b_1 t + \tfrac{1}{2} b_2 t^2, \tag{14}$$
$$z = c_0 + c_1 t + \tfrac{1}{2} c_2 t^2$$

mit 9 Constanten $a_0, \ldots, c_2$ betrachtet man die Veränderliche t ihrer Bedeutung der Zeit entsprechend nicht als Veränderliche schlechthin, sondern als eine von $-\infty$ bis $+\infty$ *wachsende* Veränderliche. In diesem Sinne ist die Bewegung:

$$x = a_0 - a_1 t + \tfrac{1}{2} a_2 t^2, \quad y = b_0 - b_1 t + \tfrac{1}{2} b_2 t^2, \tag{14'}$$
$$z = c_0 - c_1 t + \tfrac{1}{2} c_2 t^2$$

von der ersterwähnten verschieden. Sie hat zwar genau dieselbe Bahncurve, wie jene; jede Stelle x, y, z, die von jener in einem gewissen Zeitpunkte getroffen wird, wird von ihr ebenfalls in einem gewissen, im Allgemeinen anderen Zeitpunkte getroffen; jede Stelle wird von

ihr auch mit gleicher Grösse der Geschwindigkeit, wie von jener, aber in entgegengesetzter Richtung der Geschwindigkeit durchlaufen. Diese Beziehung der beiden Bewegungen zu einander bleibt auch noch erhalten, wenn in den Gleichungen (14) $t - t_0$ und in den Gleichungen (14') $t - t_1$ für t eingesetzt wird, also für einen beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$, respective $t = t_1$, die Stelle a_0, b_0, c_0 erreicht wird, statt wie vorher beiderseits für $t = 0$.

Wir wollen beide Bewegungen *„entgegengesetzt congruente"* Bewegungen nennen und können, da durch Ort und Geschwindigkeit für irgend einen bestimmten Zeitpunkt und durch die allen Zeitpunkten gemeinsame Beschleunigung die parabolische Wurfbewegung völlig bestimmt ist, den Satz aussprechen:

Zwei parabolische Wurfbewegungen sind entgegengesetzt congruent, wenn sie beide dieselbe Beschleunigung haben (an Grösse und Richtung), wenn sie ferner je zu irgend einem Zeitpunkte dieselbe Stelle des Raumes und zwar mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit treffen.

In *einem* Falle vereinigen sich zwei entgegengesetzt congruente parabolische Wurfbewegungen zu einer und derselben Bewegung, nämlich wenn der Parameter p der Bahnparabel 0 ist oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Bewegung das Niveau der Geschwindigkeit 0 erreicht. Wir können dies so aussprechen:

Wenn die parabolische Wurfbewegung das Niveau der Geschwindigkeit 0 erreicht, so kehrt sie congruent in sich zurück.

Wir wenden uns nach diesen Vorbemerkungen zu den durch die Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad x'' = U_1, \quad y'' = U_2, \quad z'' = U_3$$

definirten Bewegungen zurück, wo U_1, U_2, U_3 nach der in § 7 über U gemachten Voraussetzung eindeutige Functionen von x, y, z sind und wir die Entwicklungen § 1, 2 für alle in Betracht kommenden Zeitpunkte als bestehend annehmen. Mit Rücksicht auf die sechs Integrationsconstanten, von denen eine additiv mit der Zeit verbunden ist, können wir verlangen, dass eine solche Bewegung die gegebene Stelle x, y, z und zwar mit einer gegebenen Geschwindigkeit x', y', z' treffe, gleichviel zu welchem Zeitpunkte. Wenn wir im Besonderen *eine* Bewegung kennen, welche den Differentialgleichungen entspricht und eine Stelle x, y, z mit der Geschwindigkeit x', y', z' trifft, so können wir nach derjenigen Bewegung fragen, welche zu irgend einem Zeitpunkte dieselbe Stelle x, y, z und zwar mit entgegengesetzter Geschwindigkeit $-x', -y', -z'$ erreicht.

Da nun beide Bewegungen im Punkte x, y, z dieselbe Beschleunigung U_1, U_2, U_3 haben, so folgt mit Rücksicht auf §2,6 nach dem ersten der beiden eben ausgesprochenen Sätze, dass die beiderseitigen Schmiegungs-

bewegungen einander entgegengesetzt congruent sind. Es sind ferner, bis auf Glieder 2. Ordnung der Zeitdifferenz einschliesslich, oder wie man zu sagen pflegt, während zweier aufeinander folgender unendlich kleiner Zeitelemente, beziehentlich, wenn die Geschwindigkeit nicht 0 ist, längs zweier aufeinander folgender Bahnelemente pp_1 und p_1p_2, Hauptbewegung und Schmiegungsbewegung identisch. Folglich sind *längs dieser beiden Bahncurvenelemente auch die beiden Hauptbewegungen*, die in der gedachten Weise auseinander hervorgehen, *einander entgegengesetzt congruent*, d. h. es stimmen in diesem Umfange eben ihre Bahncurven vollständig überein und sie haben in allen Punkten ihrer gemeinsamen Bahn entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit. Da hiernach auch im Anfangspunkte p_1 des zweiten Bahncurvenelementes die Geschwindigkeit der beiden Hauptbewegungen gleich und entgegengesetzt ist, die Beschleunigung aber als nur vom Orte abhängig für beide dieselbe ist, so sind wiederum die Schmiegungsbewegungen beider in den dem Punkte p_1 entsprechenden Zeitpunkten entgegengesetzt congruent und dehnt sich folglich diese Beziehung auf die Hauptbewegungen auch für das nächstfolgende Bahncurvenelement p_2p_3 aus. Diese Schlussweise setzt sich fort, solange die Geschwindigkeit von 0 verschieden bleibt. Es folgt somit:

I. *Zwei den Differentialgleichungen* (1) *genügende Bewegungen sind, wenn sie je zu irgend einem Zeitpunkte dieselbe Stelle x, y, z des Raumes und zwar mit gleicher aber entgegengesetzter Geschwindigkeit treffen, einander entgegengesetzt congruent in endlicher Ausdehnung, so lange ihre Geschwindigkeit nicht* 0 *wird.*

Unsere Betrachtung schliesst nun zunächst Scheitelfallmomente der Bewegung aus. Denn wenn die Geschwindigkeit 0 wird, entsprechen zwei aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeitelementen nicht zwei ebensolche Wegelemente, da im ersten Zeitelement Ruhe herrscht. Wenn indessen die Hauptbewegung zur Zeit t die Geschwindigkeit 0 annimmt (ein gleichzeitiges Verschwinden der Beschleunigung wollen wir ausschliessen), so ist sie wiederum in der Umgebung dieses Zeitpunktes (vorwärts und rückwärts) bis auf Glieder 2. Ordnung der Zeitdifferenz einschliesslich mit ihrer Schmiegungsbewegung identisch, verhält sich also in diesem Umfange wie die Bewegung des freien Falles im Momente der höchsten Steigung. Diese Identificirung von Hauptbewegung und Fallbewegung erstreckt sich aber, eben weil sie durch zwei Zeitelemente andauert, in derem ersten allerdings kein Bahnelement durchlaufen wird, doch vorwärts und rückwärts von t soweit, dass bereits eine von der Bahnspitze unterscheidbare Stelle x, y, z der Bahn und zwar mit einer von 0 verschiedenen und beim Zu- und Weggang von der Spitze entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit erreicht wird. Hier greift also der vorige Satz wiederum ein und folgt,

dass die an der Spitze eintretende congruente Rückkehr der Bewegung in sich selbst sich auch weiterhin (vorwärts und rückwärts) von Bahnelement zu Bahnelement fortsetzt. Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

II. *Die Bewegung eines Massenpunktes soll durch die Differentialgleichungen* (1) *definirt und die Kräftefunction U eine eindeutige analytische Function allein vom Orte x, y, z sein; auch sollen die partiellen Differentialquotienten U_1, U_2, U_3 für keinen Punkt der durch die Constante h der lebendigen Kraft bestimmten Niveaufläche der Geschwindigkeit* 0 *gleichzeitig verschwinden. Wenn alsdann die Bewegung zu irgend welcher Zeit das Niveau der Geschwindigkeit* 0 *trifft, so kehrt sie congruent in sich zurück.*

Die Spitzen der Bahncurven im Niveau der Geschwindigkeit 0 sind daher unter den gemachten Voraussetzungen nicht gewöhnliche Spitzen im Sinne der Geometrie der ebenen Curven, sondern sind Spitzen, wo die Bahncurve, unabhängig von ihrer Entstehung in der Zeit betrachtet, abbricht, genau ebenso wie die geradlinige Bahn des frei fallenden Punktes im Höhenpunkte der Bahn. Auf den gegentheiligen Charakter der Spitzen der Bahncurven im Niveau der Geschwindigkeit 0 werden wir in § 11 geführt werden.

Zur Ergänzung des Satzes II bemerken wir noch, dass *ausserhalb des Niveau's der Geschwindigkeit* 0 *eine congruente Umkehr der Bewegung in sich ausgeschlossen ist*, da die Geschwindigkeit nur durch 0 hindurch stetig in ihren entgegengesetzten Werth übergehen kann.

Bezüglich des Satzes I ist aber noch eine Bemerkung zu machen. Hätten wir in der Ableitung desselben statt der „entgegengesetzten" Geschwindigkeit überall die „gleichgerichtete" eintreten lassen, so wären wir augenscheinlich zu dem folgenden Resultate gekommen:

III. *Zwei den Differentialgleichungen* (1) *genügende Bewegungen sind, wenn sie je zu irgend einem Zeitpunkte dieselbe Stelle x, y, z des Raumes und zwar mit gleicher und gleichgerichteter Geschwindigkeit treffen, einander vollkommen congruent* (*abgesehen vom Anfangspunkte der Zeitrechnung*) *in endlicher Ausdehnung, solange ihre Geschwindigkeit nicht* 0 *wird.*

Indessen bilden auch hier die vorläufig ausgeschlossenen Scheitelfallmomente kein Hindernis für die Anwendung des Satzes. Während nämlich in einem Punkte des Raumes bei gegebenem h im Allgemeinen, den verschiedenen Richtungen der Geschwindigkeit entsprechend, verschiedene Schmiegungsbewegungen existiren, giebt es in einem Punkte x, y, z des Nullniveau's, $U + h = 0$, nur eine einzige Schmiegungsbewegung mit zusammengeklappter Bahnparabel. Die Axe der letzteren fällt in die Normale der Niveaufläche im Punkte x, y, z. Demnach

kann der bewegte Punkt bei gegebenem h nur in einer Richtung an die Stelle x, y, z gelangen und nur in einer Richtung dieselbe verlassen. Nach III kann er daher von ihr aus nur auf einer und derselben Bahn fortlaufen, so oft er sie verlässt; folglich auch nach II nur auf der nämlichen Bahn die Stelle erreichen, so oft er sie erreicht.

Soll hiernach der bewegte Punkt eine Stelle des Nullniveau's überhaupt zum zweiten Mal treffen (nach endlicher Zeit), so muss zwischen dem ersten und zweiten Eintreffen nothwendig an einer anderen Stelle eine congruente Umkehr der Bewegung stattgefunden haben und somit das Nullniveau erreicht worden sein. Wenn aber eine Bewegung zweimal congruent in sich zurückkehrt, so ist sie damit als eine periodische Oscillation gekennzeichnet. Wir erhalten daher unter den Voraussetzungen wie in II den Satz:

IV. *Wenn die Bewegung an zwei verschiedenen Stellen das Niveau der Geschwindigkeit* 0 *trifft, so ist sie eine periodische Oscillation zwischen diesen beiden Stellen.*

Ist sie nicht periodisch, so kann sie nur eine Stelle des Niveau's der Geschwindigkeit 0 *treffen und auch diese nur einmal.*

§ 10.

Beispiel der Centralbewegung mit Kräftefunction.

Für die Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction $U(r)$, welche vom Radius vector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der als xy-Ebene gewählten Bahnebene abhängt, gelten die Differentialgleichungen:

$$x'' = U_0 \frac{x}{r}, \quad y'' = U_0 \frac{y}{r}; \quad U_0 = \frac{dU}{dr} \tag{15}$$

und wirkt die Centralkraft anziehend oder abstossend, jenachdem U_0 negativ oder positiv ist. Für die Grösse der Centralkraft ergiebt sich:

$$g = \mp U_0, \tag{16}$$

immer das obere Vorzeichen für die Anziehung, das andere für die Abstossung zu nehmen. Die Gleichungen der lebendigen Kraft und der Flächen lauten:

$$\frac{1}{2} s'^2 = U + h; \tag{17}$$

$$xy' - yx' = k, \tag{18}$$

wo k die doppelte Flächengeschwindigkeit bedeutet.

Aus den Differentialgleichungen (15) folgt mit Rücksicht auf (18):

$$x'y'' - y'x'' = U_0 \frac{yx' - xy'}{r} = -\frac{k}{r} U_0 = \pm \frac{k}{r} g$$

und damit für den Parameter der Schmiegungsbewegung aus § 4, 11:

$$p = \frac{k^2}{r^2 g}. \tag{19}$$

Die Gleichung der Directrix in der Hesse'schen Normalform lautet nach § 4, 16′:

$$(\xi - x)\frac{x}{r} + (\eta - y)\frac{y}{r} + \frac{U+h}{U_0} = 0,$$

sodass ihre Entfernung r_1 vom Centralpunkt den Werth hat:

$$r_1 = r - \frac{U+h}{U_0}. \tag{20}$$

Diese nur von r abhängige Entfernung ist nach dem Schlusssatz von § 7 der Radius des dem Niveaukreise r zugeordneten Niveaukreises und gilt daher der Satz:

So oft bei festgehaltenem h der bewegte Punkt den Niveaukreis r trifft, berührt die Directrix der Schmiegungsbewegung den zugeordneten Niveaukreis r_1.

Da $U + h$ nach (17) nicht negativ werden kann, so ist nach (20) der Radius des zugeordneten Kreises r_1 grösser oder kleiner*) als der des gegebenen r, jenachdem die Centralkraft anziehend oder abstossend wirkt. Der Uebergang beider Fälle in einander kann mit $U_0 = 0$ unter Vermittlung eines stationären Zeitpunktes eintreten.**)

Der Parameter p ist nach (19) nur von dem Radius vector und der Flächengeschwindigkeit abhängig. Er kann im Allgemeinen nur verschwinden, wenn die Flächengeschwindigkeit 0 ist. In der That ist dann die Centralbewegung geradlinig und kehrt in Uebereinstimmung mit § 9, sobald sie das Niveau der Geschwindigkeit 0 trifft, congruent in sich zurück. Ist dagegen die Flächengeschwindigkeit nicht 0, so kann die Bewegung im Allgemeinen weder gewöhnliche Fallmomente noch Scheitelfallmomente besitzen.

Die Centralbewegung kann bekanntlich im Falle einer anziehenden Kraft $g = -U_0$ stets auf dem Kreise r vor sich gehen; man hat dann $k^2 = -r^3 U_0$ zu setzen und erhält damit aus (19) $p = r$ in Uebereinstimmung mit § 6, 2.

Soll der Parameter p von r unabhängig werden, so ist nach (19) nothwendig und hinreichend, dass $r^2 g = \mu^2$, unter μ^2 eine Constante verstanden. Damit wird aber:

$$U_0 = \mp\frac{\mu^2}{r^2}; \quad U = \pm\frac{\mu^2}{r}.$$

*) Mit leicht ersichtlicher Bedeutung negativer Werthe von r_1.

**) Dies kann sich bei einer von Gyldén, Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einflusse einer Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$ bewegt, Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 17, Nr. 1 (1889) ereignen, wenn für μ_1 und μ_2 auch negative Werthe zugelassen werden.

Es muss also die Centralbewegung die Newton'sche Centralbewegung (mit Anziehung oder Abstossung) sein. Ueberdies ist $p = \frac{k^2}{\mu^2}$ in diesem Falle zugleich der Parameter der elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bahncurve der Bewegung. Es ergiebt sich somit:

Für die Newton'sche Centralbewegung ist der Parameter der Schmiegungsbewegung zu allen Zeitpunkten derselbe, nämlich gleich dem Parameter des Bahnkegelschnittes der Centralbewegung.

Die Bahnparabeln der Schmiegungsbewegungen aller Zeitpunkte sind daher congruent.

§ 11.

Die relative Centralbewegung mit Bezug auf ein rotirendes System.

Obwohl die relative Centralbewegung gegen ein rotirendes System einen ganz ähnlichen Verlauf zeigt, wie die gewöhnliche Centralbewegung*), so mag sie doch an dieser Stelle wegen ihres ganz verschiedenen Verhaltens im Niveau der Geschwindigkeit 0 einer kurzen Betrachtung unterzogen werden.

Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einfluss einer Centralkraft in einer gewissen Ebene; die Centralkraft habe die Kräftefunction $U(r)$, wo r der Abstand des Massenpunktes vom Centralpunkt O ist. Wir betrachten die relative Bewegung des Punktes mit Bezug auf eine Ebene, welche, mit der bezeichneten Bewegungsebene zusammenfallend, sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Centralpunkt O dreht. Das Coordinatensystem in der rotirenden Ebene sei Oxy. Die Differentialgleichungen der so beschriebenen relativen Bewegung lauten bekanntlich:

$$(21)\quad x'' = \left(\frac{U_0}{r} + \omega^2\right) x + 2\omega y', \quad y'' = \left(\frac{U_0}{r} + \omega^2\right) y - 2\omega x',$$

wo wiederum $U_0 = \frac{dU}{dr}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Auch hier ergeben sich zwei Integrale, das Integral der lebendigen Kraft:

$$(22)\qquad \tfrac{1}{2} s'^2 = U + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + h$$

und das Integral der Flächen:

$$(23)\qquad xy' - yx' = k - \omega r^2,$$

wo h und k die Integrationsconstanten sind.

---

*) Wie bei Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, S. 95, kann jene als die Verbindung einer gewöhnlichen Centralbewegung mit einer Drehung aufgefasst werden.

Die Curven $r = \text{const.}$ sind nach (22) Curven gleich grosser Geschwindigkeit, die wir auch hier Niveaucurven nennen wollen, obwohl die Beschleunigung mit der Normale einer solchen Curve im Allgemeinen einen von 0 verschiedenen Winkel ϑ bildet, welcher der Gleichung entspricht:

$$\cos\vartheta = \frac{xx'' + yy''}{rg} = \frac{(U_0 - \omega^2 r)\, r + 2\omega k}{rg}. \tag{24}$$

Hier ist unter g die Grösse der Beschleunigung verstanden, für welche sich der folgende Ausdruck herstellen lässt:

$$g^2 = \frac{\{(U_0 - \omega^2 r)\, r + 2\omega k\}^2 + 4\omega^2\{2(U + h + \omega k) r^2 - k^2\}}{r^2}. \tag{25}$$

Führen wir durch die Substitution:

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u$$

Polarcoordinaten ein, so werden die beiden Integrale (22) und (23):

$$r'^2 + r^2 u'^2 = 2(U + h) + \omega^2 r^2, \tag{26}$$

$$r^2 u' = k - \omega r^2 \tag{27}$$

und ergiebt sich hieraus durch Elimination von u':

$$r'^2 = \frac{2(U + h + \omega k) r^2 - k^2}{r^2}. \tag{28}$$

Die Nullpunkte von r'^2 bestimmen nun, wie bei der gewöhnlichen Centralbewegung im Allgemeinen die Wendekreise r der Bewegung, d. h. diejenigen Kreise, welche die für die Bewegung bei gegebenem h und k zugänglichen Punkte der Ebene von den unzugänglichen trennen.

In einem Wendekreise verschwindet nach (24) und (25) der Winkel ϑ. Die Beschleunigung steht daher auf dem Wendekreise senkrecht, während gleichzeitig mit Rücksicht auf (22) die Bedingung der Scheitelwurfmomente:

$$s's'' = (U_0 + \omega^2 r^2)\, r' = 0.$$

erfüllt ist. Die Beschleunigung selbst kann, da der Zähler des Ausdruckes (25) für g^2 eine Summe von 2 positiven Gliedern ist, nach (28) anderwärts als in einem Wendekreise nicht verschwinden, und auch in einem Wendekreise nur unter der Bedingung $(U_0 - \omega^2 r) r + 2\omega k = 0$.

Das Niveau der Geschwindigkeit 0 ergiebt sich nach (22) aus der Gleichung:

$$2(U + h) + \omega^2 r^2 = 0.$$

Wird dasselbe wirklich erreicht, so muss mit s' auch x' und y', sowie nach (26) r' und u' verschwinden, mit letzterem nach (27):

$$k - \omega r^2 = 0$$

sein. Die Verbindung beider Gleichungen führt aber auf die Bedingung der Wendekreise:

$$2(U + h + \omega k) r^2 - k^2 = 0. \tag{29}$$

Wird daher das Niveau der Geschwindigkeit 0 *wirklich ercicht, so ist dasselbe zugleich Wendekreis der Bewegung.*

Die Beschleunigung erhält im Niveau der Geschwindigkeit 0 nach (21) die Componenten:

$$x'' = (U_0 + \omega^2 r)\,\frac{x}{r}, \qquad y'' = (U_0 + \omega^2 r)\,\frac{y}{r}$$

und ist somit im Allgemeinen von O verschieden, sodass ein *Scheitelfallmoment* der Bewegung vorliegt. Die Symmetrieaxe der zusammengeklappten Parabel der Schmiegungsbewegung fällt dabei in die Richtung des Radius vector oder in die entgegengesetzte, jenachdem $U_0 + \omega^2 r$ positiv oder negativ ist. *Die Bahncurve setzt sich also in beiden Fällen beziehungsweise mit einer radial nach innen oder radial nach aussen gerichteten Spitze auf das Niveau der Geschwindigkeit* 0 *auf.*

Da jedoch hier die Beschleunigung nicht blos vom Orte x, y, sondern auch von der Grösse und Richtung der Geschwindigkeit (in (21)) abhängt, so sind die Voraussetzungen der Entwicklungen des § 9 nicht mehr erfüllt. In der That wird jetzt in Folge von

$$u' = \frac{k}{r^2} - \omega, \qquad u'' = -\frac{2k}{r^3}\,r'$$

im Niveau der Geschwindigkeit 0, neben u', nach (28) und (29) auch $u'' = 0$, und hat somit die Amplitude u des bewegten Punktes im Allgemeinen kein Maximum oder Minimum, sondern geht nach einem Momente des Stillstehens in gleichem Sinne, wie vorher, weiter.

Die Spitzen der Bahncurve im Niveau der Geschwindigkeit 0 *haben also hier im Allgemeinen den Charakter gewöhnlicher Spitzen im Sinne der Geometrie der ebenen Curven und bedingen keine congruente Umkehr der Bewegung in sich selbst.*

In dem besonderen Falle, wo das Niveau der Geschwindigkeit 0 zugleich der Bedingung $U_0 + \omega^2 r$ genügt, verschwindet mit der Geschwindigkeit auch die Beschleunigung und ergiebt sich ein *Ruhemoment* der Bewegung.

Capitel III.

Bewegung eines Punktes auf einer Fläche.

§ 12.

Die Beschleunigung eines Punktes auf einer Fläche und der Parameter der Schmiegungsbewegung.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche:

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

(der Bahnfläche) unter Einfluss einer Kräftefunction $U(x, y, z)$ lauten, wenn $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, etc.

(2) $\quad x'' = U_1 + \lambda f_1, \quad y'' = U_2 + \lambda f_2, \quad z'' = U_3 + \lambda f_3,$

wo die in § 7 über U gemachte Voraussetzung wiederholt und auf f ausgedehnt wird.

Hierin ist:

(3) $$\lambda = \frac{\varepsilon N}{F};$$

ist ferner $F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$, N die absolute Grösse des Normalwiderstandes der Fläche und ε ein unbekanntes Vorzeichen, welches $+$ oder $-$ ist, jenachdem der Normalwiderstand die Richtung: $\frac{f_1}{F}, \frac{f_2}{F}, \frac{f_3}{F}$ oder die entgegengesetzte hat. Die Gleichungen (1) und (2) liefern*), falls wieder die Accente die Differentiation nach t bezeichnen

(4) $$\lambda = \frac{\varepsilon N}{F} = -\frac{1}{F^2}\{U_1 f_1 + U_2 f_2 + U_3 f_3) + G(x', y', z')\},$$

mit der Abkürzung:

(5) $G(x', y', z') = f_{11} x'^2 + f_{22} y'^2 + f_{33} z'^2 + 2 f_{23} y' z' + 2 f_{31} z' x' + 2 f_{12} x' y',$

wodurch sowohl die Grösse von N, als auch das Vorzeichen ε, wenn x, y, z und x', y', z' bekannt sind, bestimmt wird.

Wie bei der freien Bewegung hat man auch hier:

(6) $$\frac{1}{2} s'^2 = U + h.$$

Dagegen ergiebt sich aus (2) mit Benutzung von (4) gegenwärtig für die Beschleunigung:

(7) $$g^2 = \frac{(U_2 f_3 - U_3 f_2)^2 + (U_3 f_1 - U_1 f_3)^2 + (U_1 f_2 - U_2 f_1)^2 + G^2(x', y', z')}{F^2}.$$

Für das Verschwinden der Beschleunigung g erhalten wir hiernach die beiden Bedingungen:

(8) $$U_1 : U_2 : U_3 = f_1 : f_2 : f_3, \quad G(x', y', z') = 0.$$

Die Beschleunigung kann daher nur in einem solchen Augenblicke t verschwinden, in welchem an der gerade getroffenen Stelle x, y, z erstens die Bahnfläche und die entsprechende Niveaufläche sich berühren und zweitens die Geschwindigkeit entweder 0 *ist oder in eine der beiden Inflexionstangenten der Bahnfläche fällt.*

Um den Parameter der Schmiegungsbewegung darzustellen, gehen wir von der Formel § 4, 11 aus:

$$p = \frac{g^2 s'^2 - s'^2 s''^2}{g^2}$$

*) Kirchhoff a. a. O. S. 14.

und erhalten zuerst mit Benutzung von (6) und (7):

$$p = \frac{1}{F^2 g^3}\left\{(x'^2+y'^2+z'^2)\left\{(U_2 f_3 - U_3 f_2)^2 + \cdots + \cdots\right\} + s'^2 G^2(x',y',z') - (f_1^2+f_2^2+f_3^2)\left\{U_1 x' + U_2 y' + U_3 z'\right\}^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber leicht mit Benutzung der Relation: $f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0$ auf die folgende Form bringen:

$$(9) \qquad p = \frac{2(U+h)\,G^2(x',y',z') + D^2(x',y',z')}{g^3 F^2},$$

wo D die Determinante bedeutet:

$$D(x',y',z') = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Der Parameter verschwindet stets im Niveau der Geschwindigkeit 0. Soll er an einer andern Stelle verschwinden, so muss $G(x',y',z') = 0$ sein, also die Geschwindigkeit in eine Inflexionstangente fallen, und zugleich $D(x',y',z') = 0$ sein, also die Geschwindigkeit mit der Normale der Niveaufläche und der Normale der Bahnfläche in einer Ebene liegen.

Der Parameter der Schmiegungsbewegung kann nur verschwinden, wenn der bewegte Punkt sich entweder im Niveau der Geschwindigkeit 0 befindet oder an einer Stelle der Fläche, wo die gemeinsame Normalebene der Bahnfläche und der Niveaufläche durch eine der beiden Inflexionstangenten der ersteren Fläche geht, und die Geschwindigkeit zugleich die Richtung einer dieser beiden Tangenten hat.

Auf einer Fläche positiver Krümmung kann somit der Parameter nur im Niveau der Geschwindigkeit 0 verschwinden und liegt alsdann ein Scheitelfallmoment der Bewegung vor, wenn nicht an der betreffenden Stelle Niveaufläche und Bahnfläche sich berühren.

Für die geodätischen Linien auf der Fläche (1) erhält man mit $U = 0$:

$$p = \frac{2hG^2(x',y',z')}{F^2\frac{G^3(x',y',z')}{F^3}} = \frac{F}{G\left(\frac{x'}{\sqrt{2h}}, \frac{y'}{\sqrt{2h}}, \frac{z'}{\sqrt{2h}}\right)},$$

d. h. es wird p gleich dem Krümmungsradius des in die Richtung der Geschwindigkeit fallenden Normalschnittes der Fläche, also gleich dem Krümmungsradius der geodätischen Linie selbst, übereinstimmend mit § 6, 2.

§ 13.

Beziehung zwischen den Parametern in einem Punkte der Fläche.

Die einzelnen Bestandtheile der Formel (9) haben bekannte Bedeutungen. Es sei nämlich q wieder der Krümmungsradius der in der

Richtung x', y', z' durch den Punkt x, y, z gehenden Bahncurve, r der Krümmungsradius der in gleicher Richtung durch den Punkt gehenden geodätischen Linie und ϱ der geodätische Krümmungsradius der Bahncurve. Dann bestehen die Beziehungen*):

$$\frac{1}{r} = \frac{G(x', y', z')}{F^2 s'^2}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{D(x', y', z')}{F^3 . s'^3}, \quad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2},$$

$$p = \left(\frac{2(U+h)}{g}\right)^3 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right).$$

Wir wollen aber noch eine andere Darstellung für q und p ableiten, indem wir die Hauptaxen der Indicatrix der Fläche im Punkte x, y, z einführen. Es seien a, b, c und a', b', c' die Richtungscosinus der beiden Hauptaxen ξ und η der Indicatrix des Punktes x, y, z und a'', b'', c'' die Richtungscosinus der Flächennormale ζ. Es ist dann:

$$a'' = \frac{f_1}{F}, \quad b'' = \frac{f_2}{F}, \quad c'' = \frac{f_3}{F},$$

Bezeichnen wir nun mit μ und μ' die Componenten der Geschwindigkeit x', y', z' nach den Axen ξ und η, so haben wir:

$$\mu = ax' + by' + cz', \quad \mu' = a'x' + b'y' + c'z', \quad 0 = a''x' + b''y' + c''z'$$

und wenn λ und λ' die reciproken Halbaxenquadrate der Indicatrix bedeuten:

$$G(x', y', z') = \lambda\mu^2 + \lambda'\mu'^2.$$

Ferner findet sich:

$$f_2 z' - f_3 y' = f_2(c\mu + c'\mu') - f_3(b\mu + b'\mu') = F(b''c - c''b)\mu + F(b''c' - c''b')\mu' = F(a'\mu - a\mu')$$

und ebenso:

$$f_3 x' - f_1 z' = F(b'\mu - b\mu'), \quad f_1 y' - f_2 x' = F(c'\mu - c\mu')$$

und damit endlich:

$$D(x', y', z') = F(\Lambda'\mu - \Lambda\mu')$$

wo:

$$\Lambda = aU_1 + bU_2 + cU_3 \quad \text{und} \quad \Lambda' = a'U_1 + b'U_2 + c'U_3$$

die Componenten der von der Kräftefunction U allein herrührenden Kraft U_1, U_2, U_3 nach den Hauptaxen ξ und η der Indicatrix sind. Mit diesen Darstellungen von G und D folgt jetzt:

$$\frac{1}{q^2} = \frac{s'^2(\lambda\mu^2 + \lambda'\mu'^2)^2 + F^2(\Lambda'\mu - \Lambda\mu')^2}{F^2 s'^6},$$

(10)

$$p = \frac{s'^2(\lambda\mu^2 + \lambda'\mu'^2)^2 + F^2(\Lambda'\mu - \Lambda\mu')^2}{F^2 g^3},$$

wobei:

*) Vgl. z. B. Schell, a. a. O. S. 418.

$$g^2 = \frac{(U_2 f_3 - U_3 f_2)^2 + (U_3 f_1 - U_1 f_3)^2 + (U_1 f_2 - U_2 f_1)^2 + (\lambda \mu^2 + \lambda' \mu'^2)^2}{F^2}$$

zu denken ist.

Da $s'^2 = 2(U+h)$ von der Richtung der Geschwindigkeit unabhängig ist, so geben die Formeln (10) eine Vorstellung darüber, wie sich bei gegebenem h die den verschiedenen Richtungen der Bahncurve im Punkte x, y, z entsprechenden Parameter, bezüglich Krümmungsradien gegen die Hauptaxen der Indicatrix vertheilen. Man kann diese Vorstellung noch etwas weiter verfolgen.

Die Indicatrix im Punkte x, y, z der Fläche entsteht, indem man in der Tangentialebene des Punktes nach jeder Richtung die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius der in dieser Richtung durch den Punkt gehenden geodätischen Linie aufträgt und die Endpunkte der aufgetragenen Strecken fixirt. *Wir wollen nun in entsprechender Weise nach jeder Richtung die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius der in dieser Richtung durch den Punkt gehenden Bahncurve der Bewegung* (2) *bei festgehaltenem h auftragen.* Ist der *Endpunkt der aufgetragenen Strecke* ξ, η in dem vorhin so bezeichneten Coordinatensystem, so haben wir:

$$\frac{\xi}{\sqrt{q}} = \frac{\mu}{s'}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{q}} = \frac{\mu'}{s'}; \quad \xi^2 + \eta^2 = q$$

und dies in die erste Formel (10) eingesetzt:

$$\frac{1}{q^2} = \frac{s'^4 \left\{\lambda \left(\frac{\mu}{s'}\right)^2 + \lambda' \left(\frac{\mu'}{s'}\right)^2\right\}^2 + F^2 \left\{\Lambda' \frac{\mu}{s'} - \Lambda \frac{\mu'}{s'}\right\}^2}{F^2 s'^4}$$

$$= \frac{4(U+h)^2 \left\{\lambda \frac{\xi^2}{q} + \lambda' \frac{\eta^2}{q}\right\}^2 + F^2 \frac{\xi^2+\eta^2}{q} \left\{\Lambda' \frac{\xi}{\sqrt{q}} - \Lambda \frac{\eta}{\sqrt{q}}\right\}^2}{4 F^2 (U+h)^2}.$$

Indem sich jetzt $\frac{1}{q^2}$ beiderseits weghebt, ergiebt sich als *Gleichung des Ortes der Punkte* ξ, η:

(11) $4(U+h)^2\{(\lambda\xi^2+\lambda'\eta^2)^2-1\} + F^2(\xi^2+\eta^2)(\Lambda'\xi-\Lambda\eta)^2 = 0,$

also eine *Curve* 4. *Ordnung* mit dem Mittelpunkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ oder x, y, z.

Dieselbe hat für $\Lambda = 0$ oder $\Lambda' = 0$, d. h. wenn die Normale der Niveaufläche im Punkte x, y, z auf einer der beiden Hauptaxen der Indicatrix senkrecht steht, die Hauptaxen der Indicatrix ebenfalls als Symmetrieaxen. Sie fällt für $\Lambda = 0$ und $\Lambda' = 0$, wenn die Normale der Niveaufläche mit der Normale der Bahnfläche zusammenfällt, mit der Indicatrix (einschliesslich des conjugirten Kegelschnittes) zusammen. Sie reducirt sich endlich im Niveau der Geschwindigkeit 0 auf den Punkt: $\xi^2 + \eta^2 = 0$ und die doppelt gelegte Gerade:

$$\Lambda'\xi - \Lambda\eta = 0, \tag{12}$$

welche die senkrechte Projection der Normale der Niveaufläche auf die Tangentialebene der Bahnfläche ist. Auf die Bedeutung dieser ausgezeichneten Geraden in einem Punkte des Niveau's der Geschwindigkeit 0 kommen wir in § 14 zurück.

In analoger Weise wie der Krümmungshalbmesser q vertheilen sich die Werthe der Parameter p auf die verschiedenen Richtungen der Geschwindigkeit.

§ 14.

Das Verhalten der Bahncurve im Niveau der Geschwindigkeit 0.

Die Betrachtungen des § 9 lassen sich bei den durch die Differentialgleichungen § 12, 2 dargestellten Bewegungen ebenfalls wiederholen. Denn wenn auch nicht, wie in § 7, 2, die Beschleunigung x'', y'', z'' durch den Ort x, y, z allein bestimmt ist, sondern wie die Grösse λ in § 12, 4 von der Geschwindigkeit x', y', z' abhängt, so bleibt doch λ von einem Wechsel der Vorzeichen von x', y', z' völlig unberührt, und darauf allein kommt es bei der erwähnten Schlussfolgerung an. Wir finden also auch hier ein dem dortigen Satze II entsprechendes Resultat, welches mit Berücksichtigung des in § 12, zu 8 Bemerkten lautet:

II'. *Sobald die Bewegung eines Massenpunktes, welche, an eine gegebene Fläche gebunden, übrigens unter Einfluss einer eindeutig vom Orte allein abhängenden Kräftefunction vor sich geht, das Niveau der Geschwindigkeit* 0 *erreicht, ohne dass Bahnfläche und Niveaufläche sich berühren, so kehrt sie congruent in sich zurück.*

Auch die Sätze IV des § 9 gelten für die jetzt betrachtete Bewegung auf einer Fläche. Zu der übrigens mit der dortigen übereinstimmenden Ableitung der Sätze ist hier nur zu bemerken, dass die Axe der einzigen, in einem Punkte des Nullniveau's existirenden Schmiegungsbewegung nicht, wie dort, in die Normale der Niveaufläche fällt, sondern in die Durchschnittsgerade der Tangentialebene der Bahnfläche mit der gemeinsamen Normalebene von Bahnfläche und Niveaufläche, dieselbe Gerade, welche wir in § 13, 12 dargestellt haben.

Beispiele hierfür bietet die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Axe. Hier kann das Niveau der Geschwindigkeit 0 nur erreicht werden, wenn die Flächengeschwindigkeit der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung 0 ist. Die Bewegung findet alsdann in einer Meridianebene statt und ist, von singulären Fällen abgesehen, entweder instabil vom Charakter der Bewegung des freien Falles, wie z. B. auf dem oben geschlossenen

Rotationsparaboloid, oder stabil vom Charakter der oscillirenden Kreispendelbewegung, wie bei dem Rotationsellipsoid, welches vom Niveau der Geschwindigkeit 0 geschnitten wird.

Indem es geboten erscheint, diese bekannten Beispiele zu übergehen, dürfte es dagegen von einigem Interesse sein, ein Beispiel aus der Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Fläche zu besitzen, wo die Bahn einer congruent in sich zurückkehrenden stabilen Bewegung eine *Curve doppelter Krümmung* ist, sei es dass die Bewegung periodisch zwischen 2 Stellen der Niveauebene der Geschwindigkeit 0 nach Art des Kreispendels oscillirt, sei es dass sie nur ein Ende in dieser Ebene hat. Ein solches Beispiel findet sich unter den verschiedenen Formen der Bewegung eines schweren Punktes auf dem *elliptischen Paraboloid* mit verticaler Scheitelaxe. Wir müssen auf diese Bewegung in § 15 etwas näher eingehen, um die gestaltlichen Verhältnisse der Bahncurven hinreichend zu übersehen.*)

Wir bemerken zuvor noch, dass der Satz II' dieses Paragraphen beispielsweise *nicht* gilt für die relative Bewegung eines ebenen Punktes auf einer Rotationsfläche, die selbst um die verticale Rotationsaxe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt (Foucault'sches Pendel am Pole der Erde), dass hier vielmehr ähnliche Verhältnisse, wie oben in § 11 sich ergeben.**)

§ 15.

Beispiel der Bewegung eines schweren Punktes auf dem elliptischen Paraboloid.

Mit zwei Constanten $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ und einem Parameter u stellt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha - u} + \frac{y^2}{\beta - u} + 2z + u = 0 \tag{1}$$

*) Die Bewegung scheint zuerst behandelt zu sein von de Saint Germain, Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde, Liouville's Journal, Serie III, Bd. 3, S. 401 (1877) und gehört unter die Gruppe der von Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, hrsg. von Clebsch, 1866, S. 219, zur Theorie der elliptischen Coordinaten angegebenen Fälle; nur muss man die Jacobi'schen Bemerkungen auf parabolische Coordinaten ausdehnen. Ein specieller Fall von de Saint Germain's Entwicklungen findet sich als Dissertation von Groscurth, Ueber parabolische Coordinaten und die geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid, Marburg 1887. Die besondere Form der Bahncurven, auf die es hier ankommt, ist wohl bisher nicht beschrieben worden.

**) Die Bahncurve des Foucault'schen Pendels *mit Spitzen ohne congruente Umkehr* findet sich bei Weihrauch, Ueber die Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, Exner's Repertorium der Physik, Bd. XXII, S. 491 (1886), gezeichnet.

ein System confocaler Paraboloide dar. Durch jeden Punkt x, y, z des Raumes gehen 3 Paraboloide, deren Parameter λ, μ, ν die parabolischen Coordinaten des Punktes, den Ungleichungen:

$$(2) \qquad -\infty < \lambda < \beta < \mu < \alpha < \nu < +\infty$$

entsprechen. Wir wählen die z-Axe des Coordinatensystems $Oxyz$ vertical nach unten gerichtet, die x-Axe nach rechts und die y-Axe nach vorn auf den Beschauer zulaufend. Alsdann sind die Paraboloide $u = \lambda$ nach oben offene elliptische Paraboloide, deren Scheitelpunkte $z = -\frac{\lambda}{2}$ auf der z-Axe von $z = +\infty$ bis $z = -\frac{\beta}{2}$ laufen (vgl. Fig. 3), während λ von $-\infty$ bis β geht. Das letzte dieser elliptischen Paraboloide $\lambda = \beta$ wird von dem Inneren der in der zx-Ebene gelegenen „oberen Focalparabel" $\lambda = \mu = \beta$ gebildet, deren Scheitel $z = -\frac{\beta}{2}$ und deren Brennpunkt $z = -\frac{\alpha}{2}$ ist. Ferner sind die Paraboloide $u = \mu$ hyperbolische Paraboloide, welche die zx-Ebene in oberwärts offenen, die yz-Ebene in unterwärts offenen Parabeln schneiden. Ihr Scheitelpunkt $z = -\frac{\mu}{2}$ bewegt sich auf der z-Axe von $z = -\frac{\beta}{2}$ bis $z = -\frac{\alpha}{2}$; das hyperbolische Paraboloid $\mu = \beta$ wird durch das Aeussere der oberen Focalparabel in der zx-Ebene gebildet, das hyperbolische Paraboloid $\mu = \alpha$ dagegen durch das Aeussere der „unteren Focalparabel" $\mu = \nu = \alpha$, welche in der yz-Ebene liegt, den Scheitel $z = -\frac{\alpha}{2}$ und den Brennpunkt $z = -\frac{\beta}{2}$ hat. Endlich sind die Paraboloide $u = \nu$ nach unten offene elliptische Paraboloide, deren Scheitelpunkt $z = -\frac{\nu}{2}$ auf der z-Axe von $z = -\frac{\alpha}{2}$ bis $z = -\infty$ geht. Sie beginnen für $\nu = \alpha$ mit dem Inneren der unteren Focalparabel.

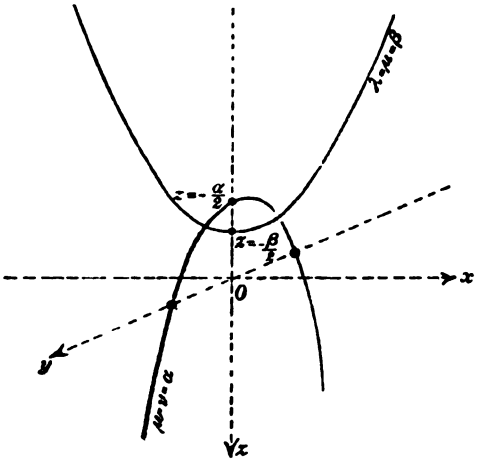


Fig. 3.

Auf der oberen Focalparabel $\lambda = \mu = \beta$ liegen die Kreispunkte der nach unten offenen elliptischen Paraboloide ν, auf der unteren Focalparabel $\mu = \nu = \alpha$ die Kreispunkte der nach oben offenen elliptischen Paraboloide λ.

Durch die parabolischen Coordinaten drücken sich die gewöhnlichen folgendergestalt aus:

$$x^2 = \frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\nu-\alpha)}{(\alpha-\beta)}, \quad y^2 = \frac{(\beta-\lambda)(\mu-\beta)(\nu-\beta)}{(\alpha-\beta)},$$

$$z = \frac{\alpha+\beta-\lambda-\mu-\nu}{2}.$$

Wir wollen nun als Bahnfläche der zu betrachtenden Bewegung ein nach oben offenes elliptisches Paraboloid $\lambda = \lambda_0$ herausgreifen und die Krümmungscurven $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$, in welchen dasselbe von den Paraboloiden der beiden anderen Arten geschnitten wird, als Coordinaten auf der Fläche einführen. Die Krümmungscurven $\mu = \text{const.}$ bestehen*) aus 2 durch die zx-Ebene symmetrisch getrennten Zweigen, die je nach Art einer Parabel sich in's Unendliche erstrecken; für $\mu = \beta$ vereinigen sich die beiden Zweige zu dem Hauptschnitt des Paraboloids $\lambda = \lambda_0$ in der zx-Ebene, für $\mu = \alpha$ klappt jeder Zweig für sich in einen derjenigen beiden Theile des Hauptschnittes in der yz-Ebene zusammen, welche von den Kreispunkten des Paraboloids λ_0 sich nach oben in's Unendliche erstrecken. Die Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$ dagegen sind geschlossene Curvenzüge, welche das Paraboloid, ähnlich wie Parallelkreise das Rotationsparaboloid, umlaufen. Die Krümmungscurve $\nu = \alpha$ besteht aus demjenigen doppeltgelegten Theile des Hauptschnittes in der yz-Ebene, der die beiden Kreispunkte nach unten mit einander verbindet. Aus diesem Curventheile wächst mit zunehmendem ν die Krümmungscurve heraus, indem sie die Kreispunkte unterhalb liegen lässt und von ihnen nach oben sich entfernend in allen ihren Theilen gegen das Unendliche hin sich hinaufschiebt. Dabei ist des folgenden wegen zu beachten, dass *die Schnittpunkte der Krümmungscurve mit dem Hauptschnitt $\mu = \alpha$ immer höher liegen als die Schnittpunkte mit dem Hauptschnitte $\mu = \beta$ und dass sich die Curve von jenen zu diesen Schnittpunkten senkt* (3). Wir wollen die Curven μ und ν der Anschaulichkeit wegen als *parabolische und elliptische Krümmungscurven* des Paraboloids nennen.

Die Kreispunkte selbst haben die Coordinaten:

$$(4)\quad \mu = \alpha,\ \nu = \alpha : x = 0,\ y^2 = (\alpha-\beta)(\beta-\lambda_0),\ z = \frac{-(\alpha-\beta)-\lambda_0}{2}.$$

Wenden wir uns jetzt zur Bewegung eines Punktes auf dem Paraboloid λ_0 unter Einfluss der Kräftefunction $U = gz$, wo g die Beschleunigung der Schwere ist, so lautet das Princip der lebendigen Kraft:

*) Vgl. das Modell des elliptischen Paraboloids mit Krümmungslinien von Diesel, bei L. Brill in Darmstadt, III. Serie, Nr. 12.

$$\frac{1}{8}\left\{\frac{(\nu-\mu)(\mu-\lambda_0)\mu'^2}{(\alpha-\mu)(\mu-\beta)}+\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu)\nu'^2}{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}g(\alpha+\beta-\lambda_0-\mu-\nu)+h$$

und die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung:

$$2\frac{(\alpha-\mu)(\mu-\beta)}{(\mu-\lambda_0)(\nu-\mu)}\left(\frac{\partial W}{\partial\mu}\right)^2+2\frac{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)}{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu)}\left(\frac{\partial W}{\partial\nu}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}g(\alpha+\beta-\lambda_0-\mu-\nu)+h.$$

Aus dieser aber ergeben sich in bekannter Weise die Differentialgleichungen 1. Ordnung der Bewegung in den parabolischen Coordinaten μ, ν auf dem elliptischen Paraboloid λ_0:

$$(5)\qquad \begin{gathered}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\\ \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\varrho_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\varrho_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=dt,\end{gathered}$$

wobei:

$$(6)\qquad \begin{aligned}r(\mu)&=g(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\lambda_0-\mu)(\varrho_1-\mu)(\varrho_0-\mu);\\ r(\nu)&=g(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\lambda_0-\nu)(\varrho_1-\nu)(\varrho_0-\nu).\end{aligned}$$

Hier sind ϱ_0 und ϱ_1 Integrationsconstanten, welche mit der ursprünglich in der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung enthaltenen Constanten h der lebendigen Kraft in der Beziehung stehen:

$$(7)\qquad h=-\frac{g}{2}(\alpha+\beta)+\frac{g}{2}(\lambda_0+\varrho_0+\varrho_1),$$

wie sich bei dem Uebergang zu den Gleichungen (5) von selbst ergiebt.

Da nun bei der Bewegung des schweren Punktes μ, ν die Function $r(\nu)$ in (6) positiv bleiben und somit $(\varrho_1-\nu)(\varrho_0-\nu)$ negativ, also etwa $\varrho_1>\nu>\varrho_0$ sein muss, so kann etwa $\varrho_1=\nu_1$ gesetzt werden und ist dann $\nu_1>\nu>\varrho_0$. Da aber auch $r(\mu)$ positiv bleiben muss, so kann mit $\varrho_0<\mu$ entweder $\varrho_0=\nu_0$ oder $\varrho_0=\mu_0$ sein. Wir haben also zwei Arten der Bewegung, welche durch Ungleichungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned}&\text{I)}\ \beta<\mu<\alpha<\nu_0<\nu<\nu_1<+\infty;\\ &\text{II)}\ \beta<\mu<\mu_0<\alpha<\nu<\nu_1<+\infty\end{aligned}$$

charakterisirt sind. Den Zwischenfall $\mu_0=\nu_0=\alpha$ wollen wir hier nicht in's Auge fassen.

Die Bewegung I. Art findet innerhalb der oberhalb der Kreispunkte $\mathfrak{K}$ vorbeilaufenden gürtelartigen Zone zwischen zwei elliptischen Krümmungscurven (vgl. Fig. 4) statt, die der II. Art innerhalb eines viereckigen Gebietes, von welchem die zwei „Querseiten" Stücke der elliptischen Krümmungscurve ν_1 und die zwei „Längsseiten" Stücke der parabolischen Krümmungscurve μ_0 sind; der Scheitel $\mathfrak{S}$ des Paraboloides λ_0 ist der Mittelpunkt des Viereckes, die Kreispunkte $\mathfrak{K}$ liegen ausserhalb desselben an den Längsseiten (vgl. Fig. 5).

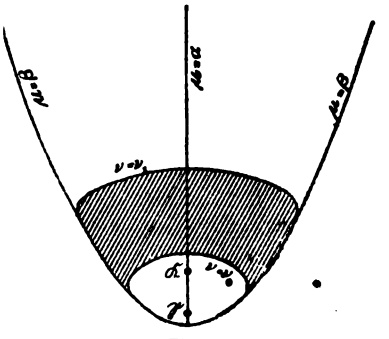


Fig. 4.

Die Lage des Niveau's der Geschwindigkeit 0, $gz_0 + h = 0$, gegen das Bewegungsgebiet erkennen

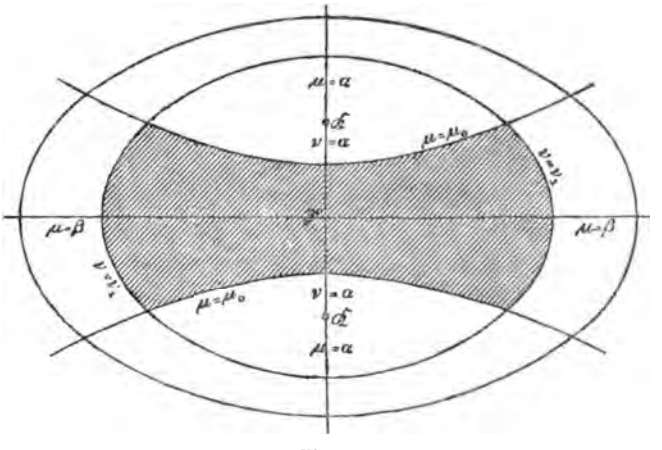


Fig. 5.

wir aus der Gleichung desselben in parabolischen Coordinaten, welche den Arten I und II entsprechend lautet:

(8) I) $\mu + \nu = \nu_1 + \nu_0$, II) $\mu + \nu = \nu_1 + \mu_0$,

während zugleich nach (7) für das Bewegungsgebiet die Ungleichungen gelten:

$$\mu + \nu \leqq \alpha + \nu_1 < \nu_0 + \nu_1, \qquad \mu + \nu \leqq \nu_1 + \mu_0.$$

Danach schliessen wir:

Bei der Bewegung I. Art liegt das Bewegungsgebiet ganz unterhalb des Nullniveau's, bei der Bewegung II. Art liegen die 4 Eckpunkte des Bewegungsgebietes und nur diese im Nullniveau.

Die Bewegung I. Art kann natürlich nur vorkommen, wenn das Nullniveau oberhalb der Kreispunkte liegt; folgt doch aus den Bedingungen:

$2z_0 = -\frac{2h}{g} > -(\alpha-\beta) - \lambda_0$ oder $h < g\frac{\alpha-\beta+\lambda_0}{2}$ oder $\varrho_0 + \nu_1 < 2\alpha$ nach (2) sofort, dass $\varrho_0 = \mu_0$ ist. Bei der Bewegung II. Art liegen zufolge der Bemerkung (3) die zwei Querseiten des Bewegungsgebietes ebenso wie die Längsseiten unterhalb der durch die 4 Ecken gehenden Horizontalebene.

Was nun die Bewegung selbst betrifft, so ist dieselbe für beide Arten bedingt periodisch*), dergestalt dass die Bewegung I. Art unter der Bedingung:

$$(9) \qquad m\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} = n\int_{\nu_0}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}$$

(mit $\varrho_1 = \nu_1$, $\varrho_0 = \nu_0$ in $r(\mu)$ und $r(\nu)$), die der II. Art unter der Bedingung:

$$(9) \qquad m\int_{\beta}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} = n\int_{\alpha}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}$$

(mit $\varrho_1 = \nu_1$, $\varrho_0 = \mu_0$ in $r(\mu)$ und $r(\nu)$) periodisch wird; m und n sind ganze Zahlen. Da indessen zwischen den Periodicitätsmoduln der vorliegenden hyperelliptischen Integrale 1. Gattung die Relationen bestehen:

$$\text{I)} \quad \int_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} - \int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\nu_0}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0,$$

$$\text{II)} \quad \int_{-\infty}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} - \int_{\beta}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\alpha}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0$$

und somit:

$$(10) \qquad \text{I)} \quad \int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} < \int_{\nu_0}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},$$

$$\text{II)} \quad \int_{\beta}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} < \int_{\alpha}^{\nu_1}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},$$

so ergiebt sich, dass in den obigen Bedingungen (9) stets $m > n$ sein muss.

Um hiernach ein schematisches Bild der Bahncurve bei der Bewegung I. Art zu geben, bemerken wir, dass die Zone zwischen den elliptischen Krümmungscurven ν_0 und ν_1 von einer Reihe gleichartiger Krümmungscurven ihrer ganzen Längsausdehnung nach durchzogen

*) Vgl. Stäckel, Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung, Habilitationsschrift Halle 1891, S. 24.

wird, dass sie dagegen ihrer Breitenausdehnung nach von Stücken parabolischer Krümmungscurven μ durchquert wird. Man zeigt nun leicht, indem man aus den Differentialgleichungen (5) den Winkel der Bahncurve der Krümmungslinien bestimmt, dass dieselbe kein Querstück berühren und daher im Sinne der Längsausdehnung der Zone niemals umkehren kann, und dass sie im Sinne der Querausdehnung nur umkehren kann, wo sie eine der Grenzcurven ν_0 und ν_1 trifft und dann berührt. Die Bedingung (10) bedeutet daher, (vgl. Fig. 6) *dass nach*

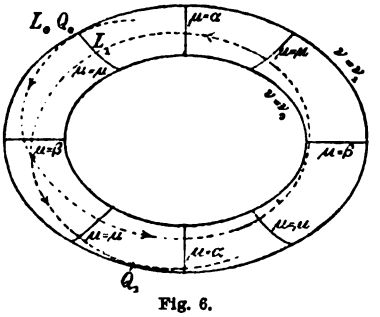


Fig. 6.

Ablauf einer vollen Längswindung ($L_0 L_1$) *noch keine Querwindung* ($Q_0 Q_1$) *vollendet sein kann.*

Bei der Bewegung II. Art werden die Längsseiten des Bewegungsgebietes von 2 Stücken der parabolischen Krümmungscurve μ_0 gebildet und wird das Gebiet von gleichartigen Stücken $\mu = \mu$ der Länge nach durchzogen. Dagegen wird es der Breite nach von Stücken elliptischer Krümmungscurven $\nu = \nu$ durchsetzt, die mit den Querseiten gleichartig sind. Analog wie vorhin schliessen wir auch hier auf die Bedeutung der Ungleichung (10) (vgl. Fig. 7), *dass nach Ablauf einer*

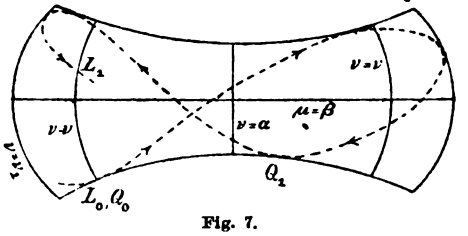


Fig. 7.

vollen Querwindung ($Q_0 Q_1$) *noch keine Längswindung* ($L_0 L_1$) *vollendet sein kann.*

Die Bewegungen II. Art liefern nun ein Beispiel zu den Sätzen des § 14. Die beiden Integrationsconstanten ν_1 und μ_0 bestimmen das Bewegungsgebiet, in welchem jede den Differentialgleichungen (5) entsprechende Bewegung vor sich geht. Die Bewegung kann, etwa

für den Zeitpunkt $t = 0$, von einem beliebigen Punkte des Gebietes ausgehen. Beschleunigung und Geschwindigkeit verschwinden in dem Gebiete niemals gleichzeitig, da Bahnfläche und Niveaufläche der Geschwindigkeit 0 sich nirgends berühren (vgl. § 12). Soll nun die Geschwindigkeit 0 werden, so ist dies nur in einem der vier Eckpunkte des Gebietes möglich und folgt dann nach § 14:

Wenn die Bewegung in eine der 4 Ecken des Bewegungsgebietes gelangt, kehrt sie congruent in sich zurück.

Die Bedingung dafür, dass die Bahncurve geschlossen und die Bewegung periodisch wird, ist nun von dem Anfangspunkt der Bewegung unabhängig und bezieht sich (nach (9)) nur auf die Wahl des Bewegungsgebietes $(\nu_1 \mu_0)$. Wenn also die Bedingung für ein

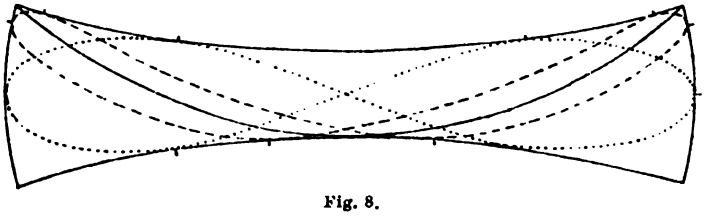


Fig. 8.

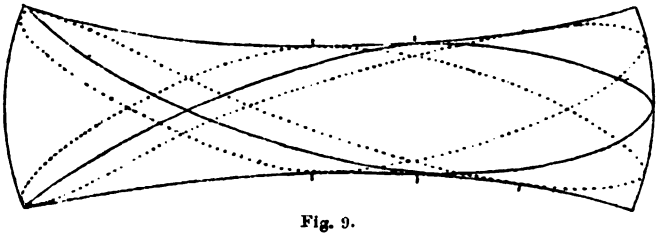


Fig. 9.

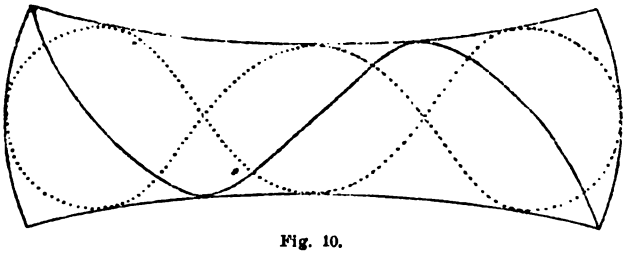


Fig. 10.

Gebiet $(\nu_1 \mu_0)$ nicht erfüllt ist, so wird auch eine diesem Gebiete angehörige, congruent in sich zurückkehrende Bewegung nicht geschlossen sein, also nur einmal in eine Ecke des Bewegungsgebietes gelangen und sich dann in unbegrenzt vielen Windungen innerhalb des Bewegungsgebietes fortsetzen, ohne wieder in eine Ecke des Gebietes kommen zu können. Ist aber die Bedingung erfüllt, so sind alle dem Bewegungsgebiet angehörigen Bahncurven geschlossen, alle Bewegungen

periodisch und isochron, also auch diejenigen, welche eine Ecke des Gebietes erreichen. Diese können aber nur geschlossen sein, wenn sie zweimal in sich zurückkehren. Sie sind daher Oscillationen auf einer Bahncurve, deren zwei Endpunkte im Niveau der Geschwindigkeit 0, also in 2 Ecken des Bewegungsgebietes liegen.

Die schematischen Figuren 8 bis 10 zeigen den Verlauf der mit 2 Umkehrstellen behafteten Bahncurven, wie sie der als erfüllt vorausgesetzten Bedingung (9) mit $(m, n) = (2, 1), (3, 2), (3, 1)$ entsprechen, in ausgezogenen, sowie geschlossene Bahncurven desselben Bewegungsgebietes ohne Umkehrstellen in punktirten Linien.

Rostock, am 7. October 1891.

Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungssysteme.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Die von Natani für die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegebene*) und von Hamburger auf die Integration gleichzeitiger partieller Differentialgleichungssysteme erster und höherer Ordnung erweiterte**) Methode liefert die Möglichkeit, eine Discussion der Integrale zu bewerkstelligen, ähnlich wie sie Poincaré***) für zahlreiche Fälle *einer* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durchgeführt hat; doch bedarf jene Methode zuvor einiger Ausführungen und Ergänzungen, die ich in der vorliegenden Arbeit der Deutlichkeit und Durchsichtigkeit wegen an den partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung und zweiter Classe mit zwei unabhängigen Variabeln auseinandersetzen und durch Beispiele erläutern will.

Ist ein lineares simultanes partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung und zweiter Classe mit den abhängigen Variabeln z_1 und z_2, den unabhängigen Variabeln x und y von der Form vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} A_{11}\frac{\partial z_1}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial z_2}{\partial x} + B_{11}\frac{\partial z_1}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial z_2}{\partial y} + C_1 = 0, \\ A_{21}\frac{\partial z_1}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial z_2}{\partial x} + B_{21}\frac{\partial z_1}{\partial y} + B_{22}\frac{\partial z_2}{\partial y} + C_2 = 0, \end{cases}$$

worin die Grössen A, B, C gegebene Functionen von x, y, z_1 und z_2 sind, so werde dasselbe zunächst durch Elimination von $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ und mit Hülfe der Bezeichnung

*) Die höhere Analysis in 4 Abhandlungen, Berlin 1866, p. 365.

**) Journal für reine und angew. Mathematik Bd. 81, pag. 243 und Bd. 93, pag. 188.

***) Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Paris 1879.

$$(2) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$$

auf die Gestalt gebracht

$$(3) \qquad \begin{cases} p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0, \\ p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0, \end{cases}$$

was stets möglich ist, wenn die beiden Gleichungen (1) algebraisch von einander unabhängig sind und nicht ein totales Differentialgleichungssystem zweiter Classe bilden sollen; denn da sich aus (1) ergiebt

$$(4) \qquad \begin{cases} (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})\frac{\partial z_1}{\partial x} + (B_{11}A_{22} - B_{21}A_{12})\frac{\partial z_1}{\partial y} \\ + (B_{12}A_{22} - B_{22}A_{12})\frac{\partial z_2}{\partial y} + C_1 A_{22} - C_2 A_{12} = 0, \\ (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})\frac{\partial z_2}{\partial x} + (B_{21}A_{11} - B_{11}A_{21})\frac{\partial z_1}{\partial y} \\ + (B_{22}A_{11} - B_{12}A_{21})\frac{\partial z_2}{\partial y} + C_2 A_{11} - C_1 A_{21} = 0, \end{cases}$$

so würden sich nur dann die Gleichungen (3) nicht herstellen lassen, wenn

$$(4) \qquad A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0$$

wäre, in welchem Falle jedoch entweder die Gleichungen (4) in zwei totale Differentialgleichungen mit der einen unabhängigen Variabeln y und den beiden abhängigen z_1 und z_2 übergehen, oder wenn ausser (5) noch die Beziehungen

$$(6) \qquad B_{11}A_{22} - B_{21}A_{12} = 0, \quad B_{12}A_{22} - B_{22}A_{12} = 0, \quad C_1 A_{22} - C_2 A_{12} = 0$$

bestehen, die zweite Gleichung (1) durch Multiplication mit $\frac{A_{12}}{A_{22}}$ in die erste Gleichung (1) übergeführt wird, und das Differentialgleichungssystem (1) somit, da die beiden Differentialgleichungen algebraisch von einander abhängig sind, ein unbestimmtes wäre.

Es soll die Integration des partiellen Differentialgleichungssystems (3) mit der Integration totaler Differentialgleichungssysteme in Verbindung gebracht, und zum besseren Verständniss die analoge Erörterung für Differentialgleichungssysteme erster Classe vorausgeschickt werden.

Sei also die partielle Differentialgleichung

$$(7) \qquad p + \alpha q + \beta = 0$$

vorgelegt und

$$(8) \qquad f(x, y, z) = a,$$

worin a eine willkürliche Constante bedeutet, ein Integral derselben, so lässt sich für jede Functionalbeziehung (8) ein totales Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz}{dx} = N \tag{9}$$

aufstellen, von welchem die Gleichung (8) eine Integralgleichung ist, da man nur M und N so als Functionen von x, y, z zu bestimmen braucht, dass der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M + \frac{\partial f}{\partial z} N = 0 \tag{10}$$

identisch für alle x, y, z genügt wird, und es ist also dann, da aus (8)

$$p = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

folgt, z als Function von x und y aus (8) dargestellt ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$p + Mq - N = 0; \tag{11}$$

da aber (8) auch ein Integral von (7) sein soll, so werden M und N, ohne (8) zu kennen, so gewählt werden können, dass (7) und (11) zu gleicher Zeit bestehen, indem man

$$M = \alpha, \quad N = -\beta \tag{12}$$

setzt, und da dies für jedes Integral von (7) gültig bleibt, so folgt, dass alle Integrale von (7) Integralgleichungen des totalen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dz}{dx} = -\beta \tag{13}$$

sind.

Uebertragen wir nun dieselbe Schlussform auf das partielle Differentialgleichungssystem (3), und sei

$$f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2, \tag{14}$$

worin a_1 und a_2 willkürliche Constanten bedeuten, ein in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängiges Integralsystem dieser Differentialgleichungen, so ist zunächst klar, dass man stets zwei Gleichungen (14) in den Variabeln x, y, z_1, z_2 als Integralgleichungen eines totalen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz_1}{dx} = N, \quad \frac{dz_2}{dx} = P \tag{15}$$

ansehen kann, indem man M, N, P nur aus den beiden in x, y, z_1, z_2 identischen Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial x} M + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} P = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} M + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} P = 0 \end{cases} \tag{16}$$

zu bestimmen braucht, oder es sind die aus zwei solchen Gleichungen sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y, da

$$(17)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} : \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ p_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} : \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ q_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} : \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ q_2 = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} : \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_2}{dz_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} \end{cases}$$

ist, stets ein Integralsystem des partiellen Differentialgleichungssystems

$$(18)\quad \begin{cases} p_1 + q_1 M - N = 0, \\ p_2 + q_2 M - P = 0, \end{cases}$$

worin M, N, P aus (16) hergeleitet sind. Nun sollen aber die Gleichungen (14) Integralgleichungen des partiellen Differentialgleichungssystems (3) sein, und es werden somit nur dann *alle* Integrale der Systeme (3) und (18) gemeinsame sein, wenn sich die letzteren unmittelbar identificiren lassen, wenn also

$$(19)\quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha$$

ist, in welchem Falle

$$(20)\quad M = \alpha, \quad N = -\beta_1, \quad P = -\beta_2$$

gesetzt werden kann, so dass das totale Differentialgleichungssystem (15) ohne Kenntniss eines Integralsystems aufgestellt werden kann und sich somit der bekannte Jacobi'sche Satz ergiebt, dass man, um das simultane partielle Differentialgleichungssystem

$$(21)\quad p_1 + \alpha q_1 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha q_2 + \beta_2 = 0$$

allgemein zu integriren, nur das totale Differentialgleichungssystem

$$(22)\quad \frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dz_1}{dx} = -\beta_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = -\beta_2$$

zu integriren braucht. Sind dann

$$(23)\quad f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2, \quad f_3(x, y, z_1, z_2) = a_3$$

drei von einander unabhängige Integrale des Systemes (22), so werden z_1 und z_2, aus den beiden Gleichungen

$$(21)\quad \varphi_1(f_1, f_2, f_3) = 0, \quad \varphi_2(f_1, f_2, f_3) = 0$$

bestimmt, in denen φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, die allgemeinen Integralfunctionen des Systemes (21) ergeben.

Sind jedoch die Gleichungen (19) nicht erfüllt, so lassen sich die Systeme (3) und (18) nicht identificiren, und man kann nur M, N, P ohne Kenntniss der Integrale so zu bestimmen suchen, dass eine lineare Verbindung der Gleichungen des einen Systems einer eben-

solchen Verbindung der Gleichungen des anderen Systems identisch gleich ist, dass also

$$(25)\quad \lambda(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+\mu(p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2) = \lambda(p_1+q_1M-N)+\mu(p_2+q_2M-P)$$

ist, woraus sich durch Identificirung, indem M, N, P nicht von den Integralfunctionen sondern nur von den Coefficienten des partiellen Differentialgleichungssystems abhängen sollen,

$$(26)\quad \begin{cases} \lambda(\alpha_{11}-M)+\mu\alpha_{21}=0, \\ \lambda\alpha_{12}+\mu(\alpha_{22}-M)=0 \end{cases}$$

und

$$(27)\quad \lambda(\beta_1+N)+\mu(\beta_2+P)=0$$

ergiebt. Bezeichnet nun M_1 eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$(28)\quad (\alpha_{11}-M)(\alpha_{22}-M)-\alpha_{12}\alpha_{21}=0,$$

so wird sich

$$(29)\quad \lambda_1=\alpha_{21},\quad \mu_1=M_1-\alpha_{11}$$

ergeben, während die zu M_1 gehörigen Werthe N_1 und P_1 nur der Gleichung zu genügen brauchen

$$(30)\quad \alpha_{21}(\beta_1+N_1)+(M_1-\alpha_{11})(\beta_2+P_1)=0,$$

und da nun das totale Differentialgleichungssystem (15) mit dem partiellen (18) identisch ist, so folgt aus (25), da ein Verschwinden der rechten Seite auch das der linken Seite nach sich zieht, *dass die aus zwei beliebigen in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängigen Integralgleichungen*

$$(31)\quad f_1(x, y, z_1, z_2)=a_1,\quad f_2(x, y, z_1, z_2)=a_2$$

des totalen Differentialgleichungssystems

$$(32)\quad \frac{dy}{dx}=M_1,\quad \frac{dz_1}{dx}=N_1,\quad \frac{dz_2}{dx}=P_1$$

oder der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(33)\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}M_1+\frac{\partial f}{\partial z_1}N_1+\frac{\partial f}{\partial z_2}P_1=0$$

bestimmten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen der partiellen Differentialgleichung mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln sind

$$(34)\quad \alpha_{21}(p+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M_1-\alpha_{11})(p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0.$$

Sei z. B. das Differentialgleichungssystem

$$(35)\quad \begin{cases} p_1+z_1q_1+z_2q_2+\dfrac{2y(z_2-z_1)-2x}{z_2-2z_1}=0, \\ p_2+2z_1q_1+2z_2q_2+\dfrac{y(2z_2-5z_1)+x}{z_2-2z_1}=0, \end{cases}$$

so würde die in M quadratische Gleichung

$$M^2 - (2z_2 + z_1)M = 0 \tag{36}$$

lauten, und daher nach (29) und (30)

$$\begin{cases} M_1 = 0, \ \lambda_1 = 2z_1, \ \mu_1 = -z_1, \\ 2z_1 N_1 - z_1 P_1 = 2z_1 \dfrac{2x - 2y(z_2 - z_1)}{z_2 - 2z_1} + z_1 \dfrac{y(2z_2 - 5z_1) + x}{z_2 - 2z_1} \end{cases} \tag{37}$$

zu setzen sein. Wählen wir

$$N_1 = \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1}, \quad P_1 = \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1}, \tag{38}$$

so wird die letzte der Gleichungen (37) identisch befriedigt, und das totale Differentialgleichungssystem (32) oder die lineare partielle Differentialgleichung (33) gehen über in

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1}, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1} \tag{39}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1} = 0; \tag{40}$$

nun sind drei von einander unabhängige Integrale des totalen Systems (39), wie leicht zu sehen,

$$y = a_1, \quad xy + z_1 + 2z_2 = a_2, \quad x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2 = a_3, \tag{41}$$

und es müssten nach dem eben bewiesenen Satze die aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi_1(y, xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \\ \varphi_2(y, xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \end{cases} \tag{42}$$

worin φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integrale der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &2z_1 \left(p_1 + z_1 q_1 + z_2 q_2 + \frac{2y(z_2 - z_1) - 2x}{z_2 - 2z_1}\right) \\ &- z_1 \left(p_2 + 2z_1 q_1 + 2z_2 q_2 + \frac{y(2z_2 - 5z_1) + x}{z_2 - 2z_1}\right) = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

oder einfacher

$$2p_1 - p_2 + \frac{y(2z_2 + z_1) - 5x}{z_2 - 2z_1} = 0 \tag{44}$$

sein; in der That liefert die partielle Differentiation von (42) nach x die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial(xy + z_1 + 2z_2)}(y + p_1 + 2p_2) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial(x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2)}\left(2x + 2z_1 p_1 + 2z_2 p_2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial(xy + z_1 + 2z_2)}(y + p_1 + 2p_2) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial(x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2)}\left(2x + 2z_1 p_1 + 2z_2 p_2\right) = 0$$

und wegen der Unabhängigkeit der willkürlichen Functionen φ_1 und φ_2 von einander

$$y + p_1 + 2p_2 = 0, \quad x + z_1 p_1 + z_2 p_2 = 0, \tag{45}$$

welche die Gleichung (44) identisch befriedigen.

Da der oben in den Gleichungen (31) bis (34) ausgesprochene Satz für die beiden Lösungen M_1 und M_2 der quadratischen Gleichung (28), die wir zunächst als verschieden annehmen, gilt, so folgt,

dass, wenn

$$f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2 \tag{46}$$

zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige gleichzeitige Integralgleichungen der beiden totalen Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dy}{dx} = M_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_1 \tag{47}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = M_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_2 \tag{48}$$

oder der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_2 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_2 = 0 \end{cases} \tag{49}$$

sind, die aus den beiden Gleichungen (46) *hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen der beiden partiellen Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \alpha_{21}(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M_1-\alpha_{11})(p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0, \\ \alpha_{21}(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M_2-\alpha_{11})(p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0 \end{cases} \tag{50}$$

also des gegebenen Differentialgleichungssystems

$$p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2 = 0 \tag{51}$$

sein werden, und zugleich ist unmittelbar ersichtlich, dass die aus

$$\varphi_1(f_1, f_2) = 0, \quad \varphi_2(f_1, f_2) = 0 \tag{52}$$

sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (51) *liefern werden, wenn φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten,*

da aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} M + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} P = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} M + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} P = 0 \end{aligned}$$

durch Multiplication mit $\frac{\partial \varphi}{\partial f_1}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial f_2}$ und Addition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} M + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} N + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} P = 0$$

folgt.

Wenden wir die eben gemachten Auseinandersetzungen auf das vorige Beispiel an, so wird für die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (36)

$$M_2 = z_1 + 2z_2 \tag{53}$$

nach (29) und (30)

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2z_1, \ \mu_2 = 2z_2, \\ 2z_1 N_2 + 2z_2 P_2 = 2z_1 \frac{2x - 2y(z_2 - z_1)}{z_2 - 2z_1} + 2z_2 \frac{y(5z_1 - 2z_2) - x}{z_2 - 2z_1} \end{cases} \tag{54}$$

folgen, und wählen wir

$$N_2 = \frac{2x - yz_2 + (2z_2 - z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1}, \quad P_2 = \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1}, \tag{55}$$

so wird das dem Systeme (39) entsprechende totale Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z_1 + 2z_2, & \frac{dz_1}{dx} = \frac{2x - yz_2 + (2z_2 + z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1}, \\ & \frac{dz_2}{dx} = \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1} \end{cases} \tag{56}$$

oder die der Gleichung (40) analoge lineare partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(z_1 + 2z_2) + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{2x - yz_2 + (2z_2 + z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1} \\ \qquad + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1} = 0 \end{cases} \tag{57}$$

lauten; nun sind aber

$$xy + z_1 + 2z_2 = A, \quad x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2 = B, \tag{58}$$

wie durch Verification unmittelbar folgt, gemeinsame Integralgleichungen der totalen Differentialgleichungssysteme (39) und (56) oder der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (40) und (57), und es werden somit nach dem oben bewiesenen Satze, wenn φ_1 und φ_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten, die aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi_1(xy + z_1 + 2z_2, \ x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \\ \varphi_2(xy + z_1 + 2z_2, \ x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0 \end{cases} \tag{59}$$

hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y die allgemeinen Integralfunctionen des partiellen Differentialgleichungssystems (35) sein.

Doch ist mit dem ausgesprochenen Satze nicht eine allgemeine Methode für die Zurückführung der Integration des simultanen par-

tiellen Differentialgleichungssystems (51) auf totale Differentialgleichungssysteme gegeben, da nicht immer zwei solche Systeme (47) und (48) oder das simultane partielle Differentialgleichungssystem (49) zwei gleichzeitige Integrale (46) besitzen, es werden vielmehr unter den Coefficienten der Differentialgleichungen (51) Bedingungen bestehen müssen, auf deren Entwicklung ich nunmehr eingehen will, und wobei ich es des Folgenden wegen vorziehe, auch das aus der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme Bekannte an dem vorliegenden speciellen Falle zu entwickeln.

Sollen die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(60)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_2 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_2 = 0 \end{cases}$$

eine gemeinsame Integralfunction f_1 haben, so muss dasselbe zunächst auch, wenn

$$(61)\qquad \begin{cases} \frac{M_1 N_2 - M_2 N_1}{M_1 - M_2} = K, \quad \frac{M_1 P_2 - M_2 P_1}{M_1 - M_2} = L, \quad \frac{N_1 - N_2}{M_1 - M_2} = K_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{P_1 - P_2}{M_1 - M_2} = L_1 \end{cases}$$

gesetzt wird, für die beiden Differentialgleichungen

$$(62)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \end{cases}$$

der Fall sein; da nun $f = f_1$ die linke Seite der zweiten Gleichung identisch Null macht und $f = 0$ auch der ersten genügt, so wird für $f = f_1$ auch die partielle Differentialgleichung erfüllt sein

$$(63)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) + K \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) \\ &\qquad + L \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) = 0 \end{aligned}$$

und ebenso

$$(64)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) + K_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) \\ &\qquad + L_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) = 0, \end{aligned}$$

woraus sich durch Substitution

$$(65)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial z_1}\left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + K \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1 \frac{\partial K}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial K}{\partial z_2}\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + K \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial L_1}{\partial z_2} - \frac{\partial L}{\partial y} - K_1 \frac{\partial L}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial L}{\partial z_2}\right) = 0 \end{aligned}$$

ergiebt, oder kürzer

$$R_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0. \tag{66}$$

Sollen aber die beiden partiellen Differentialgleichungen (60) oder (62) zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integrale besitzen

$$f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2, \tag{67}$$

die also dann auch der Gleichung (66) genügen müssen, so dass identisch in x, y, z_1, z_2 die beiden Beziehungen bestehen

$$R_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = 0, \quad R_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} = 0, \tag{68}$$

so muss, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

in Folge der Annahme, dass die beiden Functionen f_1 und f_2 in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängig sein sollen, nicht identisch verschwinden darf,

$$R_1 = 0, \; R_2 = 0 \tag{69}$$

sein, und wir erhalten somit *als nothwendige Bedingung dafür, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen* (60) *oder* (62) *zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integrale besitzen*

$$\frac{\partial K_1}{\partial x} + K \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1 \frac{\partial K}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} + K \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial L_1}{\partial z_2} - \frac{\partial L}{\partial y} - K_1 \frac{\partial L}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0. \tag{71}$$

Wir wollen nunmehr zeigen, *dass diese Bedingungen auch die hinreichenden sind.*

Denn seien

$$F_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad F_2(x, y, z_1, z_2) = a_2 \tag{72}$$

zwei beliebige von einander unabhängige Integrale der ersten der Gleichungen (62), so wollen wir statt x, y, z_1, z_2 vier neue Variable X, Y, Z_1, Z_2 durch die Substitutionsgleichungen einführen

$$X = \varphi(x, y, z_1, z_2), \; Y = y, \; Z_1 = F_1(x, y, z_1, z_2), \; Z_2 = F_2(x, y, z_1, z_2), \tag{73}$$

worin $\varphi(x, y, z_1, z_2)$ irgend eine Function bedeutet, die aber nicht eine Integralfunction der ersten Gleichung (62) sein darf; da sodann

$$(74)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_1} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial z_1} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z_1}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial z_2} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial z_2} + \dfrac{\partial f}{\partial Z_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial z_2} \end{cases}$$

folgt, so ergiebt sich durch Multiplication dieser Gleichungen mit $1, K, L$ und Addition, da F_1 und F_2 Integralfunctionen der ersten Gleichung (62) waren, für jede Integralfunction eben dieser Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + K\frac{\partial X}{\partial z_1} + L\frac{\partial X}{\partial z_2}\right) = 0,$$

und daher, da X keine solche Integralfunction sein sollte,

$$(75)\qquad \frac{\partial f}{\partial X} = 0,$$

welche an Stelle der ersten der partiellen Differentialgleichungen (62) tritt, während die zweite wegen

$$(76)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial Z_1}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Z_2}\frac{\partial F_2}{\partial y}$$

und der beiden letzten Gleichungen (74), mit Hülfe von (75) in

$$(77)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial Y} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1\frac{\partial F_1}{\partial z_1} + L_1\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\right)\frac{\partial f}{\partial Z_1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + K_1\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + L_1\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\right)\frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0 \end{aligned}$$

übergeht. Es fragt sich nun, ob die beiden transformirten partiellen Differentialgleichungen (75) und (77) gemeinsame Integrale haben, wie viele und welche, wenn die Grössen K, L, K_1, L_1 den vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (70) und (71) identisch Genüge leisten. Da unter dieser Annahme mit Beibehaltung der Bezeichnungen R_1 und R_2, wenn F die Integralfunctionen F_1 oder F_2 bedeutet, auch

$$(78)\qquad R_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + R_2\frac{\partial F}{\partial z_2} = 0$$

identisch erfüllt ist, so wird auch nach (63), (64), (65) der Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) + K\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) \\ &\qquad + L\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1\frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + K\frac{\partial F}{\partial z_1} + L\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) + K_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + K\frac{\partial F}{\partial z_1} + L\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) \\ &\qquad + L_1\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + K\frac{\partial F}{\partial z_1} + L\frac{\partial F}{\partial z_2}\right) \end{aligned}$$

oder, da F ein Integral der ersten der Gleichungen (62) sein sollte, auch der Gleichung

$$(79)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+K_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)+K\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+K_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)$$
$$+L\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+K_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)=0$$

identisch genügt werden; daraus folgt aber, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y}+K_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F}{\partial z_2}$$

eine Integralfunction der ersten Gleichung (62) sein muss und somit vermöge (75)

$$(80)\quad \begin{cases}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+K_1\frac{\partial F_1}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\right)=0,\\ \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}+K_1\frac{\partial F_2}{\partial z_1}+L_1\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\right)=0\end{cases}$$

ist. Es kommt somit in der Differentialgleichung (77) die Variable X gar nicht vor, und es wird *daher jede Integralfunction der Differentialgleichung* (77) *eine dem transformirten Systeme* (75) *und* (77) *also auch dem ursprünglichen Differentialgleichungssysteme* (62) *gemeinsame sein; es besitzt also das partielle Differentialgleichungssystem* (62) *stets zwei und nur zwei von einander unabhängige Integralfunctionen, welche man durch Integration der linearen partiellen Differentialgleichung* (77) *mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variabeln erhält,*

und zugleich folgt, dass, wenn

$$(81)\quad f_1(x, y, z_1, z_2)=a_1,\quad f_2(x, y, z_1, z_2)=a_2$$

zwei von einander unabhängige gemeinsame Integralgleichungen der beiden partiellen Differentialgleichungen (62) sind, *auch jede willkürliche Function* $\varphi(f_1, f_2)$ *den beiden Differentialgleichungen genügen wird.*

Sind somit die durch die Gleichungen (70) und (71) ausgedrückten Bedingungen zwischen den Coefficienten des gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungssystems (51) erfüllt, so ist die Integration dieses Systems unter der Voraussetzung ungleicher Lösungen der quadratischen Gleichung (28) auf die Integration zweier totaler Differentialgleichungssysteme zurückgeführt.

Wir wollen nun zunächst noch die Form der Bedingungen (70) und (71) etwas genauer untersuchen. Da nämlich der Gleichung (30) zufolge, weil sich aus (28) die Gleichung

$$(82)\quad M_1+M_2=\alpha_{11}+\alpha_{22}\quad\text{oder}\quad M_1-\alpha_{11}=\alpha_{22}-M_2$$

ergiebt, die beiden Beziehungen bestehen

$$(83)\quad \begin{cases}\alpha_{21}N_1-(M_2-\alpha_{22})P_1=-\alpha_{21}\beta_1+(M_2-\alpha_{22})\beta_2,\\ \alpha_{21}N_2-(M_1-\alpha_{22})P_2=-\alpha_{21}\beta_1+(M_1-\alpha_{22})\beta_2,\end{cases}$$

so folgt durch Subtraction

$$\alpha_{21}(N_1 - N_2) + (M_1 P_2 - M_2 P_1) + \alpha_{22}(P_1 - P_2) = -(M_1 - M_2)\beta_2$$

oder nach (61)

$$\alpha_{21} K_1 + L + \alpha_{22} L_1 = -\beta_2, \tag{84}$$

und da sich die Gleichungen (83) vermöge der Gleichung (28) in die Form setzen lassen

$$\begin{cases} (M_2 - \alpha_{11})N_1 - \alpha_{12} P_1 = -(M_2 - \alpha_{11})\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \\ (M_1 - \alpha_{11})N_2 - \alpha_{12} P_2 = -(M_1 - \alpha_{11})\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \end{cases} \tag{85}$$

so folgt ebenso

$$\alpha_{11}(N_1 - N_2) + M_1 N_2 - N_1 M_2 + \alpha_{12}(P_1 - P_2) = -(M_1 - M_2)\beta_1$$

oder nach (61)

$$\alpha_{11} K_1 + K + \alpha_{12} L_1 = -\beta_1, \tag{86}$$

wonach sich aus (84) und (86)

$$K = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} L + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}} L_1, \tag{87}$$

$$K_1 = -\frac{\beta_2}{\alpha_{21}} - \frac{1}{\alpha_{21}} L - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} L_1. \tag{88}$$

ergiebt, so dass, wenn wir diese Werthe von K und K_1 in die beiden Bedingungsgleichungen (70) und (71) einsetzen, wir zwei identisch zu erfüllende Differentialbeziehungen in den Grössen $L, L_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ erhalten, worin die beiden ersten vermöge der Gleichungen (61), (28) und (30) von den 6 letzteren abhängen. Da nun die Grössen N und P mit M nur durch die *eine* Gleichung

$$\alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0 \tag{89}$$

mit einander verbunden sind, so wird man P_1 und P_2 willkürlich — nur von Null verschieden — annehmen dürfen, und daher auch, weil sich aus (61)

$$P_1 = L + M_1 L_1, \quad P_2 = L + M_2 L_1 \tag{90}$$

ergiebt, und M_1 der Voraussetzung nach von M_2 verschieden ist, L und L_1 willkürlich wählen können, so dass nach getroffener Wahl und Herstellung der Werthe von K und K_1 aus den Gleichungen (87) und (88) die beiden Bedingungsgleichungen (70) und (71) in zwei durch die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ identisch zu erfüllende Beziehungen übergehen. Wäre es möglich, die beiden in L und L_1 sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen mit den beiden abhängigen Variabeln L und L_1, und den 4 unabhängigen Variabeln x, y, z_1, z_2 unabhängig von der Beschaffenheit der α und β zu integriren, so wäre die Integration eines jeden linearen partiellen Differentialgleichungssystems auf die Integration eines totalen Systems zurückführbar; aber da diese Aufgabe schon wieder die Integration eines

partiellen Differentialgleichungssystems erfordert, also die Bestimmung der L und L_1 im Allgemeinen nicht möglich ist, so muss man die Reduction auf ein System totaler Differentialgleichungen im Allgemeinen als unmöglich bezeichnen*), und sehen, durch eine passende Wahl der völlig willkürlichen Functionen L und L_1 die für die α und β sich ergebenden Bedingungen so einfach als möglich zu gestalten. Für eine willkürliche Bestimmung der L und L_1 werden sich im Allgemeinen stets zwei Bedingungsgleichungen in den α und β ergeben, die erfüllt sein müssen, damit die Integration des gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungssystems sich auf die von totalen Differentialgleichungssystemen mit den gewählten Werthen von L und L_1 zurückführen lässt, und *es wird sich nun fragen, ob wir nicht die L und L_1 unabhängig von den Werthen der α und β so bestimmen können, dass die α und β in allen diesen Fällen nur einer Bedingung unterliegen.* Man sieht aber unmittelbar, dass, wenn für L und L_1 beliebige Functionen resp. von x und y gewählt werden

$$L = \varphi(x), \quad L_1 = \varphi_1(y), \tag{91}$$

die zweite Bedingungsgleichung (71) identisch erfüllt wird und somit nur noch (70) identisch zu genügen ist; nehmen wir der Einfachheit wegen

$$L = 1, \quad L_1 = 1, \tag{92}$$

— wobei jedoch zu bemerken, dass die vorher getroffene Wahl eine allgemeinere von den α und β zu erfüllende Bedingung für die Reduction auf ein totales Differentialgleichungssytem liefern wird — *so erhalten wir als einzige durch die α und β zu erfüllende Bedingung*

$$\frac{\partial K_1}{\partial x} + K\frac{\partial K_1}{\partial z_1} + \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1\frac{dK}{\partial z_1} - \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0, \tag{93}$$

worin nach den Gleichungen (87) *und* (88)

$$\begin{cases} K = \dfrac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}}, \\ K_1 = -\dfrac{\beta_2}{\alpha_{21}} - \dfrac{1}{\alpha_{21}} - \dfrac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \end{cases} \tag{94}$$

wird. Für die getroffene Wahl von L und L_1 gehen die partiellen Differentialgleichungen (62) in

---

*) Um für ein vorgelegtes partielles lineares Differentialgleichungssystem die Integration auf ein totales Differentialgleichungssystem zurückzuführen, setzt man die Werthe für $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ in diese beiden Bedingungsgleichungen ein und sieht zu, ob diese durch eine einfache Wahl der L und L_1, deren Bestimmung nicht wieder eine Integration erfordert, identisch befriedigt werden können; sind solche Werthe von L und L_1, gefunden, so ist das Problem in der früher durchgeführten Weise lösbar.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{95}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{96}$$

über, worin K und K_1 durch die Gleichungen (94) bestimmt sind, und da nach der oben angegebenen Methode zunächst zwei von einander unabhängige Integrale der Gleichung (95) zu suchen sind, diese aber durch zwei Integralfunctionen des totalen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dz_2}{dx} = 1, \quad \frac{dz_1}{dx} = K \tag{97}$$

gegeben werden, so wird die eine dieser Integralfunctionen

$$F_2 = z_2 - x = a_2 \tag{98}$$

allen diesen Problemen gemeinsam sein, während die zweite durch

$$F_1(x, y, z_1, z_2) = a_1 \tag{99}$$

bestimmt sein mag; da ferner die Gleichung (77) für die getroffene Wahl der L und L_1 vermöge (98) und (99) in

$$\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial Z_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0 \tag{100}$$

übergeht, so wird deren Integration, wenn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \text{ durch } \omega(Y, Z_1, Z_2)$$

bezeichnet wird, indem der Ausdruck, wie oben gezeigt worden, von X unabhängig ist, auf das totale Differentialgleichungssystem führen

$$\frac{dZ_2}{dY} = 1, \quad \frac{dZ_1}{dY} = \omega(Y, Z_1, Z_2), \tag{101}$$

und somit wieder die Integralfunctionen liefern

$$Z_2 - Y = A_1, \quad \Omega(Y, Z_1, Z_2) = A_2, \tag{102}$$

von denen die erste in

$$z_2 - x - y = A_1 \tag{103}$$

übergeht und *somit ein allen jenen Problemen, für welche die Bedingungsgleichung* (93) *erfüllt ist, angehöriges gemeinsames Integral der beiden partiellen Differentialgleichungen* (49) *oder der beiden totalen Differentialgleichungssysteme* (47) *und* (48) *liefert.*

Wir untersuchen nun noch den Fall, *dass die Coefficienten α und β in dem vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystem*

$$p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0 \tag{104}$$

nur von x und y, nicht aber von z_1 und z_2 abhängen, und sehen unmittelbar, dass dann die Bedingungsgleichungen (70) und (71), wenn L und L_1 als beliebige Functionen von x und y gewählt werden, vermöge der Gleichungen (87) und (88) in

(105) $$\frac{\partial K_1}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

übergehen, so dass, wenn wiederum $L = L_1 = 1$ gewählt wird, *die einzige zu erfüllende Bedingung nach* (87) *und* (88) *durch die identische Beziehung*

(106) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta_2}{\alpha_{21}} + \frac{1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}}\right) = 0$$

oder, wenn die Differentialgleichungen (104) *linear homogen also* $\beta_1 = \beta_2 = 0$ *ist, durch*

(107) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}}\right) = 0$$

gegeben ist.

Sei z. B. das homogene lineare Differentialgleichungssystem vorgelegt

(108) $$\begin{cases} p_1 - \frac{x^2+y}{x+y^2}\, q_1 + x^2 q_2 = 0, \\ p_2 - \frac{1}{x+y^2}\, q_1 + \quad q_2 = 0, \end{cases}$$

so geht die Bedingungsgleichung (107) in

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x-y^2-x-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y-(x+y^2)\left(-\frac{x^2+y}{x+y^2} + \frac{x^2}{x+y^2}\right)\right) = 0$$

über und ist somit identisch erfüllt; da nun nach den Gleichungen (87) und (88)

$$K = x^2 + 2y, \quad K_1 = 2x + 2y^2$$

folgt, so werden die beiden partiellen Differentialgleichungen (62)

(109) $$\frac{\partial f}{\partial x} + (x^2+2y)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

(110) $$\frac{\partial f}{\partial y} + (2x^2+2y)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

zwei gemeinsame Integrale besitzen. Um diese zu ermitteln, setze man nach der oben angegebenen Methode

(111) $$\frac{dz_1}{dx} = x^2 + 2y, \quad \frac{dz_2}{dx} = 1,$$

woraus sich die beiden Integralfunctionen

(112) $$\begin{cases} F_1(x, y, z_1, z_2) = z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy = a_1, \\ F_2(x, y, z_1, z_2) = z_2 - x = a_2 \end{cases}$$

ergeben, und es geht sodann die Differentialgleichung (100) in

(113) $$\frac{\partial f}{\partial Y} + 2Y^2\frac{\partial f}{\partial Z_1} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0$$

über. Da aber diese durch das totale System integrirt wird

$$\frac{dZ_1}{dY} = 2Y^2, \quad \frac{dZ_2}{dY} = 1,$$

so ergeben sich die von einander unabhängigen Integralfunctionen

$$Z_1 - \tfrac{2}{3} Y^3 = A_1, \quad Z_2 - Y = A_2 \tag{114}$$

oder vermöge (112)

$$z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3 = A_1, \quad z_2 - x - y = A_2, \tag{115}$$

so dass die allgemeinen Integralfunctionen z_1 und z_2 als Functionen von x und y für das vorgelegte Differentialgleichungssystem (108) durch die Gleichungen gegeben sind

$$\begin{cases} \varphi_1\left(z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3,\ z_2 - x - y\right) = 0, \\ \varphi_2\left(z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3,\ z_2 - x - y\right) = 0, \end{cases} \tag{116}$$

worin φ_1 und φ_2 zwei von einander unabhängige willkürliche Functionen bedeuten.

Alle aus dem in den Gleichungen (31) bis (34) ausgesprochenen Satze gezogenen Folgerungen hatten zur Voraussetzung, dass die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung (28) von einander verschieden sind, indem sich nur dann aus der Gleichung (34) schliessen liess, dass nicht blos diese lineare Verbindung der linken Seiten des vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystems (3) durch die gefundenen Werthe z_1 und z_2 als Functionen von x und y befriedigt wurde, sondern durch dieselben auch den Gleichungen (3) selbst genügt wurde.

Mag nun jetzt für das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0, \\ p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0 \end{cases} \tag{117}$$

die quadratische Gleichung

$$(\alpha_{11} - M)(\alpha_{22} - M) - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0 \tag{118}$$

gleiche Lösungen haben, also

$$(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 - 4\alpha_{12}\alpha_{21} = 0 \tag{119}$$

und

$$M = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} \tag{120}$$

sein, so werden N und P nach der Gleichung (30) durch die Beziehung

$$\alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0 \tag{121}$$

mit einander verbunden sein, und wenn

$$f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2 \tag{122}$$

zwei beliebige in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integralgleichungen des totalen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz_1}{dx} = N, \quad \frac{dz_2}{dx} = P \tag{123}$$

oder der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M + \frac{\partial f}{\partial z_1} N + \frac{\partial f}{\partial z_2} P = 0 \tag{124}$$

sind, so werden die durch (122) bestimmten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen der partiellen Differentialgleichung

$$\alpha_{21}(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M-\alpha_{11})(p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0 \tag{125}$$

sein. Denken wir uns nun einen der Coefficienten der Differentialgleichungen (117) z. B. α_{21} unendlich wenig verändert, so dass er in α'_{21} übergehend der quadratischen Gleichung (118) verschiedene Lösungen giebt, so werden die Integralfunctionen z_1 und z_2 als Functionen von x und y, welche dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \alpha'_{21}(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M_1-\alpha_{11})(p_2+\alpha'_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0, \\ \alpha'_{21}(p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1)+(M_2-\alpha_{11})(p_2+\alpha'_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2)=0, \end{cases} \tag{126}$$

oder

$$p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta = 0, \quad p_2 = \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2 = 0 \tag{126a}$$

genügen, nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen in folgender Weise gefunden werden können: sind M_1 und M_2 die verschiedenen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(\alpha_{11} - M)(\alpha_{22} - M) - \alpha_{12}\alpha'_{21} = 0, \tag{127}$$

so denkt man sich aus den durch Einsetzen der Werthe

$$\begin{cases} K' = \dfrac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha'_{21}} + \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha'_{21}} L' + \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha'_{21}}{\alpha'_{21}} L_1', \\ K_1' = -\dfrac{\beta_2}{\alpha'_{21}} - \dfrac{1}{\alpha'_{21}} L' - \dfrac{\alpha_{22}}{\alpha'_{21}} L_1' \end{cases} \tag{128}$$

in die Bedingungsgleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_1'}{\partial x} + K' \dfrac{\partial K_1'}{\partial z_1} + L' \dfrac{\partial K_1'}{\partial z_2} - \dfrac{\partial K'}{\partial y} - K_1' \dfrac{\partial K'}{\partial z_1} - L_1' \dfrac{\partial K'}{\partial z_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L_1'}{\partial x} + K' \dfrac{\partial L_1'}{\partial z_1} + L' \dfrac{\partial L_1'}{\partial z_2} - \dfrac{\partial L'}{\partial y} - K_1' \dfrac{\partial L'}{\partial z_1} - L_1' \dfrac{\partial L'}{\partial z_2} = 0 \end{cases} \tag{129}$$

erhaltenen partiellen linearen Differentialgleichung L' und L_1' als Functionen von x, y, z_1, z_2 bestimmt — es ist die wirkliche Bestim-

mung, die, wie früher hervorgehoben worden, schon die Lösung desselben Problems für 4 unabhängige Variable erfordern würde, für das Folgende nicht nöthig — bestimme aus den gefundenen Werthen von L' und L_1' vermöge der den Gleichungen (90) analogen Beziehungen

$$P_1 = L' + M_1 L_1', \quad P_2 = L' + M_2 L_1', \tag{130}$$

sodann aus den den Gleichungen (83) entsprechenden Beziehungen

$$\begin{cases} \alpha_{21}' N_1 - (M_2 - \alpha_{22}) P_1 = -\alpha_{21}' \beta_1 + (M_2 - \alpha_{22}) \beta_2, \\ \alpha_{21}' N_2 - (M_1 - \alpha_{22}) P_2 = -\alpha_{21}' \beta_1 + (M_1 - \alpha_{22}) \beta_2 \end{cases} \tag{131}$$

die Grössen N_1 und N_2, so wird ein stets existirendes gleichzeitiges Integralsystem

$$f_1'(x, y, z_1, z_2) = a_1', \quad f_2'(x, y, z_1, z_2) = a_2' \tag{132}$$

der beiden totalen Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dy}{dx} = M_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_1, \tag{133}$$

$$\frac{dy}{dx} = M_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_2 \tag{134}$$

oder der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{135}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M_2 \frac{\partial f}{\partial y} + N_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{136}$$

die geforderten Integrale des linearen partiellen Differentialgleichungssystems (126) liefern.

Da aber die Integralfunctionen (132) auch gleichzeitige Integrale der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{137}$$

$$(M_1 - M_2) \frac{\partial f}{\partial y} + (N_1 - N_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (P_1 - P_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{138}$$

sind, so werden, wie nahe auch α_{21}' dem α_{21} rücken möge, d. h. wie wenig auch M_1 von M_2 verschieden sein mag, zwei gemeinsame Integrale — wenn solche existiren — des partiellen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{139}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{N_1 - N_2}{M_1 - M_2} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{P_1 - P_2}{M_1 - M_2} \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{140}$$

z_1 und z_2 als solche Functionen von x und y liefern, dass dieselben Integralfunctionen des Systemes (126) oder, wie durch Subtraction

dieser beiden Gleichungen von einander folgt, des Differentialgleichungssystems

$$\alpha'_{21}(M_1 - M_2)(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) = 0, \tag{140}$$

$$\alpha'_{21}(M_1 - M_2)(p_2 + \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0; \tag{141}$$

ist nun $\alpha'_{21} = \alpha_{21} + d\alpha_{21}$, also $M_2 = M_1 + dM_1$, so folgt, *dass, wenn die doppelte Lösung der quadratischen Gleichung* (118) *mit M bezeichnet wird, die aus zwei gemeinsamen Integralen — wenn solche existiren — der beiden partiellen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{142}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dN}{dM}\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{dP}{dM}\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{143}$$

hergeleiteten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen des vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystems (117) *sein werden, wenn M, N, P mit den Coefficienten dieser Differentialgleichungen durch die Beziehung verbunden waren*

$$\alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0. \tag{144}$$

Bringt man die Differentialgleichungen (142) und (143) wieder auf die Jacobi'sche Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left(N - M\frac{dN}{dM}\right)\frac{\partial f}{\partial z_1} + \left(P - M\frac{dP}{dM}\right)\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{145}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dN}{dM}\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{dP}{dM}\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{146}$$

so werden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz zweier gemeinsamer Integralfunctionen den Gleichungen (70) *und* (71) *analog lauten*

$$\begin{aligned}(147)\quad &\frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial x} + \left(N - M\frac{dN}{dM}\right)\frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_1} + \left(P - M\frac{dP}{dM}\right)\frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_2} \\ &- \frac{\partial\left(N - M\frac{dN}{dM}\right)}{\partial y} - \frac{dN}{dM}\frac{\partial\left(N - M\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_1} - \frac{dP}{dM}\frac{\partial\left(N - M\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_2} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(148)\quad &\frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial x} + \left(N - M\frac{dN}{dM}\right)\frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_1} + \left(P - M\frac{dP}{dM}\right)\frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_2} \\ &- \frac{\partial\left(P - M\frac{dP}{dM}\right)}{\partial y} - \frac{dN}{dM}\frac{\partial\left(P - M\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_1} - \frac{dP}{dM}\frac{\partial\left(P - M\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_2} = 0.\end{aligned}$$

Nun ergiebt sich aus (144)

$$\alpha_{21}\frac{dN}{dM} + \beta_2 + P + (M - \alpha_{11})\frac{dP}{dM} = 0, \tag{149}$$

und wählt man nunmehr P und $\frac{dP}{dM}$ als willkürliche Functionen der Variabeln x, y, z_1, z_2, bestimmt N und $\frac{dN}{dM}$ aus den Gleichungen (144) und (149) und setzt endlich nach Substituirung des Werthes (120) die so erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (147) und (148) ein, so erhält man zwei Bedingungsgleichungen in den Coefficienten α und β der gegebenen partiellen Differentialgleichungen, die erfüllt sein müssen, damit die aus den beiden gleichzeitigen Integralen der beiden partiellen Differentialgleichungen (145) und (146) hergeleiteten Ausdrücke für z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integrale der Gleichungen (117) liefern; andererseits sieht man wieder, wie oben, dass, wenn die α und β willkürlich gegeben sind, wofern nur die Grössen α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} der Bedingung (119) Genüge leisten, die für P und $\frac{dP}{dM}$ sich ergebenden gleichzeitigen Integrale des partiellen Differentialgleichungssystems (147), (148) verbunden mit den für N und $\frac{dN}{dM}$ aus (144) und (145) folgenden Werthen die Integration des vorgelegten partiellen Differentialgleichungssystems (117) auf die Auffindung gleichzeitiger Integrale der partiellen Differentialgleichungen (142), (143) oder gleichzeitiger Integrale der beiden totalen Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz_1}{dx} = N, \quad \frac{dz_2}{dx} = P \tag{150}$$

und

$$\frac{dz_1}{dy} = 1, \quad \frac{dz_2}{dy} = \frac{dP}{dM} \tag{151}$$

zurückführen; es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass man durch specielle Annahmen für die Werthe P und $\frac{dP}{dM}$ wieder, wie oben in dem allgemeinen Falle geschehen, einfachere Formen für die Bedingungen (147) und (148) erhalten kann.

Sei z. B. das partielle Differentialgleichungssystem vorgelegt

$$\begin{cases} p_1 + x^2 q_1 - \frac{x(x-y)^2}{4} q_2 = 0, \\ p_2 + x q_1 + xy q_2 \qquad\quad = 0, \end{cases} \tag{152}$$

so dass

$$\alpha_{11} = x^2, \ \alpha_{12} = -\frac{x(x-y)^2}{4}, \ \alpha_{21} = x, \ \alpha_{22} = xy, \ \beta_1 = 0, \ \beta_2 = 0 \tag{153}$$

ist, so wird die quadratische Gleichung (118) in M die gleichen Lösungen

$$M = \frac{x(x+y)}{2} \tag{154}$$

besitzen, und wählt man

$$P = x, \quad \frac{dP}{dM} = 0, \tag{155}$$

so wird zunächst die zweite Bedingungsgleichung (148) identisch erfüllt, und weil nach (144) und (149)

$$N = \frac{x(x-y)}{2}, \quad \frac{dN}{dM} = -1, \quad \text{also } N - M\frac{dN}{dM} = x^2 \tag{156}$$

ist, auch der Gleichung (147) identisch Genüge geleistet. Da nun die partiellen Differentialgleichungen (145) und (146) die Form annehmen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial f}{\partial z_1} + x\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{157}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \tag{158}$$

so folgen zunächst als Integrale des totalen Systems

$$\frac{dz_1}{dx} = x^2, \quad \frac{dz_2}{dx} = x$$

die Integrale

$$z_1 - \frac{x^3}{3} = \alpha, \quad z_2 - \frac{x^2}{2} = \beta, \tag{159}$$

und setzt man

$$y_2 = z_1 - \frac{x^3}{3}, \quad y_3 = z_2 - \frac{x^2}{2}, \quad y_4 = y, \tag{160}$$

so folgt aus (158)

$$\frac{\partial f}{\partial y_4} - \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0,$$

und deren Integral

$$y_2 + y_4 = A, \tag{161}$$

so dass sich aus (159), (160), (161) die beiden gleichzeitigen Integrale der beiden partiellen Differentialgleichungen (157), (158) oder der beiden entsprechenden totalen Differentialgleichungssysteme in der Form ergeben

$$z_1 - \frac{x^3}{3} + y = A, \quad z_2 - \frac{x^2}{2} = B, \tag{162}$$

und also die aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi_1\left(z_1 - \frac{x^3}{3} + y,\ z_2 - \frac{x^2}{2}\right) = 0, \\ \varphi_2\left(z_2 - \frac{x^3}{3} + y,\ z_2 - \frac{x^2}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{163}$$

worin φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y die allgemeinen Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (152) liefern; man findet unmittelbar

$$p_1 = x^2, \quad p_2 = x, \quad q_1 = -1, \quad q_2 = 0,$$

welche dem vorgelegten System identisch genügen.

Wir wollen jedoch für das Differentialgleichungssystem (152) den Bedingungsgleichungen (147) und (148) noch in anderer Weise zu genügen suchen; setzt man

$$\frac{dP}{dM} = \varphi(x), \quad P = y\,\psi(x) + \omega(x), \tag{164}$$

so liefern die Gleichungen (144) und (149) die Werthe

$$\begin{cases} N = \frac{y(x-y)}{2}\,\psi(x) + \frac{x-y}{2}\,\omega(x), \\ \frac{dN}{dM} = -\,y\,\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{x}\,\varphi(x) \end{cases} \tag{165}$$

und somit

$$N - M\,\frac{dN}{dM} = x\,y\,\psi(x) + x\,\omega(x) - \frac{x(x^2-y^2)}{4}\,\varphi(x),$$

$$P - M\,\frac{dP}{dM} = y\,\psi(x) + \omega(x) - \frac{x(x+y)}{2}\,\varphi(x),$$

so dass die Bedingungsgleichungen (147) und (148), welche identisch in x und y, da z_1 und z_2 nicht vorkommen, zu erfüllen sind, für die 3 Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\omega(x)$ die Bestimmungsgleichungen liefern

$$\varphi'(x) = \psi(x) - \frac{x}{2}\,\varphi(x),$$

$$\frac{x\,\psi'(x) - \psi(x)}{x^2} + \frac{1}{2}\,\varphi'(x) = -\,\frac{x}{2}\,\varphi(x),$$

$$\frac{x\,\omega'(x) - \omega(x)}{x^2} - \frac{x}{2}\,\varphi'(x) - \frac{1}{2}\,\varphi(x) = -\,x\,\psi(x)$$

oder

$$x\,\varphi''(x) + (x^2-1)\,\varphi'(x) + \frac{x^3}{2}\,\varphi(x) = 0, \tag{166}$$

$$\psi(x) = \varphi'(x) + \frac{x}{2}\,\varphi(x), \tag{167}$$

$$\frac{x\,\omega'(x) - \omega(x)}{x^2} = -\,\frac{x}{2}\,\varphi'(x) - \frac{x^2-1}{2}\,\varphi(x). \tag{168}$$

Unter der Voraussetzung, dass die drei Functionen diesen Gleichungen genügen, geht das Differentialgleichungssystem (142), 143) in

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \Big(x\,y\,\psi(x) + x\,\omega(x) - \frac{x(x^2-y^2)}{4}\,\varphi(x)\Big)\,\frac{\partial f}{\partial z_1} + \Big(y\,\psi(x) + \omega(x) - \frac{x(x+y)}{2}\,\varphi(x)\Big)\,\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \tag{169}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \Big(-y\,\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{2}\,\varphi(x)\Big)\,\frac{\partial f}{\partial z_1} + \varphi(x)\,\frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \tag{170}$$

über.

Integrirt man zunächst die Gleichung (170) oder das totale Differentialgleichungssystem

$$(171)\quad \frac{dz_1}{dy} = -y\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{2}\varphi(x), \quad \frac{dz_2}{dy} = \varphi(x)$$

so ergiebt sich, wenn die Integrale mit den neu einzuführenden Variabeln Z_1 und Z_2 bezeichnet werden:

$$(172)\quad \begin{cases} Z_1 = z_1 + y^2\frac{\psi(x)}{2x} + y\frac{\omega(x)}{x} - y\frac{x\varphi(x)}{2} + \frac{y^2}{4}\varphi(x), \\ Z_2 = z_2 - y\varphi(x), \\ X = x, \end{cases}$$

und durch Substitution von

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Z_1}\Big\{\frac{y^2}{2}\cdot\frac{x\psi'(x)-\psi(x)}{x^2} + y\cdot\frac{x\omega'(x)-\omega(x)}{x^2} - y\cdot\frac{x\varphi'(x)}{2} - y\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{y^2}{4}\varphi'(x)\Big\} - \frac{\partial f}{\partial Z_2}y\varphi'(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial Z_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{\partial f}{\partial Z_2}$$

in (169), wenn man bemerkt, dass vermöge der drei Bestimmungsgleichungen (166), (167), (168) in den Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ die Coefficienten von y^2 und y für alle x identisch verschwinden, die partielle Differentialgleichung

$$(173)\quad \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f_1}{\partial Z_1}\Big(X\omega(X) - \frac{X^2}{4}\varphi(X)\Big) + \frac{\partial f}{\partial Z_2}\Big(\omega(X) - \frac{X^2}{2}\varphi(X)\Big) = 0$$

oder das totale Differentialgleichungssystem

$$(174)\quad \frac{dZ_1}{dX} = X\omega(X) - \frac{X^2}{4}\varphi(X), \quad \frac{dZ_2}{dX} = \omega(X) - \frac{X^2}{2}\varphi(X),$$

dessen Integrale durch

$$(175)\quad \begin{cases} Z_1 - \int\Big(X\omega(X) - \frac{X^2}{4}\varphi(X)\Big)dX = \mathfrak{A}, \\ Z_2 - \int\Big(\omega(X) - \frac{X^2}{2}\varphi(X)\Big)dX = \mathfrak{B} \end{cases}$$

dargestellt werden, worin $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ willkürliche Constanten bedeuten. Die allgemeinen Integralfunctionen des partiellen Differentialgleichungssystems (152) gehen somit, wie aus Substitution von (172) in (175)

ersichtlich ist, aus den beiden Functionalgleichungen mit den willkürlichen Functionen φ_1 und φ_2 hervor:

$$(176)\quad \begin{cases} \varphi_1\left\{z_1+\frac{y^2}{2}\left(\frac{\varphi'(x)}{x}+\varphi(x)\right)+y\left(\frac{\omega(x)}{x}-\frac{x}{2}\varphi(x)\right)-\int\left[x\,\omega(x)-\frac{x^2}{4}\varphi(x)\right]dx,\right. \\ \qquad\qquad \left. z_2-y\varphi(x)-\int\left[\omega(x)-\frac{x^2}{2}\varphi(x)\right]dx\right\}=0, \\ \varphi_2\left\{z_1+\frac{y^2}{2}\left(\frac{\varphi'(x)}{x}+\varphi(x)\right)+y\left(\frac{\omega(x)}{x}-\frac{x}{2}\varphi(x)\right)-\int\left[x\,\omega(x)-\frac{x^2}{4}\varphi(x)\right]dx,\right. \\ \qquad\qquad \left. z_2-y\varphi(x)-\int\left[\omega(x)-\frac{x^2}{2}\varphi(x)\right]dx\right\}=0, \end{cases}$$

worin $\varphi(x)$ und $\omega(x)$ durch die Gleichungen (166) und (168) definirt sind; zum Zwecke der Verification findet man

$$p_1=-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{x\varphi''(x)+x^2\varphi'(x)-\varphi'(x)}{x^2}-y\left\{\frac{x\omega'(x)-\omega(x)}{x^2}-\frac{x\varphi'(x)+\varphi(x)}{2}\right\}$$
$$+x\,\omega(x)-\frac{x^2}{4}\varphi(x),$$
$$p_2=y\,\varphi'(x)+\omega(x)-\frac{x^2}{2}\varphi(x),$$
$$q_1=-y\cdot\frac{\varphi'(x)+x\varphi(x)}{x}-\frac{\omega(x)}{x}+\frac{x}{2}\varphi(x),$$
$$q_2=\varphi(x),$$

welche Werthe mit Benutzung der Gleichungen (166) und (168) dem partiellen Differentialgleichungssystem (152) identisch genügen. In dem vorliegenden Falle lassen sich aber die Functionen $\varphi(x)$ und $\omega(x)$ unmittelbar herstellen, da das allgemeine Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(177)\qquad x\varphi''(x)+(x^2-1)\varphi'(x)+\frac{x^3}{2}\varphi(x)=0,$$

wie man leicht erkennt, durch

$$(178)\qquad \varphi(x)=c_1e^{-\frac{1+i}{4}x^2}+c_2e^{-\frac{1-i}{4}x^2}$$

dargestellt wird, wenn c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten, und somit nach (168) $\omega(x)$ durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(179)\qquad \frac{\omega(x)}{x}=c_1\frac{1+i}{2}\int e^{-\frac{1+i}{4}x^2}dx+c_2\frac{1-i}{2}\int e^{-\frac{1-i}{4}x^2}d$$
$$-c_1\frac{i}{2}xe^{-\frac{1+i}{4}x^2}+c_2\frac{i}{2}xe^{-\frac{1-i}{4}x^2}.$$

Nachdem somit auch der Fall der gleichen Lösungen der quadratischen Gleichung (28) behandelt worden, bleibt nur noch zu bemerken übrig, dass den Gleichungen (26), ohne dass deren Determinante verschwindet, und zwar für beliebige Werthe von λ und μ genügt werden kann, wenn

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \quad M = \alpha_{11} = \alpha_{22}$$

ist, aber in diesem Fall nimmt das vorgelegte Differentialgleichungssystem die Form des Jacobi'schen Systems (21) an.

Heidelberg, den 24. December 1891.

Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung.

Von

D. J. Korteweg in Amsterdam.

§ 1.

Einleitung.

Im Folgenden werde ich eine Theorie der Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihrer Deformationen entwickeln, wobei eine Zerlegung der Singularitäten höherer Ordnung in solche erster Ordnung zu Stande kommt, die von der bekannten Cayley'schen principiell verschieden ist.

Der Grundgedanke, von dem ich ausgegangen bin, und der darin besteht, dass ich mir die durch Gleichungen mit unbestimmten Coefficienten definirten Flächen, Curven oder sonstigen geometrischen Gebilde als in stetiger Deformation begriffen vorstelle, wobei dann Singularitäten höherer Ordnung stets vermieden, oder, wenn sie auftreten, in solche erster Ordnung aufgelöst werden können, dieser Grundgedanke ist schon manchmal ausgesprochen und mehr oder weniger vollständig durchgeführt worden.*)

Auf welche Weise ich auf denselben von mathematisch-physischen Betrachtungen ausgehend, gekommen bin, zeigt sich in meiner Arbeit über Faltenpunkte**). Damals war ich mit der kleinen aber inhaltreichen Arbeit des Herrn Felix Klein „Eine neue Relation zwischen

*) Man vergleiche z. B. die „Beiträge zur Analysis situs" des Herrn Walther Dyck, Math. Annalen 32, S. 457 (1888) und 37, S. 273 (1890), wo sich in der Einleitung eine ausgebreitete Literaturangabe verwandter Untersuchungen vorfindet, von welchen besonders die von Kronecker „Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen" zu nennen sind, weil diese Theorie, wie aus den genannten „Beiträgen" hervorgeht, von grosser Bedeutung für die von uns insbesondere in § 3 betretenen Gebiete zu werden verspricht.

**) Wiener Sitzungsberichte 1889, Bd. XCVIII, S. 1155, Note (1).

den Singularitäten einer algebraischen Curve"*) nicht bekannt. Späterhin bin ich durch diese Arbeit in mancherlei Hinsicht beeinflusst worden.

Zweckmässig scheint es mir, die Sache worum es sich handelt, gleich so allgemein als möglich darzustellen. Es sei denn X ein mathematisches Gebilde, das durch s Coordinaten $x_1, x_2 \ldots x_s$ definirt werden kann. Jedes System:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \ldots\ \varphi_m = 0 \tag{1}$$

von m Gleichungen (oder Constructionsbedingungen), $m < s$, bestimmt dann eine $(s-m)$-fache Mannigfaltigkeit solcher Gebilde X. Treten in den Gleichungen (1) neben den Coordinaten noch r Parameter $p_1, p_2 \ldots p_r$ auf, dann stimmt mit jedem gegebenen Werthsysteme der Parameter eine dieser Mannigfaltigkeiten überein.

An diesen Mannigfaltigkeiten werden sich nun verschiedene Singularitäten zeigen können. Wenn eine solche Singularität q Bedingungen zwischen den Parametern $p_1, p_2 \ldots p_r$ mit sich bringt, nennen wir sie eine Singularität der q^{ten} Ausnahme-Ordnung im Systeme (1) und bezeichnen sie durch das Symbol B_q.

Beim Studium der zu einem bestimmten Systeme gehörigen Mannigfaltigkeiten, ist die Kenntniss der Singularitäten B_1 von ungleich grösserem Werthe als die der Singularitäten höherer Ordnung. Die Ursache ist darin zu suchen, dass es immer möglich ist von einer gegebenen Mannigfaltigkeit aus alle übrigen durch stetige Deformation zu erreichen, ohne dass uns dabei höhere Singularitäten als solche erster Ordnung begegnen. Weil nämlich das Auftreten einer Singularität B_q an q Bedingungen zwischen den Parametern gebunden ist, so kann man, wenn man über diese Parameter frei verfügt, die *gleichzeitige* Erfüllung dieser Bedingungen stets vermeiden und also von der gegebenen Mannigfaltigkeit aus jede andere erreichen, indem man die q Bedingungen *eine nach der andern* erfüllt. Auf diese Weise wird die Singularität B_q in q Singularitäten B_1 zerlegt.

Denkt man sich die Mannigfaltigkeiten des gegebenen Systems in Gruppen von gleichem Grade der Allgemeinheit eingetheilt, dann wird der Uebergang von der einen Gruppe zur andern stets mit dem Auftreten einer Singularität B_1 verbunden sein. Das Studium dieser B_1 und ihrer Deformationen (das heisst: ihres Verhaltens bei geringer Aenderung der Werthe der Parameter) liefert dann, so zu sagen, die Schlüssel, die von der einen Gruppe zur andern Zutritt gewähren.

Ausser den Singularitäten, welche Bedingungen erfordern, die durch die Parameter erfüllt werden müssen, giebt es auch solche, die im Allgemeinen in endlicher oder unendlicher Zahl an *jeder* Mannigfaltigkeit des gegebenen Systemes vorhanden sind. An diese Singu-

*) Mathematische Annalen 1876, Bd. X, S. 199.

laritäten kann man weitere Anforderungen stellen. Wenn sie schon durch Einführung einer einzigen neuen Bedingung in Singularitäten B_1 übergehen, so nennen wir sie Singularitäten der nullten Ausnahme-Ordnung und bezeichnen sie mit B_0. Erfolgt dagegen dieser Uebergang erst bei Einführung von $q+1$ neuen Bedingungen, dann werden sie durch B_{-q} dargestellt und Singularitäten negativer Ausnahme-Ordnung benannt.

Nehmen wir zum Beispiel für das mathematische Gebilde X den Punkt im Raume, bestimmt durch seine drei Cartesischen Coordinaten x, y, z; für das Gleichungensystem (1) eine einzige Gleichung, nämlich die allgemeine Gleichung der n^{ten} Ordnung, deren $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)$ Coefficientenverhältnisse als eben so viele Parameter aufgefasst werden, dann bilden die Flächen der n^{ten} Ordnung die Mannigfaltigkeiten dieses Systems. Umbilicalpunkte, Faltenpunkte, dreifache Tangentialebenen, vierfache Tangenten sind dann Singularitäten B_0; vierfache Tangentialebenen, Knotenpunkte und Osculationspunkte, Singularitäten B_1; dagegen gehören dann Doppeltangentialebenen und dreifache Tangenten zu den Singularitäten B_{-1}, weil man diese noch einer einzigen Bedingung, z. B. dass die Doppeltangentialebene durch einen gegebenen Punkt gelegt werde, unterwerfen kann, ohne dass sie aufhören an der allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung vorzukommen. Als Beispiel einer Singularität B_{-2} kann auf die einfache Tangentialebene, einer Singularität B_{-3} auf die gewöhnliche in einem Punkte berührende Tangente gewiesen werden.

§ 2.

Ueber effective und nicht-effective lineare Deformation.

Es ist wünschenswerth den Durchgang einer Mannigfaltigkeit durch eine Singularität positiver Ausnahme-Ordnung etwas näher zu betrachten. Wenn die Parameterwerthe $p_1', p_2' \ldots p_r'$ das Auftreten einer solchen Singularität B_q bedingen, dann können wir von einem Werthsysteme $p_1' - \partial p_1'$, $p_2' - \partial p_2' \ldots p_r' - \partial p_r'$, wo $\partial p_1' \ldots \partial p_r'$ kleine Grössen bezeichnen, zum Werthsysteme $p_1' + \partial p_1', \ldots p_r' + \partial p_r'$ in der Art übergehen, dass wir den Werth der Grösse k in $p_1' + k\partial p_1' \ldots p_r' + k\partial p_r'$ stetig und fortwährend im selben Sinne ändern. Jede nach einem solchen Schema verlaufende Deformation nennen wir eine *lineare*. Wenn dabei, so wie hier für $k=0$, Durchgang durch eine Singularität eintritt, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Nehmen wir an dass es sich um eine Singularität B_1 handelt und dass

$$\psi(p_1, p_2 \ldots p_r) = 0 \tag{2}$$

die, für das Auftreten der Singularität nothwendige Bedingung darstellt, dann können die kleinen Grössen $\partial p_1' \ldots \partial p_r'$ die Gleichung:

$$\frac{\delta \psi}{\delta p_1'} \delta p_1' + \cdots + \frac{\delta \psi}{\delta p_r'} \delta p_r' = 0 \tag{3}$$

nicht oder *wohl* erfüllen.

Im *ersteren* Fall wird während der Deformation die Function ψ ihr Zeichen wechseln, im *zweiten* Fall im Allgemeinen nicht. Um die Bedeutung dieses Zeichenwechsels näher zu beleuchten, denken wir uns die Mannigfaltigkeiten des Systems in Gruppen eingetheilt, wobei dann das Zeichen der Function ψ als eins der unterscheidenden Merkmale auftreten möge. Im *ersteren* Fall findet dann immer Uebergang in eine andere Gruppe statt. Eine Scheidewand wird so zu sagen durchbrochen*). Im *zweiten* Fall wird die Scheidewand im Allgemeinen nur gestreift, und Uebergang in eine andere Gruppe findet nur ausnahmsweise statt. Jeden Durchgang, wobei Zeichenwechsel von ψ eintritt, nennen wir *effectiv*, sonst *nicht effectiv*.

Nicht so einfach lässt sich diese Unterscheidung durchführen, wenn es Singularitäten B_q $(q > 1)$ gilt. Sie wird dann abhängig von der Art und Weise wie man die Singularität B_q in Singularitäten B_1 zerlegen will. Dass dieses nämlich auf verschiedene Weise geschehen kann, zeigt sich sofort, wenn man bedenkt, dass die das Auftreten der Singularität B_q bedingenden Gleichungen:

$$\psi_1 = 0;\ \psi_2 = 0;\ \ldots\ \psi_q = 0 \tag{4}$$

durch jedes äquivalente Gleichungensystem ersetzt werden können. Ausserdem giebt es, wie sich später ergeben wird, noch andere Zerlegungen, die nicht durch ein solches Gleichungensystem dargestellt werden können. Nehmen wir aber für den Augenblick an, dass ein bestimmtes Gleichungensystem (4) angewiesen und dass keine der mit (3) übereinstimmenden Bedingungen erfüllt ist, dann ist der Durchgang effectiv in Bezug auf jede durch die einzelnen Gleichungen (4) bestimmte Singularität B_1, das heisst: sind die Mannigfaltigkeiten derart in Gruppen eingetheilt, dass die Zeichen der Functionen $\psi_1, \ldots \psi_q$ unter den unterscheidenden Merkmalen auftreten, dann werden während der linearen Deformation q Scheidewände durchbrochen.**) Wenn dagegen einige dieser Bedingungen erfüllt sind, dann werden im Allgemeinen eben so viele Scheidewände nur gestreift und der Durch-

*) Man stelle sich hier und noch manchmal im Folgenden einen mehrdimensionalen Raum vor, wo jede einzelne Mannigfaltigkeit durch einen Punkt abgebildet wird.

**) Bei der hier nothwendigen mehrdimensionalen Vorstellung stossen diese q Scheidewände alle in dem Punkte zusammen, wodurch diejenige Mannigfaltigkeit abgebildet wird, welche die Singularität B_q besitzt.

gang ist in Bezug auf die betreffenden Singularitäten B_1 nicht effectiv.

Ganz allgemein nennen wir einen Durchgang durch eine Singularität B_q in Bezug auf gewisse Erscheinungen effectiv, wenn diese Erscheinungen derart eintreten, wie das im Allgemeinen bei willkürlicher Wahl der Grössen $\partial p_1'$, $\partial p_2'$ ... $\partial p_s'$ der Fall ist.

Im Folgenden wird, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich gesagt wird, nur von effectiven, linearen Durchgängen die Rede sein.

§ 3.

Ueber Singularitäten B_1 die als vielfache B_0 betrachtet werden können.

Wir denken uns die Mannigfaltigkeiten eines gegebenen Systems je nach der Anzahl reeller Singularitäten B_0 einer gewissen Art in Gruppen eingetheilt (z. B. die Curven n^{ter} Ordnung je nach der Anzahl reeller Inflexionspunkte). Deutlich ist es dann, dass Uebergang von der einen Gruppe zur andern nur stattfinden kann, wenn zwei oder mehrere Singularitäten B_0 zusammentreffen, weil nämlich die Berechnung der Singularitäten B_0 einer gegebenen Mannigfaltigkeit immer auf die Lösung einer Gleichung zurückzuführen ist, deren reelle Wurzeln mit reellen Singularitäten B_0 übereinstimmen, und bekanntermassen Uebergang der Wurzeln vom Reellen zum Imaginären nur vorkommt, nachdem zwei oder mehrere einander gleich geworden sind. Im Augenblicke aber, wo diese Gleichheit stattfindet, zeigt die Mannigfaltigkeit eine Singularität B_1, die sich bei Deformation in zwei oder mehrere Singularitäten B_0 spaltet. Symbolisch wollen wir diesen Umstand durch $B_1 \equiv (m)\, B_0$ andeuten.

Wenn also eine Aenderung in der Zahl der reellen B_0 immer durch das Auftreten einer $B_1 \equiv (m)\, B_0$ vorbereitet wird, so ist doch umgekehrt das Auftreten einer $B_1 \equiv (m)\, B_0$ keineswegs immer von einer solchen Aenderung begleitet. In Wirklichkeit verhält sich die Sache so: zu jeder bestimmten Singularität B_0 gehören meistens mehrere, ganz verschieden geartete $B_1 \equiv (m)\, B_0$, einige derselben bewirken eine Aenderung, andere nicht.

Unseres Erachtens ist es wünschenswerth das Studium der zu einem bestimmten Mannigfaltigkeitssysteme gehörigen Singularitäten B_0 mit der systematischen Untersuchung ihrer $B_1 \equiv (m)\, B_0$ Hand in Hand gehen zu lassen. In unserer Abhandlung*) „Ueber die Faltenpunkte der algebraischen Flächen", haben wir diesen Weg eingeschlagen, und auch bei Gelegenheit unserer Untersuchung der

*) „Ueber Faltenpunkte". Wien. Ber. Bd. 98 (1889) oder Archives Neerlandaises T. 24, p. 57

Falten*) (Connodalcurven) dieser Flächen haben wir systematisch diejenigen B_1 betrachtet, die auf Anzahl und Natur der Falten einer sich stetig deformirenden Fläche Einfluss ausüben könnten.

Wir lassen hier einige Beispiele dieser Behandlungsweise folgen. Die vier ersten $a - d$ sind schon in der oben citirten Abhandlung des Herrn F. Klein angegeben. Es schien uns wünschenswerth, zum bessern Verständnisse der nachfolgenden Betrachtungen auch diese hier, etwas anders geordnet, vorzuführen:

a) *Wendepunkte der algebraischen Curven n^{ter} Ordnung.* Es giebt *eine* $B_1 \equiv (2)\, B_0$ der *Doppelwendepunkt* mit vierpunktig berührender Tangente. Beim Durchgang Aenderung der Anzahl reeller B_0 um zwei. Weiter *eine* $B_1 \equiv (6)\, B_0$, der *Doppelpunkt*, isolirt oder mit reellen Zweigen; im ersteren Fall sind vor wie nach dem Durchgange die sechs B_0 imaginär, im zweiten Fall vor und nach zwei reell, vier imaginär.

Bemerkung. Das angeführte ist nur dann richtig, wenn $n > 3$. Für $n = 2$ ist der Wendepunkt keine B_0, sondern eine B_1, die nur bei Degeneration (dann in unendlicher Anzahl) auftritt. Für $n = 3$ ist der Doppelwendepunkt eine B_2, weil er Degeneration der Curve mit sich bringt. Er kann also vermieden werden. Weil nun die einzig übrig bleibende $B_1 \equiv (m)\, B_0$, der Doppelpunkt, keine Aenderung in der Anzahl der reellen Wendepunkte verursacht, so muss diese Zahl für alle Curven dritter Ordnung dieselbe sein. Es ist dieses wohl einer der einfachsten Beweise für diesen bekannten Satz.

b. *Doppeltangenten dieser Curven.* Eine $B_1 \equiv (3)\, B_0$, die *dreifache Tangente.* Beim Durchgang keine Aenderung der Anzahl reeller B_0. Ausserdem noch beim Auftreten eines *Doppelpunktes* eine B_1, die als eine $\big(n(n-1) - 6\big)$-fache (2) B_0 aufzufassen ist. Jede der vom Doppelpunkt aus an die Curve gezogenen Tangenten ist nämlich eine (2) B_0, die, wenn reell, beim Durchgang in der einen Richtung zum Auftreten zweier reellen, in der anderen Richtung zweier imaginären Doppeltangenten Veranlassung giebt.

c. *Reelle Berührungspunkte reeller Doppeltangenten.* Ausser den unter b. erörterten Singularitäten, deren Einfluss auf die Anzahl reeller B_0 leicht ersichtlich ist, giebt es noch eine $B_1 \equiv (2)\, B_0$, welche darin besteht, dass die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenfallen, und von reell imaginär werden (oder umgekehrt), indem die Doppeltangente in eine sogenannte isolirte übergeht. Diese letztere B_1 ist, weil die Tangente vierpunktig berührt, identisch mit dem unter a. angeführten *Doppelwendepunkt.*

*) „La theorie générale des plis", Archiv. Neerl. T. 24, p. 295—310 (1890). Ueber die Bedeutung der Knotenpunkte in dieser Theorie, vergleiche: Versl. en Meded. der Ned. Kon. Ac. Deel VIII, Sitzung vom 28. Febr. 1891.

d. *Imaginäre Berührungspunkte reeller Doppeltangenten.* Für diese B_0 giebt es nur eine einzige $B_1 \equiv (m) B_0$, nämlich, die unter c. beschriebene $B_0 \equiv 2(B_0)$, die mit dem Doppelwendepunkte identisch ist.

e. *Aus einem festen Punkte an die Curven n^{ter} Ordnung gezogene Tangenten.* Es giebt *vier* verschiedene $B_1 \equiv (2) B_0$, die respect. entstehen 1) wenn die Curve selbst, 2) wenn eine ihrer Wendepunktstangenten durch den gegebenen Punkt geht, 3) wenn die Curve einen Doppelpunkt enthält, 4) wenn eine der vom gegebenen Punkte ausgehenden Tangenten die Curve zweimal berührt. Die drei erstgenannten B_1 ändern die Anzahl der reellen B_0 um zwei, die vierte lässt sie ungeändert.

Bemerkung. Man kann auch umgekehrt die Curve als fest, den Punkt als beweglich betrachten. Es treten dann dieselben B_1 mit Ausnahme der dritten auf und daraus ergiebt sich dann, dass die Curve selbst nebst ihren Wendepunktstangenten die Ebene derartig in Fächer abtheilen, dass beim Uebergang von einem Fach zum andern die Anzahl der reellen B_0 sich jedesmal um zwei ändert. Denkt man sich dann aber die Curve wieder in stetiger Deformation begriffen, dann kann die Frage gestellt werden, bei welchen B_1 die Anzahl dieser Fächer, oder auch die zu jedem Fache gehörige Zahl der reellen Tangenten, eine Aenderung erfährt. Solche B_1 treten auf 1) wenn die Curve einen Doppelpunkt, 2) wenn sie einen Doppelwendepunkt erhält, 3) wenn eine Wendepunktstangente die Curve zum zweiten Male berührt, 4) wenn der Schnittpunkt zweier Wendepunktstangenten die Curve erreicht, 5) wenn drei Wendepunktstangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Im Systeme der Curven dritter Ordnung fallen diese letzteren B_1 mit Ausnahme der erstgenannten, alle fort. Weil man aber von jeder Curve dritter Ordnung zu jeder andern übergehen kann ohne andere Doppelpunkte als einen einzigen isolirten Punkt zu überschreiten, so können in diesem Systeme nur zwei Fälle vorkommen. Besitzt die Curve *einen paaren und einen unpaaren Zug*, dann sind acht Fächer vorhanden. Eines dieser Fächer wird durch den paaren Zug begrenzt, die Anzahl der reellen Tangenten ist hier Null. Durch Ueberschreitung der Curve gelangt man in ein durch drei Wendepunkttangenten begrenztes Fach mit Anzahl 2; überschreitet man diese, dann erreicht man die drei Fächer mit Anzahl 4. Von diesen letzteren aus können schliesslich durch nochmalige Ueberschreitung einer Wendepunktstangente oder durch Ueberschreitung der Curve drei Fächer mit Anzahl 6 erreicht werden. *Fehlt der paare Curvenzug*, dann fällt das erste Fach fort und in jedem der übrigbleibenden wird die Anzahl um zwei kleiner.

f. *Faltenpunkte der algebraischen Flächen n^{ter} Ordnung.* Den Punkten einer Fläche, wo die beiden Connoden (Berührungspunkte) einer Doppeltangentialebene zusammenfallen, haben wir in unserer oben citirten Abhandlung den Namen Faltenpunkte beigelegt. Sie werden in zwei Hauptarten eingetheilt je nachdem die Connodalcurve auf dem elliptisch oder auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche liegt. In § 26 dieser Abhandlung werden die vier verschiedenen $B_1 \equiv (m)B_0$ und ihr Einfluss auf die Anzahl der reellen B_0 beschrieben. Es giebt *zwei* verschiedene $B_1 \equiv (2)B_0$: der *homogene* und der *heterogene Doppelfaltenpunkt.* Beide ändern die Anzahl reeller B_0 um zwei. Weiter eine $B_1 \equiv (3)B_0$, der *Osculationspunkt**), der diese Zahl unverändert lässt. Schliesslich ist der *Knotenpunkt* eine $B_1 \equiv (24)B_0$. Die Wirkung dieses letztgenannten Punktes kann folgendermassen umschrieben werden: Ist der Knotenpunkt ein isolirter Punkt, dann sind und dann bleiben die 24 B_0 imaginär. Stossen hingegen im Knotenpunkte zwei Flächentheile zusammen, dann ist die Zahl der bei der Deformation auftretenden reellen B_0 gleich der doppelten Zahl der bei einer gewissen abgeleiteten Fläche dritter Ordnung durch den Knotenpunkt gehenden reellen Geraden. Diese Fläche dritter Ordnung erhält man, wenn man in die Gleichung der gegebenen Fläche mit dem Knotenpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten alle Glieder vierter und höherer Ordnung fortlässt. Diese Faltenpunkte werden paarweise entweder bei der Trennung reell, bei der Verbindung imaginär und sind dann erster Art; oder sie werden reell bei Verbindung, imaginär bei Trennung und sind dann zweiter Art.

Bemerkung. Im Systeme der Flächen *dritter* Ordnung fallen die Doppelfaltenpunkte fort, weil sie nur bei den vierfachen Geraden, die zwei Knotenpunkte verbinden, auftreten, und also nicht mehr zu den B_1 gehören. Bei Ueberschreitung eines Knotenpunktes können nur bei der Verbindung reelle Faltenpunkte entstehen. Bekanntlich hat man bei den Flächen dritter Ordnung, wo auf jeder der 27 Geraden zwei Faltenpunkte liegen, diesen Punkten den weniger geeigneten Namen „asymptotische Punkte" gegeben.

g. *Dreifache Tangentialebenen der algebraischen Flächen n^{ter} Ordnung.* Es giebt zwei verschiedene $B_1 \equiv (2)B_0$, welche beide die Anzahl der reellen B_0 um zwei verändern. Erstere entsteht, wenn eine der Connoden (Berührungspunkte) die Spinodalcurve erreicht, die zweite, wenn die drei Connoden in einer Geraden zu liegen kommen. Beide diese B_1 sind in meiner oben citirten Abhandlung: *Théorie générale des plis*, § 17 und § 18 ausführlich beschrieben. Daneben

*) Osculationspunkte einer Fläche nennen wir die Punkte, wo der Tangentialdurchschnitt im Berührungspunkt einen dreifachen Punkt zeigt.

giebt es eine $B_1 \equiv (4)B_0$, die *vierfache Tangentialebene*, welche diese Anzahl nicht verändert. Schliesslich bilden noch, beim Durchgang durch einen *Knotenpunkt*, die von diesem Punkte aus an die Fläche geführten *Doppeltangentialebenen*, eben so viele $(2)B_0$, bei welchen Uebergang vom reellen zum imaginären stattfindet.

Bemerkung. Es ist unschwer einzusehen, dass bei den Flächen dritter Ordnung die drei erstgenannten B_1 alle zum Auftreten von Doppelgeraden, also auch eines Knotenpunktes, Veranlassung geben.

Bei diesen Flächen findet also Aenderung in der Anzahl der reellen dreifachen Tangentialebenen nur beim Durchgang durch einen Knotenpunkt statt. Innerhalb jeder der fünf Hauptarten dieser Flächen ist also, weil die Flächen ein und derselben Hauptart ohne Durchgang durch einen Knotenpunkt in einander übergehen können*), diese Anzahl constant.

h. *Reelle Berührungspunkte reeller dreifacher Tangentialebenen.* Nebst den im vorigen Beispiel beschriebenen B_1, giebt es noch eine $B_1 \equiv (2)B_0$, welche entsteht, wenn zwei Connoden der dreifachen Tangentialebene zu einem Faltenpunkte zusammenfallen. Auch diese Singularität ist ausführlich beschrieben in meiner „Theorie des plis". Sie verändert die Anzahl reeller B_0 um zwei.

i. *Imaginäre Berührungspunkte reeller dreifacher Tangentialebenen.* Im Gegensatze zu dem unter d angeführten analogen Beispiele in der Ebene beschränken sich hier die $B_1 \equiv (m)B_0$ nicht auf die *eine* unter h angegebene Singularität, sondern auch die unter g erörterten Singularitäten, mit Ausnahme der zweiten, die zu einer höhern Annahme-Ordnung übergeht, bleiben hier bestehen.

j. *Geraden einer Fläche dritter Ordnung.* Die einzige B_1 ist mit dem Auftreten eines Knotenpunktes verbunden. Sie ist eine sechsfache $(2)B_0$. Bekanntlich spalten sich die reellen Doppelgeraden des Knotenpunktes bei Verbindung in reelle, bei Trennung in imaginäre Geraden.

Die hier angeführten Beispiele**), die sich selbstverständlich unbeschränkt vermehren lassen, wenn andere Mannigfaltigkeitssysteme z. B. Raumcurven, Flächen gegebener Ordnung *und* Classe, Regelflächen, u. s. w. herbeigezogen werden, beziehen sich alle auf projectivische Singularitäten. Bei nicht projectivischen, z. B. Umbilicalpunkten der Flächen, Apsiden der Curven, kann auch die Lage in Bezug auf die unendliche Ebene oder auf die Kreispunkte zum Auftreten

*) F. Klein, Ueber Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. Bd. VI, § 6.

**) Schliesslich sei noch auf Walther Dyck's Untersuchungen über die Charakteristik ein-, zwei und mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten in den oben citirten Beiträgen hingewiesen. Die B_1 wo die Charakteristik sich ändert, nennt er sehr glücklich die *Sprungstellen* der Charakteristik.

gewisser $B_1 \equiv (m) B_0$ Veranlassung geben, wie z. B. die Apsiden der Curven wenn sie die unendliche Gerade erreichen.

Von grosser Bedeutung wird es immer sein, wenn es sich zeigen sollte, dass zwei verschiedene B_0 alle ihre Singularitäten $B_1 \equiv (m) B_0$ gemeinsam haben, oder doch wenigstens diejenigen, die eine Aenderung der Anzahl der reellen B_0 bewirken, also die eigentlichen Sprungstellen dieser Anzahl. Dann kann es möglicherweise gelingen, Beziehungen zwischen den Anzahlen der reellen B_0 beiderlei Art aufzustellen, die ganz allgemeingültig bleiben, weil sie bei Ueberschreitung der verschiedenen B_1 erhalten bleiben.*) Ein einziger Fall dieser Art ist von F. Klein in seiner oben citirten Abhandlung „Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve" angegeben. Vergleicht man nämlich die unter a und d erörterten B_0, dann sieht man, dass die reellen Wendepunkte der Curven n^{ter} Ordnung und die imaginären Berührungspunkte ihrer reellen Doppeltangenten jede nur eine einzige $B_1 \equiv (m) B_0$ besitzen, welche Aenderung in ihrer Anzahl verursacht, und dass diese B_1 beiden gemeinsam ist. Deformirt man nun diese B_1, dann zeigt sich, dass die *Summe* der beiden Anzahlen niemals Aenderung erleidet.

Der grosse Reichthum an Singularitäten der Flächen n^{ter} Ordnung schien mir anfänglich auf diesem Gebiete eine reiche Ernte zu versprechen. Diese Erwartung wurde nicht erfüllt und die Ursache davon ist mir deutlich geworden. Umbilicalpunkte, Fleflecnodalpunkte, dreifache Tangentialflächen, Faltenpunkte, Schnittpunkte der Connodalcurve mit Spinodal- und Flecnodulcurve, kurz, alle von mir untersuchten Singularitäten B_0 der algebraischen Flächen, besitzen neben den Osculations- und Knotenpunkten, die fast bei allen als $B_1 \equiv (m) B_0$ auftreten, ihre eigenen Doppelsingularitäten $B_1 \equiv (2) B_0$ und sie gewinnen und verlieren ihre Realität unabhängig von einander bei Ueberschreitung dieser Doppelsingularitäten. Nur wenn durch Beschränkung der Ordnungszahl n, diese Doppelsingularitäten in Wegfall kommen, sind vielleicht noch mehrere Beziehungen aufzufinden, analog mit der Beziehung $f - j = 3$**), die ich in meiner Abhandlung „Ueber Faltenpunkte" zwischen den Anzahlen f und j der reellen Faltenpunkte und der reellen Geraden der Flächen *dritter* Ordnung nachgewiesen

*) Auch wenn es gelingen sollte *mehrere* verschiedene B_0 so zu wählen, dass jede $B_1 \equiv (m) B_0$, welche die Anzahlen der reellen B_0 verändert, sich wenigstens auf *zwei* verschiedene B_0 bezöge, so wäre es möglich solche Beziehungen aufzufinden.

**) Vergleiche oben die Beispiele f, *Bemerkung* und j. Für Flächen dritter Ordnung ist der Doppelpunkt für beide B_0 die einzige $B_1 \equiv (m) B_0$, die Aenderung der Anzahl reeller B_0 bewirken kann, und bei näherer Betrachtung sieht man sofort, dass dabei $f - j$ constant bleiben muss.

habe. Kaum lässt sich erwarten, dass es möglich sein wird, wenigstens bei algebraischen Flächen, Relationen aufzufinden, die sich der von Klein abgeleiteten, in ihrer schönen Allgemeinheit zur Seite stellen lassen.

§ 4.

Ueber die Zerlegung der Singularitäten $B_q (q > 1)$.

Ohne eine einigermassen vollständige Theorie dieser Zerlegung geben zu wollen, beabsichtigen wir in diesem Theile unserer Arbeit das in § 1 und 2 über diesen Gegenstand gesagte durch einige Beispiele etwas näher zu beleuchten. Voran gehe die Bemerkung, dass der algebraische Weg um eine Zerlegung zu erreichen, welcher darin bestände, dass, nach Aufstellung der Gleichungen (4) § 2, diese so umgeformt würden, dass jede für sich eine einfache Bedeutung erhielte, wohl immer viele Schwierigkeiten bieten wird. In einigen Fällen aber ist es möglich, das Resultat geometrisch vorherzusagen.

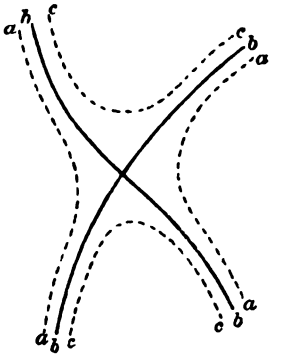


Fig. 1.

So z. B. beim *Flecnodalpunkt* der ebenen Curven n^{ter} Ordnung. Ein solcher Punkt (ein Doppelpunkt, wo eine der Tangenten dreipunktig berührt) ist eine B_2. Die Betrachtung der bei linearen Deformationen auftretenden Curvengestalten a, b, c der Fig. 1, zeigt hier sofort, dass, weil zwei Wendepunkte verloren gehen, der Durchgang durch diese Singularität sich in den beiden Durchgängen durch einen Doppelpunkt und durch einen Doppelwendepunkt zerlegen lässt, und die algebraische Analyse der Gleichungen (4) würde ohne Zweifel zu demselben Resultate führen.

Schon etwas anders verhält sich die Sache beim *Fleflecnodalpunkte*,

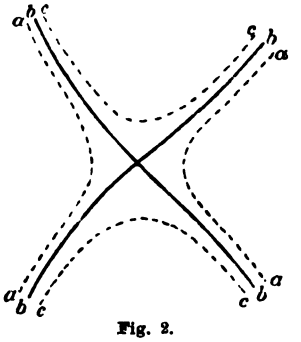


Fig. 2.

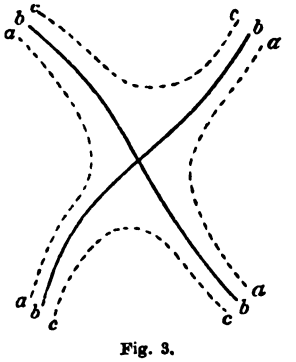


Fig. 3.

beide Zweige des Doppelpunktes je einen Wendepunkt besitzen.

Den Durchgang durch diese B_3 kann man, in Uebereinstimmung mit dem Umstande dass vier reelle Wendepunkte verloren gehen können (Fig. 2), dass aber auch die Anzahl reeller Wendepunkte unverändert bleiben kann (Fig. 3) in *zwei* Durchgänge durch Doppelwendepunkte und *einen* Durchgang durch einen Doppelpunkt zerlegen. Diese geometrische Zerlegung lässt sich aber nicht ohne weiteres durch ein Gleichungensystem (4) darstellen.

§ 5.

Zerlegung der Spitze und des biplanaren Knotens.

Wichtiger scheint mir die nachfolgende Zerlegung der *Spitze*. Wir werden nämlich zeigen, dass der lineare Durchgang durch eine Spitze aus zwei Durchgängen durch Doppelpunkte besteht, die aber beide zugleich vermieden werden können.

Für die Gleichung einer Curve in der Nähe einer Spitze können wir schreiben:

$$c_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + \cdots = 0. \tag{5}$$

Betrachten wir also die lineare Deformation (vergl. § 2):

$$F \equiv \alpha_1 + k\alpha_1' + (\beta_1 + k\beta_1')x + (\beta_2 + k\beta_2')y + (\gamma_1 + k\gamma_1')x^2 + (\gamma_2 + k\gamma_2')xy + c_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + \cdots = 0, \tag{6}$$

wo die griechischen Buchstaben, wie immer weiter unten, kleine Grössen vorstellen, dann ist es deutlich, dass während dieser Deformation, im Augenblicke wo $k = 0$, desto näher an der Curve mit Spitze vorbeigestreift wird*), je kleiner α_1, β_1, β_2, γ_1 und γ_2.

Zur Bestimmung der bei der Deformation überschrittenen Doppelpunkte dienen die Gleichungen:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 0; \quad \frac{\delta F}{\delta y} = 0, \quad F = 0. \tag{7}$$

Wenn wir in diesen Gleichungen, weil uns das Grössenverhältniss der kleinen Grössen x, y und der durch die griechischen Buchstaben bezeichneten Grössen jetzt noch unbekannt ist, nur solche Glieder ver-

---

*) Man denke hier wieder an den früher in einer Note zu § 2 angedeuteten mehrdimensionalen Raum. Weil die Deformation durch Aenderung der Grösse k um eine Constante nicht wesentlich beeinflusst wird, so ist es keine Beschränkung, wenn wir annehmen, dass man sich für $k = 0$ so dicht in der Nähe einer Curve mit Spitze befindet, als es die gegebene Deformation erlaubt. Sehr kleine Werthe von α_1, β_1, β_2, γ_1, γ_2 bedeuten dann, dass man hart an einer Curve mit Spitze vorbeistreift, und umgekehrt, *wenn* dies der Fall ist, werden, wenigstens bei geeigneter Stellung der Coordinatenaxen, alle die Grössen α_1, β_1, β_2, γ_1, γ_2 sehr kleine Werthe bekommen.

nachlässigen, die sich gegen Glieder, die wir berücksichtigen, als unzweifelhaft von höherer Ordnung nachweisen lassen, dann erhalten wir:

$$\beta_1 + k\beta_1' + 3d_1x^2 + 2d_2xy + d_3y^2 = 0, \tag{8}$$

$$\beta_2 + k\beta_2' + 2c_3y + d_2x^2 = 0, \tag{9}$$

$$\alpha + k\alpha_1' + c_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y = 0. \tag{10}$$

Durch Substitution von y aus (9) in (8) und (10) erhalten wir aber:

$$\beta_1 + k\beta_1' + 3d_1x^2 = 0, \tag{11}$$

$$\alpha_1 + k\alpha_1' + d_1x^3 = 0 \tag{12}$$

und können daraus schliessen, dass:

$$k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1'} + \varkappa, \tag{13}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1}{3d_1\alpha_1'}} + \xi. \tag{14}$$

Ein angenäherter Werth für y liesse sich aus (9) berechnen, und mittelst (6) könnten dann die zwei, mit den beiden Werthen für x correspondirenden, Werthe für $\varkappa$ berechnet werden.

Wenn nun:

$$\frac{\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1}{3d_1\alpha_1'} > 0, \tag{15}$$

dann zerlegt sich der Durchgang den wir betrachten, und der hart an einer Curve mit Spitze vorbeistreift, in zwei Durchgänge durch gewöhnliche Doppelpunkte, und weil weiter in erster Annäherung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 24d_1c_3x, \tag{16}$$

so ist der eine dieser Doppelpunkte ein isolirter Punkt, der andere ein Doppelpunkt mit reellen Zweigen.

Wenn hingegen:

$$\frac{\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1}{3d_1\alpha_1'} < 0, \tag{17}$$

dann werden diese beiden Durchgänge imaginär, d. h.: sie finden nicht statt, denn während der linearen Deformation erhält k nur reelle Werthe.

Nehmen wir α_1', β_1', β_2', γ_1', γ_2' als gegeben an, dann ist es deutlich, dass wir durch geeignete Wahl der Grössen α_1, β_1, β_2, γ_1, γ_2 zwei lineare Deformationen erhalten können, die so dicht, wie wir es wollen, neben einander herlaufen, wovon aber die eine durch reelle Doppelpunkte führt, die andere nicht.

Weil diese beiden Deformationen dann sehr hart an einer Curve mit Spitze vorbeiführen, ist es erlaubt α_1, β_1, β_2, γ_1, γ_2 als kleine Grössen auch in Hinsicht auf α_1', β_1', β_2', γ_1', γ_2' zu betrachten. Dann

muss es aber im Allgemeinen möglich sein, vom Anfangspunkte der einen Deformation zum Anfangspunkte der anderen auf continuirlichem Wege überzugehen, ohne dass ein Doppelpunkt auftritt. Betrachten wir z. B. die Anfangspunkte als durch $k = +1$ charakterisirt und erhalten wir k constant, dann wird während der Aenderung der Werthe α_1, β_1, β_2, γ_1, γ_2 die zum Auftreten eines Doppelpunktes nothwendige Bedingung (13) niemals erfüllt, weil $\frac{\alpha_1}{\alpha_1'}$ immer klein bleibt.

Dasselbe gilt von den Endpunkten, wo $k = -1$. Wir können also den Satz aussprechen: *Es ist im allgemeinen möglich vom Anfangspunkte einer linearen Deformation in der Nähe einer Curve mit Spitze zum Endpunkte continuirlich überzugehen ohne Durchgang durch Doppelpunkte.*

Um die Bedeutung dieses Satzes näher zu beleuchten, denken wir uns die Curven n^{ter} Ordnung dergestalt in Gruppen eingetheilt, dass die Curven ein und derselben Gruppe ohne Ueberschreitung eines Doppelpunktes in einander umgeformt werden können. Aus dem oben bewiesenen Satze geht dann hervor, dass von einer gegebenen Curve mit Spitze aus durch geringe Deformation nur zwei dieser Gruppen erreicht werden können.

Wählt man nämlich eine lineare Deformation mit reellen Doppelpunkten, die an der Spitze vorbeistreift, dann gehören End- und Anfangscurve zur selben Gruppe. Nur die zwischen den beiden Durchgängen durch Doppelpunkte sich zeigenden Curven gehören nothwendig einer andern Gruppe an. Sie besitzen nämlich einen geschlossenen Zweig mehr, der bei der Ueberschreitung des einen Doppelpunktes entstehend, bei der des andern wieder verloren geht.

Bemerkenswerth ist es, dass die acht Wendepunkte einer Spitze eben genügen, um diese Ueberschreitungen zu ermöglichen. Sechs Wendepunkte, die imaginär bleiben, treffen im isolirten Punkte zusammen, vier dieser sechs vereinigen sich im andern Doppelpunkte mit zwei stets reell bleibenden.

Auch sei noch darauf hingewiesen, dass es ausser der Spitze keine anderen zweifachen Doppelpunkte giebt. Die lineare Deformation in der Nähe eines Doppelpunktes:

$$d_1 x^2 + d_2 xy + d_3 y^2 + \cdots = 0$$

kann nämlich, wie man auf algebraischem Wege leicht beweist, nur dann die Ueberschreitung zweier Doppelpunkte veranlassen, wenn $4 d_1 d_3 = d_2^2$.

Nahezu analog mit der Zerlegung der Spitze im Systeme der Curven in der Ebene, verhält sich die des *biplanaren Knotenpunktes* im System der Flächen im Raume, mit dem Unterschiede aber, dass hier zwei Fälle unterschieden werden müssen, je nachdem der biplanare Knoten reelle oder imaginäre Tangentenebenen zeigt. In *beiden* Fällen

verlegt sich der Durchgang in zwei Durchgänge durch Knotenpunkte, die auch vermieden werden können, im *ersteren* aber besitzen beide Knotenpunkte reelle Tangentenkegel, im *zweiten* ist einer der Knotenpunkte ein isolirter Punkt.

§ 6.

Deformation des m-fachen Punktes.

Der m-fache Punkt ist eine $B_{\frac{1}{2}m(m+1)-2}$. Sie zerlegt sich in $(m-1)^2$ Durchgänge durch Doppelpunkte, von welchen Doppelpunkten aber, wenn m eine ungerade Zahl ist, höchstens $2(m-1)$, wenn m gerade ist, höchstens $m-1$ reell sein können. Dieses zu beweisen schreiben wir die Gleichung der in Deformation begriffenen Curve:

(18) $F \equiv \alpha_1 + k\alpha_1' + (\beta_1 + k\beta_1')x + (\beta_2 + k\beta_2')y + \cdots + H_m + \cdots = 0.$

Doppelpunkte treten auf, wenn:

(19) $$\alpha_1 + k\alpha_1' + \cdots + H_m + \cdots = 0,$$

(20) $$\beta_1 + k\beta_1' + \cdots + \frac{\delta H_m}{\delta x} + \cdots = 0,$$

(21) $$\beta_2 + k\beta_2' + \cdots + \frac{\delta H_m}{\delta y} + \cdots = 0.$$

Wegen (20) und (21) müssen x und y, in Hinsicht auf die durch griechische Buchstaben angedeuteten Grössen von der Grössenordnung $\sqrt[m-1]{\alpha}$ sein. Dann müssen aber, wegen (19) alle Durchgänge in der Nähe des Werthes:

(22) $$k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1'} = k_1$$

stattfinden.

Setzt man jetzt:

(23) $$-\frac{\beta_1 + k_1\beta_1'}{\beta_2 + k_1\beta_2'} = p; \qquad -\beta_2 - k_1\beta_2' = \varepsilon,$$

dann lassen sich die Coordinaten der Doppelpunkte berechnen aus den Gleichungen:

(24) $$\frac{\delta H_m}{\delta x} + p\frac{\delta H_m}{\delta y} = 0$$

und

(25) $$\frac{\delta H_m}{\delta y} = \varepsilon,$$

woraus das oben gesagte mit Leichtigkeit abgelesen werden kann.

§ 7.

Deformation des dreifachen Punktes.

Ausführlicher haben wir den *dreifachen* Punkt untersucht. Bei gehöriger Wahl der Coordinatenaxen ist:

$$H_3 = d_1 x^3 + d_3 x y^2. \tag{26}$$

Die Doppelpunkte müssen also berechnet werden aus:

$$3 d_1 x^2 + d_3 y^2 + 2 p d_3 x y = 0 \tag{27}$$

und

$$2 d_3 x y = \varepsilon. \tag{28}$$

Aus (27) ergiebt sich:

$$y = \left(- p \pm \sqrt{- \frac{3 d_1}{d_3} + p^2} \right) x \equiv \mu x \tag{29}$$

und dann aus (28)

$$2 d_3 \mu x^2 = \varepsilon. \tag{30}$$

Besitzt der dreifache Punkt *drei reelle Zweige*, ist also $\frac{d_1}{d_3}$ negativ, dann giebt es, weil die beiden μ entgegengesetzte Zeichen haben, *immer* zwei und *nur* zwei reelle Doppelpunkte, und zwar mit reellen Zweigen, weil nämlich:

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} \right)^2 - \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = 4 d_3^2 y^2 - 12 d_1 d_3 x^2 \tag{31}$$

also positiv ist.

Dieses Resultat findet durch Betrachtung der Figur 4, wo die Anfangs- und Endcurve einer linearen Deformation in der Nähe eines

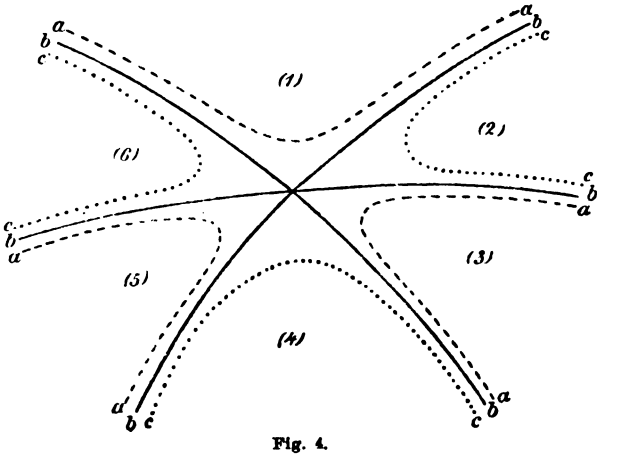


Fig. 4.

dreifachen Punktes mit reellen Zweigen eingezeichnet sind, seine einfache Erklärung. Man beachte nur die bei diesen Curven a und c

zwischen den Flächentheilen (1)—(6) bestehenden Verbindungen. Die Anknüpfung der bei der Endcurve c bestehenden, bei der Anfangscurve a fehlenden Verbindungen fordert zwei Doppelpunkte mit reellen Zweigen.

Auch ist auf diese Weise leicht einzusehen, dass während der Deformation eines m-fachen Punktes mit m reellen Zweigen, $m-1$ reelle Doppelpunkte mit reellen Zweigen auftreten müssen, und dass diese Anzahl im allgemeinen auch nicht *grösser* sein kann; denn wäre sie das, dann würden bei einer Deformation wo p denselben, ε den entgegengesetzten Werth $-\varepsilon$ erhielte, *weniger* als $m-1$ reelle Doppelpunkte auftreten müssen, weil die Summe der reellen Lösungen der Gleichungen (24) und (25) für diese beiden Werthe von ε höchstens $2(m-1)$ sein kann.

Wir kehren jetzt zum dreifachen Punkt zurück und betrachten den Fall, dass dieser nur *einen reellen Zweig* besitzt. Dann ist $\frac{d_1}{d_3}$ *positiv*, und die beiden Werthe von μ haben also das gleiche Zeichen; dann müssen aber, wegen (30), die vier Doppelpunkte alle reell oder alle imaginär sein. Weil nun aber:

$$(32)\qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (4d_3^2\mu^2 - 12 d_1 d_3)x^2$$
$$= \pm 8 d_3^2\cdot\left(-p \pm \sqrt{-\frac{3d_1}{d_3}+p^2}\right)\cdot\sqrt{-\frac{3d_1}{d_3}+p^2}\cdot x^2$$
$$= \pm 4 d_3 \varepsilon \sqrt{-\frac{3d_1}{d_3}+p^2},$$

so müssen sich von den vier reellen Durchgängen immer zwei auf Doppelpunkte mit reellen Zweigen und zwei auf isolirte Punkte beziehen, und es ist nicht ohne Interesse die Reihenfolge dieser Durchgänge kennen zu lernen.

Um dieses Resultat zu gewinnen, setzen wir (vergleiche (22))

$$(33)\qquad k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1'} + \varkappa;$$

dann muss $\varkappa$ berechnet werden aus (18). Durch Substitution der Werthe von $\beta_1 + k\beta_1'$ und $\beta_2 + k\beta_2'$ aus (20) und (21) erhalten wir so:

$$(34)\qquad \varkappa\alpha_1' - x\frac{\partial H_m}{\partial x} - y\frac{\partial H_m}{\partial y} + H_m + \cdots = 0,$$

also:

$$(35)\quad \varkappa\alpha_1' = (m-1)H_m = 2H_3 = 2(d_1 x^3 + d_3 x y^2) = 2(d_1 + \mu^2 d_3)x^3.$$

Nun gehören aber wegen (30) zu jedem bestimmten Werthe von μ zwei gleiche im Zeichen entgegengesetzte Werthe von x. Hieraus ergiebt sich mit Leichtigkeit, dass mit dem *einen* Werthe von μ die beiden äussern, mit dem *andern* die beiden innern Durchgänge correspondiren müssen. Aus (32) kann aber geschlossen werden, dass zu

ein und demselben Werthe von μ Doppelpunkte gleicher Art gehören. Von den vier Durchgängen beziehen sich also entweder die beiden äussern oder die beiden innern auf isolirte Punkte. Dass es immer die beiden äussern sind, kann aber folgendermassen bewiesen werden.

Wir setzen:

$$(36)\quad \mu_1 = -p + \sqrt{-\frac{3d_1}{d_3} + p^2};\quad \mu_2 = -p - \sqrt{-\frac{3d_1}{d_3} + p^2},$$

dann werden wegen (33) und (35) mit μ_1 die äussern oder innern Durchgänge correspondiren, je nachdem der Ausdruck:

$$(37)\qquad 4(d_1 + \mu_1^2 d_3)^2 \cdot x_1^6 - 4(d_1 + \mu_2^2 d_3)^2 \cdot x_2^6$$

positiv oder negativ ist.

Mittelst (30) kann dieser Ausdruck umgeformt werden in:

$$(38)\quad \frac{(\mu_2 - \mu_1)\varepsilon^3}{2d_3^3 \mu_1^3 \mu_2^3} \left\{d_1^2(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2) + 2d_1 d_3 \mu_1^2 \mu_2^2 - d_3^2 \mu_1^3 \mu_2^3\right\}$$

oder weil:

$$(39)\quad \mu_1 + \mu_2 = -2p;\quad \mu_1\mu_2 = \frac{3d_1}{d_3};\quad \mu_2 - \mu_1 = -2\sqrt{-\frac{3d_1}{d_3} + p^2}$$

in:

$$(40)\qquad -\frac{4\varepsilon^3}{27 d_1}\left(-\frac{3d_1}{d_3} + p^2\right)\sqrt{-\frac{3d_1}{d_3} + p^2}.$$

Er ist also positiv, wenn $\frac{\varepsilon}{d_1}$ oder (weil d_1 und d_3 gleiche Zeichen haben) $d_3\varepsilon$ negativ ist. Dann correspondiren mit μ_1 die *äussern* Durchgänge, aber auch, wegen (32), die isolirten Punkte. Ist dagegen $d_3\varepsilon$ positiv, dann correspondiren die äussern Durchgänge mit μ_2, zugleich aber auch die isolirten Punkte.

In Uebereinstimmung mit diesem Resultate haben wir in Figur 6 den Vorgang der linearen Deformation mit vier reellen Doppelpunkten vorgestellt. Man soll sich den isolirten Zweig der Curve b aus einem isolirten Punkte entstanden denken. Mittelst eines Doppelpunktes mit reellen Zweigen wird er dann wieder in die Curve c aufgenommen. Von dieser Curve c ist dann später der isolirte Zweig d abgeschnürt, der sich schliesslich zu einem isolirten Punkte zusammenzieht und dann verschwindet.

Um nun einzusehen, dass die isolirten Zweige sich jedesmal auf der Seite der Curve befinden müssen, wo wir sie gezeichnet haben, beachte man, dass während einer linearen Deformation die Function F der Gleichung (18) für einen bestimmten Punkt der Ebene, weil sie in Bezug auf k linear ist, nur einmal das Zeichen wechseln kann. Wenn wir aber die Deformation genügend weit in der *einen* Richtung fortsetzen, wird diese Function *positiv*, in der *andern* Richtung *negativ* in allen bis auf endliche Entfernung vom Ursprunge der Coordinaten

gelegenen Punkten. Daraus geht hervor, dass bei Deformation in der einen Richtung die Flächentheile, wo F *positiv* ist, in der anderen Richtung die, wo F *negativ* ist, sich fortwährend auf Kosten der übrigen ausbreiten.

Dann muss aber ein aus einem isolirten Punkte entstehender isolirter Zweig dem Curvenzug sozusagen immer vorauseilen, ein abgeschnürter Zweig hingegen hinter ihm zurückbleiben.

§ 8.

Ueber die Maximalanzahl der in einer Curve mit dreifachem Punkte zusammenstossenden Curvengruppen.

Wir denken uns jetzt wieder die Curven n^{ter} Ordnung dergestalt in Gruppen eingetheilt, dass die einer und derselben Gruppe ohne Ueberschreitung eines Doppelpunktes in einander umgeformt werden können. Man kann sich dann fragen, wieviele dieser Gruppen von einer Curve mit dreifachem Punkte aus durch geringe Deformationen erreicht werden können. Diese Fragen werden wir nur mit einem Vorbehalt zu lösen versuchen. Auch wenn es sich nämlich gezeigt hat, dass zwei bestimmte Curvengestalten durch geringe Deformationen nicht ohne Ueberschreitung eines Doppelpunktes in einander übergehen können, bleibt immer noch die Möglichkeit bestehen, dass sie durch endliche Deformation, z. B. durch Drehung der ganzen Ebene, ohne eine solche Ueberschreitung in einander umgeformt werden können, also schliesslich doch zu derselben Gruppe gehören. Nur wenn die Anzahl der geschlossenen Zweige verschieden ist, kann diese Möglichkeit ohne weiteres geleugnet werden.

Auch unter diesem Vorbehalt wird die Beantwortung noch dadurch etwas verwickelter, dass neben dem allgemeinen schon im vorigen Paragraphen untersuchten Falle, noch ein besonderer Fall linearer Deformation zu berücksichtigen ist, der Fall nämlich, dass für $k_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1'}$, ausser $\alpha + k_1\alpha_1'$ zugleich $\beta_1 + k_1\beta_1'$ und $\beta_2 + k_1\beta_2'$ verschwinden oder doch zu einer geringeren Grössenordnung übergehen. In den Gleichungen (20) und (21) müssen dann auch Glieder höherer Ordnung in Betracht genommen werden und es zeigt sich, dass die Coordinaten der vier Doppelpunkte aus:

$$(41)\quad \beta_1 + k_1\beta_1' + 2(\gamma_1 + k_1\gamma_1')x + (\gamma_2 + k_1\gamma_2')y + 3d_1x^2 + d_3y^2 = 0$$

und

$$(42)\quad \beta_2 + k_1\beta_2' + (\gamma_2 + k_1\gamma_2')x + (\gamma_3 + k_1\gamma_3')y + 2d_3xy = 0$$

berechnet werden müssen.

Dass nun dieser Fall, wenn der dreifache Punkt drei reelle Zweige

hat, wenn also $\frac{d_1}{d_2}$ negativ ist, wirklich zu neuen Curvengestalten Veranlassung giebt, kann leicht nachgewiesen werden. Die beiden Gleichungen (41) und (42) stellen dann zwei Hyperbeln dar. Beobachtet man die Richtung der Asymptoten dann wird es deutlich, dass diese Hyperbeln sich immer in wenigstens *zwei* reellen Punkten schneiden *müssen*, dass sie sich aber, wenn man frei über die mit griechischen Buchstaben angedeuteten Grössen verfügen kann, auch in *vier* reellen Punkten schneiden *können*.

Die Betrachtung der Figur 4 zeigt dann weiter, dass diese vier Durchgänge aus drei einander folgenden Durchgängen durch Doppelpunkte mit reellen Zweigen und einem vorhergehenden oder nachfolgenden Durchgang durch einen isolirten Punkt bestehen muss.

Um das einsehen zu können, bemerken wir *erstens*, dass wegen der am Ende des vorigen Paragraphen bewiesenen Eigenschaft der linearen Deformation eine während einer solchen Deformation einmal entstandene Verbindung zwischen den Flächentheilen nicht wieder aufgelöst werden kann, *zweitens* dass ein isolirter Curvenzweig*) nur dann vorhanden sein kann, wenn die Flächentheile, wo die Function F der Gleichung (18) das innerhalb des isolirten Curvenzweiges sich vorfindende Zeichen hat, unter einander, wenigstens in der Nähe des Coordinatenursprunges, unverbunden sind. Wären z. B. bei negativem Werthe der Function F innerhalb dieses Zweiges, die beiden negativen Flächentheile (2) und (4) verbunden, dann würde eine den isolirten

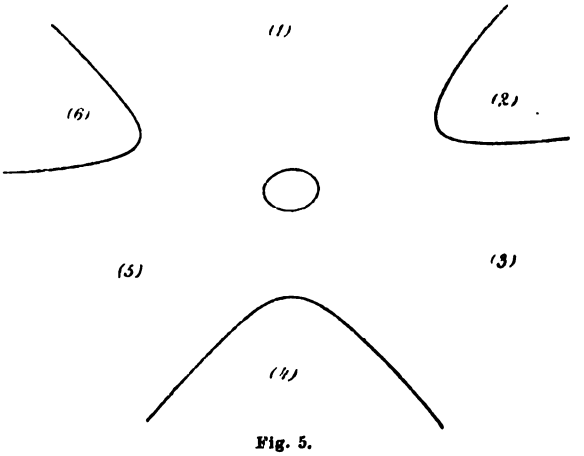


Fig. 5.

Zweig durchschneidende Gerade, welche die endliche Entfernung vom Ursprunge in den einander gegenüberliegenden Flächentheilen (3) und (6)

*) Dass ein solcher Curvenzweig auftreten kann, zeigt z. B. die Gleichung:

$$\alpha_1 - \beta_1 x^2 - \beta_2 y^2 + H_3 + \cdots = 0.$$

erreicht, die Curve fünfmal in geringer Entfernung vom Coordinatenursprunge schneiden, was offenbar bei einem deformirten dreifachen Punkte nicht vorkommen kann.

Nun ist es aber deutlich dass, wenn einmal entstandene Verbindungen nicht wieder gelöst werden, ein Uebergang von der Curvengestalt *a* der Figur 4 zur Curvengestalt *c* mittelst *vier* Durchgänge durch Doppelpunkte unmöglich ist, ohne dass dabei ein isolirter Zweig entsteht. Es muss bei einem solchen Uebergange dann nothwendig, weil jede andere Lage des isolirten Zweiges ausgeschlossen ist, entweder die Figur 5, oder die damit übereinstimmende Figur, wo die Flächentheile (2), (4) und (6) mit einander verbunden sind, entstehen. Bei Fortsetzung der Deformation in der einen Richtung zieht sich der isolirte Zweig dieser Figur in einen isolirten Punkt zusammen, in der anderen Richtung kommen drei Verbindungen mittelst Doppelpunkte mit reellen Zweigen zu Stande.

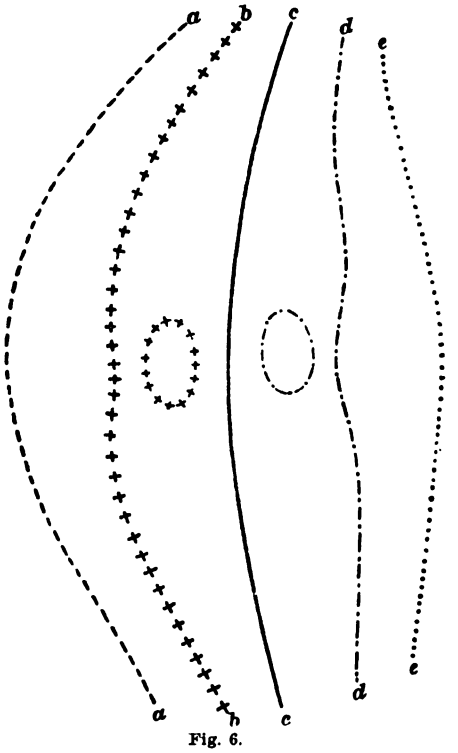


Fig. 6.

Wenn wir jetzt eine Uebersicht nehmen über die verschiedenen Curvengestalten, die durch geringe Deformation*) an einem dreifachen Punkte *mit drei reellen Zweigen* entstehen können, dann erhalten wir nicht weniger als *sieben* Gruppen, die, wenigstens mittelst *geringer* Deformation, nicht ohne Ueberschreitung eines Doppelpunktes in einander übergehen können. *Erstens* hat man die beiden in Figur 4 skizzirten Curvengestalten, *zweitens* die beiden, die durch Einzeichnung eines solirten Curvenzweiges, wie in Figur 5, daraus entstehen, *drittens* hat man die Curvengestalten die sich dadurch auszeichnen, dass zwischen

*) Dass auch die bis jetzt noch nicht untersuchte Deformation:

$$(\beta_1 + k\beta_1')x + (\beta_2 + k\beta_2')y + \cdots + H_2 + \cdots = 0$$

keine neuen Curvengruppen liefern kann, geht am einfachsten daraus hervor, dass man jede bei ihr auftretende Curve auch in einer Deformation aufnehmen kann, für welche $\alpha_1 + k\alpha_1'$ *nicht* fortgefallen ist.

den Flächentheilen (1)—(6) der Figur 4, resp. die Verbindungen (1), (3) und (4), (6); (1), (5) und (2), (4); (4), (5) und (2), (6) bestehen.

Dass nun aber wirklich zwei zu derselben Gruppe gehörige Curven immer ohne Ueberschreitung eines Doppelpunktes in einander umgeformt werden können, wird sehr leicht eingesehen, wenn wir sie beide, was immer möglich ist, in dieselbe lineare Deformation aufnehmen.

Viel einfacher verhält sich die Sache bei der Deformation eines dreifachen Punktes *mit einem einzigen reellen Zweige*. Wegen (41) und (42) sind hier, ausser den Deformationen *ohne* und mit *vier* Doppelpunkten auch solche mit *zwei* möglich. Weil nun die Curven b und d der Figur 6 unmöglich zu ein und derselben Gruppe gehören können, so müssen es die beiden ersteren und die beiden letzteren Durchgänge sein, die umgangen werden können. Es gehören also die Curven a, c, e zur selben Gruppe und es können von einer Curve mit einem solchen dreifachen Punkte aus nur *drei* verschiedene Curvengruppen erreicht werden.

Amsterdam, 16. December 1891.

Bemerkung über einen Punkt in Riemann's „Theorie der Abel'schen Functionen".

Von

F. Franklin in Baltimore.

In Riemann's Abhandlung „Theorie der Abel'schen Functionen" (Erste Abtheilung, § 4) wird die Ableitung der Integrale zweiter Gattung aus den Integralen dritter Gattung mit folgenden Worten besprochen: „Wenn man dann $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so nach ε_1 differentiirt, dass die reellen Theile der Periodicitätsmoduln (oder auch p von den Periodicitätsmoduln) und der Werth von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für einen beliebigen Punkt der Fläche T constant bleiben, so erhält man eine Function $t(\varepsilon_1)$, die in ε_1 unstetig wie $\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_1}$ wird."

Dieser Differentiation liegt offenbar die Voraussetzung zu Grunde, dass $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — und zwar jeder Zweig von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — als Function von ε_1 und den andern bestimmenden Grössen betrachtet, sich als monogene Function von ε_1 verhält, wenn jene andere Grössen constant bleiben. Diese Voraussetzung trifft indessen nicht zu, wenn die reellen Theile der Periodicitätsmoduln constant bleiben. Ein Periodicitätsmodul kann nämlich als Differenz zwischen den Werthen von zwei Zweigen der Function ϖ in demselben Punkte der Fläche aufgefasst werden, und wenn die Function monogen in Bezug auf ε_1 wäre, so wäre auch diese Differenz monogen. Da aber der reelle Theil dieser Differenz sich nicht ändert, ist ihr Differential stets rein imaginär, wie man auch das Differential von ε_1 wählen mag; die Differenz ist also nicht eine monogene Function von ε_1, wenn sie nicht eine Constante ist. Wenn man also die Monogenität von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ als Function von ε_1 bei Festhaltung der reellen Theile der Periodicitätsmoduln voraussetzt, ist man zu der Folgerung gezwungen, dass die Periodicitätsmoduln alle constant sind, was, wie man leicht sieht, unmöglich ist.

Der Fall wo an Stelle der reellen Theile der Periodicitätsmoduln p von den Periodicitätsmoduln festgehalten werden, ist selbstverständlich einem ähnlichen Einwande nicht unterworfen.

Königsberg i. Pr., den 16. März 1892.

Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Vor längerer Zeit schon hat Hr. Klein*) eine Methode angegeben, um solche homogene ganze Functionen:

$$Y_1, Y_2 \ldots Y_\mu$$

von n Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu bilden, welche eine vorgegebene Gruppe Γ linearer homogener Substitutionen erfahren, wenn man die x einer zu dieser isomorphen Gruppe G solcher Substitutionen unterwirft. Er geht dabei aus von einer ganzen homogenen Function der x:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

welche nur einer Bedingung zu genügen hat: es dürfen nämlich zwischen den Werthen, welche sie bei den Substitutionen der x annimmt, gewisse lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten *nicht* bestehen. Die Methode würde versagen, wenn diese Relationen in einem gegebenen Fall für jede Function φ erfüllt wären; es soll in dieser Note gezeigt werden, dass das nicht eintreten kann.

I. Es sei N die Ordnung der Gruppe G, $\frac{N}{\nu}$ die Ordnung der Gruppe Γ, v seien die zu den y contragredienten Variabeln. Die Variable v_1 wird dann in sich übergeführt werden bei den $\frac{N}{\nu\nu_1}$ Operationen einer gewissen Untergruppe Γ' von Γ; dieser wird bei der vorausgesetzten isomorphen Beziehung von Γ auf G eine Untergruppe G' von G entsprechen, deren Ordnung $\frac{N}{\nu_1} = m$ ist. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass es immer Functionen der x giebt, *welche bei jeder Operation von G' ungeändert bleiben, bei jeder andern Operation von G aber ihren Werth ändern* — der *Untergruppe G' eigenthümliche Invarianten*, wie wir sie kurz nennen können.

*) Ueber die Auflös g gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade, dieser Ann. Bd. 15, p. 251 ff., insbes. p. 253—55 (1879).

Die Gruppe G wird eine gewisse Anzahl k Operationen enthalten, deren jede nur darin besteht, dass alle x mit einer und derselben Einheitswurzel multiplicirt werden; alle diese werden sich als Potenzen einer von ihnen darstellen lassen, für welche diese Einheitswurzel eine primitive k^{te} ist. Als Product von Potenzen verschiedener Primzahlen dargestellt sei:

$$k = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots . \tag{1}$$

In G' werden von diesen Operationen nur diejenigen k' enthalten sein, welche die x mit k'^{ten} Einheitswurzeln multipliciren, wo:

$$k' = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots \tag{2}$$

und: $\alpha' \leqq \alpha$, $\beta' \leqq \beta$, $\gamma' \leqq \gamma \ldots$ ist. Als *Collineationsgruppe* betrachtet hat dann G die Ordnung $N : k$, G' die Ordnung $m : k'$; die letztere Zahl setzen wir zur Abkürzung $= r$, die erstere, die ein Vielfaches der letzteren ist, $= r \,.\, s$.

II. Aus den m Substitutionen von G' greifen wir r solche heraus, welche auch als Collineationen betrachtet von einander verschieden sind (ob sie als homogene Substitutionen betrachtet eine Gruppe bilden, ist gleichgiltig). Ebenso greifen wir aus den N Substitutionen von G $r \,.\, s$ solche heraus, welche auch als Collineationen von einander verschieden sind; unter ihnen mögen die r ersten enthalten sein. Eine lineare Function der x:

$$\psi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \tag{3}$$

möge dann bei den r erstgenannten Operationen die Werthe:

$$\psi_1, \ \psi_2 \ \ldots \ \psi_r$$

und bei den $r(s-1)$ andern die Werthe:

$$\begin{array}{llll} \psi_{r+1}, & \psi_{r+2} & \ldots & \psi_{2r} \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ \psi_{rs-r+1}, & \psi_{rs-r+2} & \ldots & \psi_{rs} \end{array}$$

annehmen. Was wir zunächst behaupten, ist: *die α können so gewählt werden, dass keine zwei dieser rs Werthe für beliebige Werthe der x denselben Modul besitzen.*

Angenommen nämlich, es sei der Modul des Quotienten $\psi' = \psi$ für alle Werthe der x gleich 1, so müsste dieser Quotient eine von den x unabhängige Grösse η sein. Ist:

$$x_i' = \sum_k \beta_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n) \tag{4}$$

die Substitution, welche ψ in ψ' überführt, so müsste dann:

$$\eta \alpha_k = \sum_i \beta_{ik} \alpha_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

sein. Sollten diese Gleichungen für alle Werthe der α bestehen, so müsste $\beta_{ik} = \eta$ für $i = k$ und $= 0$ für $i \gtrless k$ sein, der Voraussetzung zuwider, nach der (4) auch als Collineation betrachtet von der Identität verschieden sein sollte. Es können also die α stets so gewählt werden, dass ψ und ψ' nicht für jedes Werthsystem der x denselben Modul besitzen; folglich auch so, dass das für kein Paar der Werthe $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_r$ der Fall ist; und das war zunächst zu beweisen.

III. Es seien nunmehr die α in (3) dieser Bedingung gemäss gewählt; man wähle hierauf ein bestimmtes Werthsystem der x, für welche jene Moduln alle von einander verschieden ausfallen. Einer bekannten Schlussweise zufolge existirt dann eine Zahl ε von der Beschaffenheit, dass aus einer Gleichung der Form

$$\psi_{\mathfrak{a}}^{e} + \psi_{\mathfrak{b}}^{e} + \cdots = \psi_{\mathfrak{c}}^{e} + \psi_{\mathfrak{d}}^{e} + \cdots, \tag{5}$$

sobald $e > \varepsilon$ ist, geschlossen werden kann, die Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \ldots$ seien den Indices $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$, abgesehen von der Reihenfolge gleich. Es ist dann:

$$\varphi^{(1)} = \psi_1^{e} + \psi_2^{e} + \cdots + \psi_r^{e} \tag{6}$$

eine Invariante der Untergruppe G', sobald e durch k' theilbar ist; und es ist eine dieser Untergruppe eigenthümliche Invariante, wenn e mit k gerade k' zum grössten gemeinschaftlichen Theiler hat, also durch keine höheren Potenzen der Primzahlen $a, b \ldots$ als bezw. die $\alpha'^{\text{te}}, \beta'^{\text{te}} \ldots$ theilbar ist. Dabei kann es nicht identisch Null sein; denn $\varphi^{(1)} = 0$ wäre eine Relation der Form (5). Damit ist die *Existenz einer der Untergruppe G' eigenthümlichen Invariante* sichergestellt.

IV. *Eine solche Function $\varphi^{(1)}$ wählen wir nun als die bei Klein so bezeichnete Function.* Dann braucht man in der Summe

$$\sum_{i} \varphi^{(i)} v^{(i)} \tag{7}$$

die Summation nur über $N : m = \nu_1$ verschiedene Glieder zu erstrecken, indem von den ursprünglich auftretenden N Gliedern je m einander gleich werden. Ist dann allgemein:

$$v^{(i)} = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \gamma_{i\lambda} v_\lambda \qquad (i = 1, 2 \ldots \nu_1), \tag{8}$$

so wird:

$$Y_\lambda = \sum_{i=1}^{\nu_1} \gamma_{i\lambda} \varphi^{(i)} \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots \mu). \tag{9}$$

Angenommen nun, einer dieser Ausdrücke sei identisch Null, so bilde man die Ausdrücke*):

*) Das that in einem ähnlichen Falle schon P. Ruffini; vgl. Memorie della società Italiana t. 9, art. 16 ff. (1801).

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{\nu_1} \gamma_{il}\, \varphi^{(i)\,k}, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots \nu_1)$$

unter den k wirkliche Exponenten verstanden. Wären diese auch alle Null, so müsste die Determinante:

$$(11) \qquad |\varphi^{(i)\,k}| \qquad (i, k = 1, 2 \ldots \nu_1)$$

verschwinden. Diese Determinante ist aber gleich dem Product aus sämmtlichen $\varphi^{(i)}$ und ihren sämmtlichen Differenzen, also unter unseren Voraussetzungen sicher von Null verschieden. Es muss also auch mindestens einer der Ausdrücke (10) von Null verschieden sein; dieser ist dann eine Function Y_l der verlangten Art.

Damit ist bewiesen, was zu beweisen war: *dass man nämlich stets Functionen Y erhalten kann, welche nicht alle identisch verschwinden.* Der Beweis an sich würde einfacher werden, wenn man statt wie Hr. Klein von v_1, von einer solchen linearen Function der v ausgehen würde, deren $N : \nu$ Werthe alle von einander verschieden sind. Dann wird $m = r = 1$ und man bedarf nicht des unter III benutzten Hilfssatzes; der an und für sich bemerkenswerthe Satz von der Existenz „einer der Untergruppe eigenthümlichen Invariante" würde dann als Corollar des Resultats erscheinen. Die Benutzung von v_1 bietet dem gegenüber den Vortheil, dass der Process der Ausscheidung ungeeigneter Functionen in drei Schritte (II), (III), (IV) zerlegt wird.

Göttingen, Januar 1892.

Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen.

Dritter Theil.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Der vorliegende dritte (und letzte) Theil*) dieser Untersuchungen hat zum Ziele die Entwicklung der Beziehungen zwischen dem Problem der *Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen* und dem der 27 *Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung*. Dass beide Probleme isomorphe Gruppen besitzen, ist aus den Untersuchungen des Herrn C. Jordan**) bekannt; die effective Reduction des einen Problems auf das andere ist von Herrn F. Klein***) skizzirt worden. Es blieb noch übrig, die dort gegebenen Andeutungen wenigstens soweit mit expliciten Formeln durchzuführen, dass der Zusammenhang beider Probleme sich unmittelbar erkennen liess. In der That führte die Weiterführung der von Herrn Witting†) begonnenen geometrischen Untersuchung der „Configuration im Raume der $Z^{\prime\prime}$ mit *linien*geometrischen Mitteln zu einer einfachen Eigenschaft dieser Configuration, welche die gesuchte Beziehung sofort ergiebt.

Demzufolge gliedert sich dieser Theil wie folgt: Der XIII. Abschnitt enthält einige Nachträge zum VIII. Abschnitt von (II); der

---

*) Die im 36., bezw. 38. Bd. dieser Annalen erschienenen Theile werden im folgenden kurz mit I. bezw. II citirt; der erste wird übrigens nur selten zu benutzen sein.

**) Comptes rendus de l'acad. des sciences, 1869; vgl. auch traité des substitutions p. 316 ff., p. 365 ff.

***) Journal de Liouville sér. 4, t. 4, p. 169 ff. (1887). Von den dort angekündigten Untersuchungen des Hrn. Maschke ist der zur Ausführung gelangte Theil im 33. Bd. dieser Annalen erschienen; im übrigen tritt an deren Stelle die vorliegende Arbeit. Die dort ebenfalls angekündigte Veröffentlichung des Hrn. Cole ist bis jetzt unterblieben.

†) Ueber eine Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen führt, Diss. Gött. 1887; vgl. auch dieser Annalen Bd. 29.

XIV. vervollständigt die genannte Untersuchung von Witting durch Einführung der Liniencoordinaten; der XV. bringt die von Klein a. a. O. postulirten Ausdrücke der Invarianten der „Gruppe der Z"; der XVI. handelt von den Invarianten der „Gruppe der a_{ik}"; der XVII. berührt algebraische Fragen, der XVIII. endlich schliesst die Untersuchung ab mit der Ausführung der in Aussicht gestellten Reduction des Problems der 27 Geraden auf das Problem der Z.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 1 der Göttinger Nachrichten v. J. 1892 erschienen.

XIII. Abschnitt.

Die hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ von ungerader Charakteristik.

§ 59.

Von der Vermehrung der Argumente der $X_{\alpha\beta}$ um $(2n)^{\text{tel}}$ Perioden.

In II, § 33, Glchg. (19) ist bereits der Hauptsache nach angegeben, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn man ihre Argumente um $(2n)^{\text{te}}$ Theile der Perioden ω vermehrt; für die folgenden Entwicklungen bedürfen wir noch einer näheren Ausführung jener Angaben. Zu einer solchen gelangen wir am bequemsten, wenn wir den Ausdruck der $X_{\alpha\beta}$ durch Thetafunctionen benützen. Die Charakteristik der vorgelegten $X_{\alpha\beta}$ sei:

$$(1) \qquad c = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix};$$

die zuzufügenden Periodenbruchtheile seien bezeichnet mit:

$$(2) \quad \frac{1}{2n}\Omega_i = \frac{1}{2n}(h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2} + nh_3\omega_{i3} + nh_4\omega_{i4}), \qquad (i = 1, 2)$$

indem unter den h beliebige ganze Zahlen verstanden werden. (Dass dabei die Factoren von ω_{i3} und ω_{i4} als durch n theilbar vorausgesetzt sind, thut der Allgemeinheit keinen Eintrag, da die Vermehrung der Argumente um Perioden-n^{tel} bereits in II, § 33, Glchg. (16) erledigt ist). Die bekannte Formel für die Vermehrung der Argumente der Thetafunctionen um halbe Perioden*) giebt dann zunächst:

$$(3) \quad \vartheta_c\left(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} + \tfrac{1}{2}h_1 + \tfrac{1}{2}h_3n\tau_{11} + \tfrac{1}{2}h_4n\tau_{12};\ nv_2 + \cdots;\ n\tau_{ik}\right) =$$
$$= e^{-\pi i\varphi}\,\vartheta_{c'}(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12};\ nv_2 + \cdots;\ n\tau_{ik}),$$

dabei ist die neue Charakteristik:

*) Vgl. z. B. Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung (Leipzig 1886), § 3, Glchg. 20.

(4) $$c' = \begin{vmatrix} g_1 + h_3, & g_2 + h_4 \\ g_3 + h_1, & g_4 + h_2 \end{vmatrix} .$$

und die im Exponenten stehende lineare Function φ der Argumente lautet:

(5) $$\varphi = h_3(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}) + h_4(nv_2 + \alpha\tau_{21} + \beta\tau_{22}) + \frac{n}{4}(h_3^2\tau_{11} + 2h_3h_4\tau_{12} + h_4^2\tau_{22}) + \frac{1}{2}[h_3(g_3 + h_1) + h_4(g_4 + h_2)].$$

Die Umformung der für die vermehrten Argumente gebildeten Function G_2 bedarf einiger Rechnung. Wir haben zunächst (vgl. II, § 32, Glchg. (19)—(21)):

(6) $$-nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) + \sum_{i=1}^{2}\left(u_i + \frac{1}{4n}\Omega_i\right)\left[\frac{1}{2}\eta_{i1}(h_1 + nh_3\tau_{11} + nh_4\tau_{12}) + \frac{1}{2}\eta_{i2}(h_2 + nh_3\tau_{21} + nh_4\tau_{22})\right].$$

Zur Vereinfachung der rechten Seite bedienen wir uns der Gleichungen (a. a. O. Glchg. (22)):

(7) $$\begin{cases} \eta_{11}\tau_{11} + \eta_{12}\tau_{21} = \eta_{13} + \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{22}, & \eta_{21}\tau_{11} + \eta_{22}\tau_{21} = \eta_{23} - \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{12}, \\ \eta_{11}\tau_{12} + \eta_{12}\tau_{22} = \eta_{14} - \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{21}, & \eta_{21}\tau_{12} + \eta_{22}\tau_{22} = \eta_{24} + \frac{2\pi i}{p_{11}}\omega_{11}; \end{cases}$$

damit erhalten wir zunächst:

(8) $$-nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) + \frac{1}{2}\mathsf{H}_1\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + \frac{1}{2}\mathsf{H}_2\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right) + \frac{n\pi i}{p_{12}}\left[(h_3\omega_{22} - h_4\omega_{21})\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + (-h_3\omega_{12} + h_4\omega_{11})\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right)\right].$$

Die H sind dabei ebenso aus den η gebildet, wie die Ω aus den ω. Um das noch übersichtlicher schreiben zu können, setzen wir zur Abkürzung:

(9) $$\Phi(u_i) = \frac{1}{2}\mathsf{H}_1\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + \frac{1}{2}\mathsf{H}_2\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right)$$

und führen in die zweite Zeile die v und die τ ein auf Grund der Formeln:

(10) $$\omega_{22}u_1 - \omega_{12}u_2 = p_{12}v_1, \quad -\omega_{21}u_1 + \omega_{11}u_2 = p_{12}v_2;$$

(11) $$(h_3\omega_{22} - h_4\omega_{21})\,\Omega_1 + (-h_3\omega_{12} + h_4\omega_{11})\,\Omega_2 = (h_1h_3 + h_2h_4)\,p_{12} + n\left(h_3^2p_{32} + h_3h_4(p_{13} + p_{42}) + h_4^2p_{14}\right);$$

wir erhalten so:

(12) $$-nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) + \Phi(u_i) + n\pi i(h_3v_1 + h_4v_2) + \frac{\pi i}{4}(h_1h_3 + h_2h_4 + nh_3^2\tau_{11} + 2nh_3h_4\tau_{12} + h_4^2\tau_{22}).$$

Ausserdem ist noch zu bilden:

$$(13)\quad 2\pi i\Big[\alpha\Big(v_1+\tfrac{1}{2n}h_1+\tfrac{1}{2}(h_3\tau_{11}+h_4\tau_{12})\Big)+\beta\Big(v_2+\tfrac{1}{2n}h_2+\tfrac{1}{2}(h_3\tau_{21}+h_4\tau_{22})\Big)\Big]$$
$$=2\pi i(\alpha v_1+\beta v_2)+\tfrac{\pi i}{n}(h_1\alpha+h_2\beta)+\pi i[h_3\alpha\tau_{11}+(h_3\beta+h_4\alpha)\tau_{12}+h_4\beta\tau_{22}],$$

sowie endlich (II, § 33, Gl. (3); § 34, Gl. (13)):

$$(14)\qquad \frac{C_{\alpha\beta}^{(c)}}{\sqrt[8]{D^{(c)}}}=e^{-\frac{\pi i}{n}(h_1\alpha+h_2\beta)}\cdot\Big(\frac{D^{(c')}}{D^{(c)}}\Big)^{\frac{n}{8}}\cdot\frac{C_{\alpha\beta}^{(c')}}{\sqrt[8]{D^{(c')}}}.$$

Vereinigung von (3), (12), (13), (14) giebt dann mit Rücksicht auf die in II, § 32 Glchg. (24), § 33 Glchg. (3) und § 34 Glchg. (14) enthaltene Definition der $X_{\alpha\beta}$ die gesuchte Formel in folgender Gestalt:

$$(15)\qquad \sqrt[8]{D^{(c)}}\,X_{\alpha\beta}^{(c)}\Big(u_i+\frac{\Omega_i}{2n}\Big)=$$
$$=\sqrt[8]{D^{c'}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}(h_1h_2+h_3h_4)-\frac{\pi i}{2}(g_1h_2+g_4h_4)}\,e^{\Phi(u_i)}\,X_{\alpha\beta}^{(c')}(u_i).$$

An derselben ist besonders zu beachten, dass *die Function* Φ *nach ihrer Definition* (9) *unabhängig ist von der Auswahl des zu Grunde gelegten Periodensystems, sowie von den Indices* α, β, *die* 8. *Einheitswurzel wenigstens von den letzteren.*

§ 60.

Von der Unabhängigkeit der „Gruppe der $X_{\alpha\beta}$" von der Charakteristik.

In II § 35 ist bereits der Satz erwähnt:

Die zu verschiedenen Charakteristiken gehörenden Gruppen linearer Transformationen der $X_{\alpha\beta}$ *sind identisch.*

Der dort angedeutete allgemeine Beweis desselben gestaltet sich nunmehr auf Grund der Formel (15) des § 59 folgendermassen: Es sei S eine Periodentransformation, welche sowohl die Charakteristik c, als die Charakteristik c' in sich überführt. Dann gilt zunächst nach II, § 34 Glchg. (2):

$$(1)\qquad X_{\alpha\beta}^{(c)}(u;\omega')=\sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1}c_{\alpha\beta\gamma\delta}\,X_{\gamma\delta}^{(c)}(u;\omega).$$

In dieser Formel ersetzen wir nunmehr u_i durch $u_i+\frac{\Omega_i}{2n}$, indem wir unter Ω_i eine Periode verstehen, welche ausgedrückt durch die alten primitiven Perioden ω gleich ist:

$$n(h_1\omega_1+h_2\omega_2+h_3\omega_3+h_4\omega_4),$$

dagegen ausgedrückt durch die neuen ω' gleich:

$$n(h_1'\omega_1' + h_2'\omega_2' + h_3'\omega_3' + h_4'\omega_4').$$

Wenden wir dann beiderseits die genannte Formel (15) des § 59 an, so folgt:

$$(2) \qquad X_{\alpha\beta}^{(\sigma')}(u;\,\omega') = \sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1} c'_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X_{\gamma\delta}^{(\sigma')}(u;\,\omega);$$

dabei ist:

$$(3) \qquad c'_{\alpha\beta\gamma\delta} = j c_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

und j ist eine *von den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ unabhängige* 8. Einheitswurzel, nämlich:

$$(4) \qquad j = c^{\frac{n\pi i}{4}(h_1'h_3'+h_2'h_4'-h_1h_3-h_2h_4)+\frac{\pi i}{2}(g_3(h_3'-h_3)+g_4(h_4'-h_4))} \cdot \left[\sqrt[8]{\frac{D^{(\sigma')}}{D^{(\sigma)}}}\right],$$

wo die letzte Klammer diejenige 8. Einheitswurzel bedeutet, welche bei S zu der in der Klammer stehenden Grösse zutritt.

Von dieser Einheitswurzel j können wir nun folgendermassen indirect schliessen, dass sie gleich 1 sein muss: In II, p. 183 Fussn. ist bereits darauf aufmerksam gemacht, dass man a priori erkennen kann, die Determinante der $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ müsse gleich 1 sein; von den $c'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gilt genau das Gleiche. Die Determinante der letzteren unterscheidet sich aber wegen (3) von der der ersteren nur um den Factor j^n. Da wir nun (vgl. II, p. 168 oben) uns auf den Fall eines ungeraden n beschränkt haben, so folgt $j = 1$; die Coefficienten in (2) und die in (1) sind also dieselben, w. z. b. w.*)

XIV. Abschnitt.

Die endliche Gruppe von 51840 linearen Substitutionen im quaternären Gebiet, welche durch die Theorie der hyperelliptischen Functionen $Z_{\alpha\beta}$ geliefert wird.

§ 61.

Zusammenstellung der erzeugenden Substitutionen.

Für $n = 3$ erhalten wir (vgl. II, § 38) $\frac{n^2-1}{2} = 4$ Functionen $Z_{\alpha\beta}$, die wir zur Ersparung der Doppelindices folgendermassen schreiben wollen:**)

*) Das Resultat des Textes muss sich natürlich auch aus II, § 34, Glchg. (6) durch Rechnung ableiten lassen; doch scheint das umständlich zu sein. — Uebrigens involvirt die Ableitung des Textes eine Formel für die bei linearer Transformation der Thetaquotienten auftretende 8. Einheitswurzel, deren Uebereinstimmung mit der sonst, z. B. bei Krause a. a. O. p. 91, 92 gegebenen noch nachzuweisen sein würde.

**) Witting (Diss. p. 26) hat bezw. Z_2, Z_1, $-Z_4$ statt unserem Z_1, Z_2, Z_3.

$$(9)\qquad \begin{aligned} Z_1 &= Z_{10} = -Z_{20} = X_{10} - X_{20},\\ Z_2 &= Z_{01} = -Z_{02} = X_{01} - X_{02},\\ Z_3 &= Z_{11} = -Z_{22} = X_{11} - X_{22},\\ Z_4 &= Z_{21} = -Z_{12} = X_{21} - X_{12}. \end{aligned}$$

Aus der Tabelle in II, § 39, (3) ergiebt sich für diese Z die folgende:*)

	B	C	D	S_2
$Z_1' =$	Z_1	Z_1	$-Z_2$	$\varepsilon^2 Z_1$
$Z_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + Z_3 + Z_4)$	Z_4	$-Z_1$	Z_2
$Z_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon Z_3 + \varepsilon^2 Z_4)$	Z_2	$-Z_3$	$\varepsilon^2 Z_3$
$Z_4' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon^2 Z_3 + \varepsilon Z_4)$	Z_3	$+Z_4$	$\varepsilon^2 Z_4$

Diese 4 Operationen erzeugen*) eine *Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen;* dieselbe besitzt eine *ausgezeichnete Untergruppe*, bestehend aus der Identität und der Operation $(B^2D)^2$, welche die Vorzeichen aller vier Z umkehrt. Die zugehörige *Collineationsgruppe* dagegen ist *einfach.***)

§ 62.

Die Resultate von Witting.

Die Untersuchung der *Untergruppen* unserer „Gruppe der Z" ist von Hrn. Witting in seiner in der Einleitung citirten Dissertation begonnen worden; seine Resultate sollen hier kurz zusammengestellt werden unter jedesmaligem Hinweis auf die entsprechenden Entwicklungen von (II). Wir fügen auch gleich die aus der Abhandlung von Hrn. Maschke im 33. Bd. dieser Ann. zu entnehmenden Angaben über die Invarianten der einzelnen Untergruppen bei.

I. Aus C, D, S_2 entsteht (II, § 40) eine *Untergruppe* G_0 *von* 1296 *linearen Substitutionen der* Z, welche sich zusammensetzt aus den 24 Vertauschungen der Z, von denen jede mit zwei verschiedenen bestimmten Vorzeichenänderungen der Z zu verbinden ist***), und aus den 27 Operationen der Form:

*) Von den 6 erzeugenden Substitutionen des Hrn. Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 321) ist sein B, wie er p. 331 selbst angiebt, ausdrückbar durch sein A und F, die zusammen unserem C und D entsprechen; sein E ist unser B; sein C und sein D ergeben sich, indem man unser S_2 mit denjenigen Operationen verbindet, die durch Vertauschung der Z (also durch Transformation vermöge unseres C und D) aus ihm hervorgehen.

**) Vgl. II, § 38 und 39, sowie die dort citirten Stellen bei Hrn. C. Jordan.

***) Um zu bestimmen, welche Z in jedem Falle im Vorzeichen zu ändern sind, benutzt man am bequemsten eine der Invarianten (23a) bei Maschke.

(1) $Z_1' = \varepsilon^{\varkappa} Z_1, \quad Z_2' = \varepsilon^{\lambda} Z_2, \quad Z_3' = \varepsilon^{\mu} Z_3, \quad Z_4' = \varepsilon^{\nu} Z_4,$

welche der Bedingung:

(2) $$\varkappa + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod 3$$

genügen. Die 4 Ebenen:

(3) $$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = 0, \quad Z_4 = 0$$

bilden ein *Polartetraeder* der durch unsere Gruppe G bestimmten Configuration, welches bei allen Operationen von G in sich übergeführt wird. Solcher Polartetraeder enthält die Configuration 40 (Witting p. 43). Die *Invarianten* dieser Untergruppe sind unter den von Maschke a. a. O. § 6 aufgezählten enthalten; sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Z in ihnen nur im Product $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ oder in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten vorkommen.

II. Aus B, C, S_2 entsteht (II, § 41) eine *Untergruppe H von ebenfalls* 1296 *Substitutionen*, welche Z_1 bis auf zutretende 6^{te} Einheitswurzeln invariant lässt, Z_2, Z_3, Z_4 nach einer „ternären Hesse'schen Gruppe" umsetzt. Den Punkt $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$, $Z_4 = 0$ bezeichnet Witting (p. 41. 42) als einen *Pol* der Configuration, die Ebene $Z_1 = 0$ als die zugehörige *Polarebene*. Die Invarianten dieser Untergruppe hat Maschke (§ 3—5) angegeben.

III. Aus B, D, S_2 entsteht (II, § 42) eine *Untergruppe K von* 1152 *Substitutionen*. Dieselbe stellt sich übersichtlich dar, wenn wir neue Coordinaten ζ durch die Gleichungen:

(4) $$\zeta_1 = Z_1, \quad \zeta_2 = Z_2, \quad \zeta_3 = \tfrac{1}{2}(Z_3 + Z_4), \quad \zeta_4 = \tfrac{1}{2}(Z_3 - Z_4)$$

einführen; wir erhalten nämlich dann folgende Tabelle:

(5)

	B	D	S_2
$\zeta_1' =$	ζ_1	$-\zeta_2$	$\varepsilon^2\zeta_1$
$\zeta_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\zeta_2 + 2\zeta_3)$	$-\zeta_1$	ζ_2
$\zeta_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\zeta_2 - \zeta_3)$	$-\zeta_4$	$\varepsilon^2\zeta_3$
$\zeta_4' =$	ζ_4	$-\zeta_3$	$\varepsilon^2\zeta_4$

Bei B und S_2 bleiben alle *Punkte* der Geraden $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = 0$ und alle *Ebenen* der Geraden $\zeta_1 = 0$, $\zeta_4 = 0$ invariant (Witting p. 37), während die Ebenen der ersteren und damit die Punkte der letzteren sich je nach einer Tetraedergruppe binär substituiren; bei D werden diese beiden Geraden unter einander vertauscht. Man erhält so als das einfachste geometrische Gebilde, welches bei dieser Untergruppe invariant bleibt, ein *Geradenpaar;* solcher Geradenpaare enthält die

Configuration 45. (Witting p. 39). Was *Invarianten* dieser Untergruppe K betrifft, so haben dieselben die Gestalt:

$$\Phi\Psi' + \Phi'\Psi,$$

wenn mit Φ, Ψ Invarianten der Tetraedergruppe in ξ_1, ξ_4, mit Φ', Ψ' bezw. dieselben Formen in ξ_2, ξ_3 bezeichnet werden.

§ 63.

Einführung der Liniencoordinaten; die 45 Strahlencongruenzen.

Für die weitere Untersuchung unserer Configuration werden wir mit Vortheil uns des Hilfsmittels der *Liniencoordinaten* bedienen; darauf weist schon das Auftreten der zuletzt erwähnten Geradenpaare hin. Wir verstehen demgemäss unter $\overline{Z}$ zu den Z cogrediente Veränderliche und bilden die 6 zweigliedrigen Determinanten:

$$(1) \qquad a_{ik} = Z_i\overline{Z}_k - \overline{Z}_i Z_k,$$

die Coordinaten der geraden Verbindungslinie der Punkte Z und $\overline{Z}$. Dieselben erleiden, wenn auf die Z und auf die $\overline{Z}$ gleichzeitig die erzeugenden Substitutionen des § 61 angewendet werden, die aus folgender Tabelle hervorgehenden linearen Umsetzungen:

		B	C	D	S_2
(2)	$a'_{12} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + a_{13} + a_{14})$	a_{14}	$-a_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12}$
	$a'_{13} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14})$	a_{12}	a_{23}	εa_{13}
	$a'_{14} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14})$	a_{13}	a_{42}	εa_{14}
	$a'_{34} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + a_{42} + a_{23})$	a_{23}	$-a_{34}$	εa_{34}
	$a'_{42} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} + \varepsilon a_{23})$	a_{34}	a_{14}	$\varepsilon^2 a_{42}$
	$a'_{23} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + \varepsilon a_{42} + \varepsilon^2 a_{23})$	a_{42}	a_{13}	$\varepsilon^2 a_{23}$

Dieselben erzeugen eine Gruppe von nur 25920 linearen Substitutionen der a_{ik}, indem $(B^2D)^2 = (DC^2)^4$ sich auf die Identität reducirt. Bei allen diesen Operationen bleibt selbstverständlich die quadratische Form:

$$(3) \qquad A = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}$$

absolut invariant.

Die Geraden $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ und $\xi_1 = 0$, $\xi_4 = 0$ des vorigen Paragraphen haben bezw. die Liniencoordinaten $(0, 0, 0, 0, -1, 1)$

und (0, 1, — 1, 0, 0, 0); die Gleichungen der durch sie bestimmten *Strahlencongruenz* sind also:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{13} - a_{14} = 0, \\ a_{42} - a_{23} = 0. \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungenpaare werden durch die Substitutionen der Untergruppe G_0 (§ 62, I) zunächst die folgenden 18 erhalten:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{13} - \varepsilon^\lambda a_{14} = 0, \\ a_{42} - \varepsilon^{-\lambda} a_{23} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12} + \varepsilon^\lambda a_{23} = 0, \\ a_{34} + \varepsilon^{-\lambda} a_{14} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{14} - \varepsilon^\lambda a_{12} = 0, \\ a_{23} - \varepsilon^{-\lambda} a_{34} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13} + \varepsilon^\lambda a_{34} = 0, \\ a_{42} + \varepsilon^{-\lambda} a_{12} = 0; \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, 2)$$

$$\begin{cases} a_{12} - \varepsilon^\lambda a_{13} = 0, \\ a_{34} - \varepsilon^{-\lambda} a_{42} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{14} + \varepsilon^\lambda a_{42} = 0, \\ a_{23} + \varepsilon^{-\lambda} a_{13} = 0; \end{cases}$$

sodann aber durch B und seine Transformirten die folgenden 27:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon^{\varkappa+\lambda} a_{12} + \varepsilon^{\varkappa+\mu} a_{13} + \varepsilon^{\varkappa+\nu} a_{14} - \varepsilon^{\mu+\nu} a_{34} - \varepsilon^{\nu+\lambda+1} a_{42} - \varepsilon^{\lambda+\mu+2} a_{23} = 0, \\ \varepsilon^{\varkappa+\lambda} a_{12} + \varepsilon^{\varkappa+\mu+2} a_{13} + \varepsilon^{\varkappa+\nu+1} a_{14} + \varepsilon^{\mu+\nu} a_{34} - \varepsilon^{\nu+\lambda} a_{42} - \varepsilon^{\lambda+\mu} a_{23} = 0. \end{cases}$$

$$(\varkappa, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2; \quad \varkappa + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \bmod. 3).$$

Damit haben wir die den 45 *Geradenpaaren* (§ 62 a. E.) *entsprechenden Strahlencongruenzen.*

§ 64.

Die Untergruppe L; die 27 linearen Complexe I. Art.

Jede von den Geraden des vorigen Paragraphen schneidet 32 *von den übrigen Geraden;* so z. B. schneidet*):

$$(1)\qquad a_{13} - a_{14} = 0$$

von den 35 übrigen Geraden (§ 63, (5)) die 14 folgenden:

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} a_{13} - \varepsilon a_{14} = 0, \\ a_{13} - \varepsilon^2 a_{14} = 0, \\ a_{14} - \varepsilon^\lambda a_{12} = 0, \\ a_{12} - \varepsilon^\lambda a_{13} = 0, \\ a_{34} + \varepsilon^{-\lambda} a_{14} = 0, \\ a_{13} + \varepsilon^{-\lambda} a_{34} = 0; \end{array}\right\} (\lambda = 0, 1, 2)$$

ferner von den 27 Geraden der ersten Zeile in § 63, (6) alle diejenigen 9, für welche:

$$(3)\qquad \nu \equiv \mu + 1 \ (\text{mod. } 3),$$

*) Der Kürze halber bezeichnen wir in diesem Paragraphen eine Gerade durch die Gleichung desjenigen linearen Complexes, den die sie schneidenden Geraden bilden.

und von den 27 der zweiten Zeile diejenigen 9, für welche

$$\nu \equiv \mu \pmod 3 \tag{4}$$

ist. Die andere Gerade desselben Paares:

$$a_{42} - a_{23} = 0 \tag{5}$$

schneidet die conjugirten zu diesen 32 Geraden. So finden wir: *Jeder unserer* 45 *Congruenzen gegenüber zerfallen die* 44 *anderen in* 32, *von deren Axen jede eine Axe der ersten trifft, und in* 12, *deren Axen die der ersten nicht treffen.* (Witting p. 46).

Betrachten wir nunmehr zwei unserer Congruenzen, deren Axen sich nicht schneiden, z. B. die beiden folgenden:

$$\begin{cases} a_{13} - a_{14} = 0, \\ a_{42} - a_{23} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

und:

$$\begin{cases} a_{14} + a_{42} = 0, \\ a_{23} + a_{13} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Man sieht, dass dieselben *beide dem Complex:*

$$a_{13} - a_{14} - a_{42} + a_{23} = 0 \tag{8}$$

angehören. Dieser Complex enthält keine der übrigen in § 63, (5) enthaltenen Congruenzen; dagegen enthält er von den in § 63, (6) enthaltenen diejenigen, welche zu solchen Werthen von $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ gehören, dass die Gleichung:

$$\varepsilon^{\varkappa+\mu}(1-\varepsilon^2)a_{13} + \varepsilon^{\varkappa+\nu}(1-\varepsilon)a_{14} - \varepsilon^{\nu+\lambda}(\varepsilon-1)a_{42} - \varepsilon^{\lambda+\mu}(\varepsilon^2-1)a_{23} = 0 \tag{9}$$

denselben Complex wie die Glchg. (8) darstellt. Das verlangt aber nur:

$$\varkappa \equiv \lambda, \quad \mu \equiv \nu + 1, \pmod 3; \tag{10}$$

diese beiden Congruenzen zusammen mit § 62, (2) lassen 3 Lösungen zu, und man findet so, dass der Complex (8) von unseren 45 Congruenzen ausser (6) und (7) noch die 3 folgenden enthält:

$$\begin{cases} a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - a_{34} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - \varepsilon a_{34} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ \varepsilon^2 a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \varepsilon a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{34} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ \varepsilon a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon^2 a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Von den 10 Axen der Congruenzen (6), (7), (11), (12), (13) schneidet keine irgend eine der andern; dagegen wird jede der 80 übrigen Axen von je 4 aus jenen 10 geschnitten. Es bilden also jene 10 Axen eine solche *„Fünf von Geradenpaaren"* wie sie Herr Witting (Diss. p. 47)

definirt; und wir haben als erstes Resultat der Einführung von Liniencoordinaten den Satz:

Je fünf Congruenzen, deren Axen eine solche Fünf bilden, gehören einem und demselben linearen Complex an.

Solcher Complexe enthält unsere Configuration *siebenundzwanzig*; die Gleichungen derselben sind:

$$(14)\quad \left.\begin{aligned} \varepsilon^{\lambda}a_{12} - \varepsilon^{\mu}a_{13} - \varepsilon^{-\lambda}a_{34} + \varepsilon^{-\mu}a_{42} &= 0,\\ \varepsilon^{\lambda}a_{13} - \varepsilon^{\mu}a_{14} - \varepsilon^{-\lambda}a_{42} + \varepsilon^{-\mu}a_{23} &= 0,\\ \varepsilon_{\lambda}a_{14} - \varepsilon^{\mu}a_{12} - \varepsilon^{-\lambda}a_{23} + \varepsilon^{-\mu}a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} (\lambda, \mu = 0, 1, 2).$$

Dabei ist zu beachten, dass die linken Seiten dieser Gleichungen in dem Sinne *absolut normirt* sind, dass sie bei den Substitutionen der Gruppe G *ohne zutretende Factoren* unter sich vertauscht werden.

Die 27 Complexe (14) mögen als *„Complexe I. Art"* von den in § 65 auftretenden Complexen „II. Art" unterschieden werden.

Jeder dieser Complexe wird in sich übergeführt von einer Untergruppe unserer Gruppe G, welche in den Z geschrieben 1920, in den a_{ik} 960 Operationen enthält. Diejenige *Untergruppe* L, welche zu dem zuerst betrachteten Complex (8) gehört, wird erzeugt (vgl. II, § 43) von B, D und den beiden Operationen:

$$(15)\quad E = (DS_2^2)^2 : Z_1' = \varepsilon Z_1,\ Z_2' = \varepsilon Z_2,\ Z_3' = \varepsilon^2 Z_3,\ Z_4' = \varepsilon^2 Z_4;$$

$$(16)\quad F = (DC^2)^2 : Z_1' = Z_4,\ Z_2' = Z_3,\ Z_3' = -Z_2,\ Z_4' = -Z_1;$$

oder in Liniencoordinaten:

$$(17)\quad E: a_{12}' = \varepsilon^2 a_{12},\ a_{13}' = a_{13},\ a_{14}' = a_{14},\ a_{34}' = \varepsilon a_{34},\ a_{42}' = a_{42},\ a_{23}' = a_{23};$$

$$(18)\quad F: a_{12}' = -a_{34},\ a_{13}' = -a_{42},\ a_{14}' = a_{14},\ a_{34}' = -a_{12},\ a_{42}' = -a_{13},\ a_{23}' = a_{23}.$$

In der That bleibt die linke Seite von (8) bei allen diesen Operationen absolut ungeändert. Dieselben vertauschen die 40 Polartetraeder noch transitiv, aber diejenigen unter ihnen, welche ein solches Tetraeder noch fest lassen, vertauschen auch zwei von seinen Gegenkanten nur unter sich. Ebenso vertauschen sie die 40 Polarebenen noch transitiv; aber diejenigen unter ihnen, welche eine solche Ebene in sich überführen, lassen in ihr nicht nur ein syzygetisches Büschel von Curven 3. Ordnung fest, sondern auch einen von ihren gemeinsamen Wendepunkten und damit zugleich dessen harmonische Polare.

Durch jede der 45 Hauptcongruenzen gehen 3 von den 27 Complexen I. Art; so z. B. durch die Congruenz (6) die 3 Complexe:

$$\begin{aligned} a_{13} - a_{14} - a_{42} - a_{23} &= 0,\\ \varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} &= 0,\\ \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben bilden mit den Axen der Congruenz ein cyklisch-projectivisches System; die Summe der linken Seiten ihrer Gleichungen ist Null.

§ 65.

Die Untergruppe M; die 36 linearen Complexe II. Art.

Wie in II, § 44 können wir nunmehr die gegenseitige Gruppirung unserer 27 Complexe folgendermassen weiter untersuchen. Gehen wir von einem derselben aus — er heisse ξ_1 — so sehen wir, dass sich ihm gegenüber die 36 anderen spalten in 5 mal 2, welche mit ihm je eine Hauptcongruenz gemein haben, und 16, für welche das nicht der Fall ist. Greifen wir einen der letzteren — ξ_2 — heraus, so sind unter den 15 übrigen noch 10 enthalten, welche auch mit ξ_2 keine Hauptcongruenz gemein haben. Sei ξ_3 einer von diesen, so bleiben 6, welche mit ξ_1, ξ_2, ξ_3; sei ξ_4 einer von diesen, so bleiben zwei — ξ_5, ξ_6 — welche mit ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 und, wie sich herausstellt, auch unter sich keine Hauptcongruenz gemein haben. So gelangen wir zu einem *System von* 6 *Complexen I. Art, welche zusammen* 30 *verschiedene Hauptcongruenzen enthalten.* Solcher Systeme giebt es, wie aus der Art ihrer Herleitung hervorgeht, 72; eines derselben ist z. B. das folgende:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1 \equiv \varepsilon a_{12} - a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + a_{42} = 0, \\ \xi_2 \equiv \varepsilon a_{12} - \varepsilon a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} = 0, \\ \xi_3 \equiv \varepsilon a_{12} - \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon a_{42} = 0, \\ \xi_4 \equiv a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0, \\ \xi_5 \equiv \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon^2 a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0, \\ \xi_6 \equiv \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0. \end{cases}$$

Durch die damit eingeführten „Complexcoordinaten ξ" drücken sich die Liniencoordinaten a_{ik} aus wie folgt:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{12} = \frac{i}{3\sqrt{3}}(\varepsilon\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \varepsilon\xi_3 + \varepsilon^2\xi_4 + \varepsilon^2\xi_5 + \varepsilon_2\xi_6), \\ a_{13} = -\frac{1}{3}(\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \varepsilon\xi_3), \\ a_{14} = \frac{1}{3}(\xi_4 + \varepsilon^2\xi_5 + \varepsilon\xi_6), \\ a_{34} = \frac{i}{3\sqrt{3}}(\varepsilon^2\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \varepsilon^2\xi_3 + \varepsilon\xi_4 + \varepsilon\xi_5 + \varepsilon\xi_6), \\ a_{42} = \frac{1}{3}(\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \varepsilon^2\xi_3), \\ a_{23} = -\frac{1}{3}(\xi_4 + \varepsilon\xi_5 + \varepsilon^2\xi_6). \end{cases}$$

Dieselben 30 Hauptcongruenzen lassen sich aber auch noch auf eine andere Art in 6 Fünfen anordnen, entsprechend den 6 Complexen:

$$(3)\quad \begin{cases} \eta_1 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - a_{13} - \varepsilon a_{34} + a_{42} = 0, \\ \eta_2 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} = 0, \\ \eta_3 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon a_{34} + \varepsilon a_{42} = 0, \\ \eta_4 \equiv a_{14} - \varepsilon a_{12} - a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0, \\ \eta_5 \equiv \varepsilon a_{14} - \varepsilon a_{12} - \varepsilon^2 a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0, \\ \eta_6 \equiv \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{12} - \varepsilon a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0. \end{cases}$$

Dabei haben η_i und $\xi_\varkappa$ eine Hauptcongruenz gemein, wenn $i \gtrless \varkappa$, dagegen nicht, wenn $i = \varkappa$.

Auf diese Art ordnen sich die 72 *Sechsen von linearen Complexen zu* 36 *„Doppelsechsen" zusammen.* Für jede derselben ist:

$$(4)\quad \sum_{\varkappa=1}^{6} \xi_\varkappa \equiv - \sum_{\varkappa=1}^{6} \eta_\varkappa;$$

für die angegebene Doppelsechs z. B. ist der Werth beider Seiten gleich:

$$3i\sqrt{3}\,(a_{12} + a_{34}).$$

Gleich Null gesetzt giebt das die Gleichung eines neuen linearen Complexes; *wir erhalten so den* 36 *Doppelsechsen von linearen Complexen I. Art entsprechend,* 36 *„lineare Complexe II. Art".**) Ein solcher bleibt ungeändert bei 720 Substitutionen unserer Gruppe; die zu (4) gehörige Untergruppe M z. B. kann am einfachsten folgendermassen beschrieben werden: sie enthält einmal die 360 geraden Vertauschungen der ξ; dann aber noch die 360 Operationen, welche entstehen, wenn man die 360 ungeraden Vertauschungen der Indices $1, 2 \ldots 6$ mit der Vertauschung der Buchstaben ξ und η verbindet. Bei den ersteren bleibt (4) absolut invariant, bei den letzteren ändert es sein Zeichen.

Uebrigens drücken sich die η durch die ξ folgendermassen aus:

$$(5)\quad \begin{cases} \eta_1 \equiv \frac{1}{3}(\ 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_2 \equiv \frac{1}{3}(-\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_3 \equiv \frac{1}{3}(-\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_4 \equiv \frac{1}{3}(-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_5 \equiv \frac{1}{3}(-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 + 2\xi_5 - \xi_6), \\ \eta_6 \equiv \frac{1}{3}(-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 + 2\xi_6). \end{cases}$$

*) Man beachte bei diesem Schluss, dass die ξ absolut normirt sind.

Es ist also:

$$(6) \qquad \eta_\varkappa - \xi_\varkappa \equiv -i\sqrt{3}(a_{12}+a_{34}) \equiv -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6}{}' \xi_i$$

unabhängig vom Index $\varkappa$. Ferner ist:

$$(7) \qquad 27(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})$$
$$\equiv 4\sum \xi_i^2 - \sum \xi_i \xi_\varkappa \equiv \frac{9}{2}\sum \xi_i^2 - \frac{1}{2}\Big(\sum \xi_i\Big)^2$$
$$\equiv 4\sum \eta_i^2 - \sum \eta_i \eta_\varkappa \equiv \frac{9}{2}\sum \eta_i^2 - \frac{1}{2}\Big(\sum \eta_i\Big)^2.$$

Die übrigen 15 Complexe I. Art drücken sich durch die ξ und η sehr einfach aus. Ist nämlich $\zeta_{12} = 0$ derjenige Complex I. Art, welcher mit $\xi_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$ durch dieselbe Hauptcongruenz geht, so ist zufolge des letzten Satzes von § 64:

$$(8) \qquad \xi_1 + \eta_2 + \zeta_{12} \equiv 0;$$

also folgt:

$$(9) \qquad \zeta_{12} \equiv \frac{1}{3}(-2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6) \equiv \zeta_{21}.$$

Die übrigen werden durch Vertauschung der Indices erhalten. Diese ζ bilden dann mit den ξ, η die 35 übrigen Doppelsechsen. Zwei derselben sind:

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_{23} & \zeta_{24} & \zeta_{25} & \zeta_{26} \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_{13} & \zeta_{14} & \zeta_{15} & \zeta_{16} \end{pmatrix}$$

mit dem Complex II. Art:

$$(11) \qquad \xi_1 - \xi_2 = 0$$

und:

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \zeta_{56} & \zeta_{64} & \zeta_{45} \\ \zeta_{23} & \zeta_{31} & \zeta_{12} & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \end{pmatrix}$$

mit:

$$(13) \qquad 2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6 = 0;$$

aus der ersten gehen (15), aus der zweiten 20 durch Vertauschung der Indices hervor.

Unsere senäre Gruppe G kann demnach erhalten werden, indem man zu M noch die beiden Substitutionen:

$$(14) \quad \xi_1' = \xi_1, \quad \xi_2' = \eta_1, \quad \xi_3' = \zeta_{23}, \quad \xi_4' = \zeta_{24}, \quad \xi_5' = \zeta_{25}, \quad \xi_6' = \zeta_{26}$$

und:

$$(15) \quad \xi_1' = \zeta_{56}, \quad \xi_2' = \zeta_{64}, \quad \xi_3' = \zeta_{45}, \quad \xi_4' = \xi_1, \quad \xi_5' = \xi_2, \quad \xi_6' = \xi_3$$

hinzunimmt, wo rechts die η und ζ durch ihre Werthe aus (5) und (9) zu ersetzen sind. Alle diese Substitutionen haben reelle Coefficienten; soviel mir bekannt, ist dies, von trivialen Fällen abgesehen, überhaupt das erste Beispiel einer *endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen mit reellen rationalen Zahlencoefficienten.*

XV. Abschnitt.

Ausdruck der Invarianten der Gruppe der ε durch die Coefficienten des algebraischen Gebildes.

§ 66.

Reihenentwicklungen.

Die $Z_{\alpha\beta}$ mit *ungerader* Charakteristik sind (II, § 58) *gerade* Functionen ihrer Argumente. Setzt man die letzteren gleich Null, so gehen die $Z_{\alpha\beta}$ in Modulformen $\varepsilon_{\alpha\beta}$ über, welche nicht identisch Null sind. Die Invarianten F der Gruppe der Z — dieselben sind von Herrn Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 333, 337) angegeben — gehen dabei über in *Modulformen II. Stufe**) f, und zwar speciell in solche, deren Rationalitätsbereich durch die der Charakteristik entsprechende Zerlegung**):

$$f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5 \tag{1}$$

gegeben ist. Wir mögen etwa die Charakteristik:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right| \tag{2}$$

wählen; derselben entspricht bei dem von uns festgehaltenen canonischen Querschnittsystem***) die Zerlegung von f in:

$$\begin{gathered} \varphi_x \equiv (\alpha^{IV} x), \\ \psi_x{}^5 \equiv (\alpha^0 x)(\alpha' x)(\alpha'' x)(\alpha''' x)(\alpha^V x) \end{gathered} \tag{3}$$

Muliplicirt man die $\varepsilon_{\alpha\beta}$ noch mit:

$$\frac{1}{2} i c^{-2} \sqrt[8]{D_\psi^3}, \tag{4}$$

so erhält man Functionen, die mit

$$(\varepsilon_{\alpha\beta})$$

bezeichnet werden sollen. Von diesen brauchen wir im folgenden die Anfangsglieder ihrer Reihenentwicklungen nach Potenzen von p, q, r; diese bekommen wir aus ihrer Darstellung durch die Theta (II, § 32, Glchg. 24):

---

*) Dieser Ann. Bd. 35, p. 225.

**) Ebenda p. 244.

***) I p. 375; vgl. die dieser Ann. Bd. 32, p. 358 von Hrn. Klein gegebene Regel zur Bestimmung der zu einer bestimmten Zerlegung von f gehörenden Charakteristik.

$$(5)\quad \sqrt{p_{12}}\cdot(z_{\alpha\beta}) = \left(e^{\frac{\alpha\pi i}{3}} + e^{-\frac{\alpha\pi i}{3}}\right) p^{\frac{\alpha^2}{3}} q^{\frac{2\alpha\beta}{3}} r^{\frac{\beta^2}{3}} \vartheta(\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\ \alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\ 3\tau_{11},\ 3\tau_{12},\ 3\tau_{22})$$

$$= \left(e^{\frac{\alpha\pi i}{3}} + e^{-\frac{\alpha\pi i}{3}}\right) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{m_1} p^{\frac{1}{3}\left(3\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+\alpha\right)^2} \cdot q^{\frac{2}{3}\left(3\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+\alpha\right)(3m_2+\beta)} r^{\frac{1}{3}(3m_2+\beta)^2},$$

Wir finden nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{p_{12}}(z_1) = p^{\frac{1}{12}}\{-1+p^2+\cdots\}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_2) = 2p^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{3}}(q-q^{-1})\{1-rs+\cdots\}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_3) = p^{\frac{1}{12}} q^{-\frac{1}{8}} r^{\frac{1}{3}}\{-1-qr+p^2q^2+p^2rq^{-3}+\cdots\}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_4) = -p^{\frac{1}{12}} q^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}\{-1-q^{-1}r+p^2q^{-2}+p^2rq^{-3}+\cdots\}. \end{cases}$$

Dabei sind in den Klammern die weggelassenen Glieder von höherer als der dritten Ordnung in p, r, s. Für die Invarianten der „Hesse'schen Gruppe"*) ergibt sich daraus mit derselben Annäherung:

$$(7)\quad \begin{cases} p_{12}^3(c_6) = p^{\frac{1}{2}}\{1-6p^2-10rs-72r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^6(c_{12}) = p\{1-12p^2+4rs+240r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^6(c_{12}) = pr^{\frac{2}{3}}\{-1+8p^2-4rs+8r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^9(c_{18}) = p^{\frac{3}{2}}\{1-18p^2+6rs-504r^2+\cdots\}. \end{cases}$$

(In der That befriedigen diese Entwickelungen die zweite Relation (10) bei Maschke (a. a. O. p. 326)).

Endlich erhalten wir für die Invarianten der Hauptgruppe G die Entwicklungen:

$$(8)\quad \begin{cases} p_{12}^6(f_{12}) = 6p\{1-12p^2+176r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^9(f_{18}) = 54p^{\frac{3}{2}}\{-1+18p^2+136r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^{12}(f_{24}) = 1728p^2\{8r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^{15}(f_{30}) = 2592p^{\frac{5}{2}}\{-8r^2+\cdots\}, \\ p_{12}^{20}(f_{40}) = 8p^4r^4\{-2-4rs-38p^2-2r^2-s^2+\cdots\}, \end{cases}$$

*) Dieselben sind hier aus $z_1, z_2, -z_4$ gebildet, die bezw. Maschke's z_1, z_2, z_3 entsprechen.

ebenfalls abgesehen von Gliedern höherer als der 3. Ordnung in p, r, s, innerhalb der Klammern*).

§ 67.

Die $(z_{\alpha\beta})$ sind ganze algebraische Functionen der Coefficienten der Grundform.

Die $(z_{\alpha\beta})$ sind, wie unmittelbar aus ihrer Definition (§ 66, 5) hervorgeht, Modulformen vom Grade $\frac{1}{2}$ in den Coefficienten der Grundform f_6; es ist zu zeigen, dass sie *ganze* algebraische Functionen dieser Coefficienten sind.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst: Sind die Wurzeln von $f_6 = 0$ alle von einander verschieden, so bleiben die $(z_{\alpha\beta})$ endlich. Das folgt unmittelbar aus den Reihenentwicklungen von § 66 auf Grund des in I, § 24 an die Spitze gestellten Satzes.

Ferner müssen wir untersuchen, was aus den $(z_{\alpha\beta})$ wird, wenn zwei Wurzeln von $f = 0$ zusammenfallen. Da bei Vertauschung der Wurzeln von $\psi = 0$ (linearer Periodentransformation, welche die Charakteristik festlässt) die (z) sich linear mit constanten Coefficienten substituiren, so genügt es, wenn wir die folgenden beiden Fälle untersuchen:

1. Es falle α' mit α'' zusammen (zwei Nullstellen von ψ). Dabei bleibt (I, § 5) p_{12} endlich und p wird von der 1. Ordnung unendlich klein. Es werden also die (z) nicht nur nicht unendlich gross, sondern es wird sogar (z_2) von der Ordnung $\frac{3}{4}$, die drei andern (z) jedes von der Ordnung $\frac{1}{12}$ unendlich klein.

2. Es falle α''' mit α^{IV} zusammen (eine Nullstelle von ψ mit der von φ). Dieser Fall kann aus dem vorigen dadurch abgeleitet werden, dass man α^0 mit α^V, α' mit α^{IV}, α'' mit α''' vertauscht; dem entspricht [vgl. Grundz.**) § 8 und dazu die I, § 1 vorgenommene Abänderung] die Periodentransformation D, durch welche (Grundz. § 7) p mit r vertauscht wird, während p_{12} in $-p_{12}$ übergeht und q ungeändert bleibt. Beim Zusammenfallen von α''' und α^{IV} bleibt demnach p_{12} endlich und r wird von der 1. Ordnung unendlich klein. In Folge dessen bleibt (z_1) endlich und von Null verschieden, die andern drei (z) werden jedes von der Ordnung $\frac{1}{3}$ unendlich klein.

Es werden also die (z) sicher nicht unendlich gross, solange nicht

*) Auf die angegebenen Glieder der ersten 4 Entwicklungen (8) haben nur die von Hrn. Maschke sogenannten „Leitterme" Einfluss.

**) Dieser Ann. Bd. 35, p. 198ff.

mehr als zwei Nullstellen von f zusammenfallen. Da wir aber bereits wissen, dass sie *algebraische* Functionen der Coefficienten von f sind, so genügt das,*) um schliessen zu können, dass sie *ganze* algebraische Functionen derselben sind.

§ 68.

Ausdrücke der Gruppeninvarianten durch die Coefficienten von φ und ψ.

Aus den Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen folgt für die Invarianten (f), dass sie *ganze* Invarianten von φ_1 und ψ_5 sind, von einem Grade in den Coefficienten jeder einzelnen dieser beiden Formen, welcher halb so gross ist als ihr Grad in den (x); und dass sie Producte *rationaler* solcher Invarianten in bestimmte Potenzen der 8. Wurzel aus der Discriminante von ψ sind.

Die Exponenten dieser Potenzen sind zunächst mod. 8 dadurch bestimmt, dass $(x_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} i c^{-2} \sqrt[8]{D_\psi^3} \cdot x_{\alpha\beta}$ war (§ 66, 4); näher präcisiren sie sich aus den Entwicklungen § 66, 8, nämlich aus den Exponenten der dort als Factoren vortretenden Potenzen von p. Man findet so:

$$(1)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{f}_{12}) = D^{\frac{1}{2}} \cdot J_{6,2}, \\ (\mathfrak{f}_{18}) = D^{\frac{3}{4}} \cdot J_{9,3}, \\ (\mathfrak{f}_{24}) = D \cdot J_{12,4}, \\ (\mathfrak{f}_{30}) = D^{\frac{5}{4}} \cdot J_{15,5}, \\ (\mathfrak{f}_{40}) = D^2 \cdot J_{20,4}. \end{cases}$$

Darin bedeutet $J_{\varkappa,\lambda}$ eine rationale ganze Simultaninvariante von φ und ψ vom Grade $\varkappa$ in den Coefficienten von φ, vom Grade λ in denjenigen von ψ; oder anders ausgedrückt eine Covariante von ψ, vom Grade λ in den Coefficienten, von der Ordnung $\varkappa$ in den Variabeln, in welcher die Variabeln durch die Coordinaten der Nullstelle von φ ersetzt sind.

Nun existirt**) nur je eine $J_{6,2}$ und $J_{9,3}$, nämlich die Hesse'sche Form H von ψ und die Functionaldeterminante T von H und ψ; dagegen existiren je zwei linear unabhängige $J_{12,4}$ und $J_{15,5}$, nämlich einerseits H^2 und $\psi^2 . i$, andererseits $H . T$ und $\psi^2 . (i,\psi)_1$, wenn mit i die vierte Ueberschiebung von ψ über sich selbst bezeichnet wird. In den beiden letzteren Fällen geben die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen von $(\mathfrak{f}_{24})$ und $(\mathfrak{f}_{30})$ die Entscheidung; dieselben verschwinden

*) Vgl. I, § 24, sowie Klein, diese Ann. Bd. 36, p. 69.

**) Vgl. etwa Clebsch, binäre Formen (Leipzig 1872) p. 277).

für $r = 0$, und diese Eigenschaft haben H^2 und HT nicht, wohl aber ψ^2, und zwar in der richtigen Ordnung. Es ist ja ψ, in den Coordinaten der Nullstelle von φ geschrieben, nichts anderes als die Resultante von φ und ψ.*) Ebenso ergiebt sich aus der Reihenentwicklung, dass (f_{40}) den Factor ψ^4 enthalten muss. Sonach erhält man statt der Ausdrücke (1) die folgenden bestimmteren:

$$(2)\qquad \begin{cases} (f_{12}) = D^{\frac{1}{2}} \cdot [H], \\ (f_{18}) = D^{\frac{3}{4}} \cdot [T], \\ (f_{24}) = D \cdot [\psi^2 i], \\ (f_{30}) = D^{\frac{5}{4}} \cdot [\psi^2 (i\psi)_1], \\ (f_{40}) = D^2 \cdot [\psi^4]. \end{cases}$$

Besondere Beachtung verdient hier der Ausdruck von (f_{40}); er ist nämlich gleich dem Quadrat der Discriminante von $f = \varphi\psi$. (f_{40}) ist also eine Modulform *erster* Stufe. — Durch die eckigen Klammern ist angedeutet, dass die Variabeln durch die Coordinaten der Nullstelle von φ zu ersetzen sind.

Für die Normalform des Hrn. Weierstrass:

$$\varphi = x_2, \quad \psi = 4x_1^5 - g_2 x_1^3 x_2^2 - g_3 x_1^2 x_2^3 - g_4 x_1 x_2^4 - g_5 x_2^5$$

wird insbesondere**):

$$\begin{cases} [H] = -\frac{2}{5} g_2, \\ [T] = -\frac{8}{5} g_3, \\ [i] = -\frac{4}{5} g_4 + \frac{3}{100} g_2^2, \\ [(i\psi)_1] = -16 g_5 + \frac{2}{25} g_2 g_3, \\ [\psi] = 4; \end{cases}$$

damit sind die von Hrn. Klein als Ergebniss der Untersuchungen des Hrn. Maschke in Aussicht gestellten***) Ausdrücke gefunden.

Eine Bemerkung sei noch beigefügt. Der von Hrn. Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 339, Glchg. (37)) gegebene Ausdruck von F_{40}^3 durch die übrigen Invarianten muss, wenn die Ausdrücke (2) und (3)

*) Rückwärts folgt hieraus, dass in den Entwicklungen von (f_{24}) und (f_{30}) nicht nur die Anfangsglieder, sondern auch alle folgenden durch r^2 theilbar sein müssen.

**) Man vgl. die expliciten Ausdrücke der Covarianten etwa bei Faà di Bruno-Walter, Einleitung in die Theorie der binären Formen (Leipzig 1881) p. 328 ff.

***) a. a. O. p. 169.

in denselben eingeführt werden, nach Division mit $D^5[\psi^{12}]$ einfach übergehen in den Ausdruck der Discriminante D durch die Coefficienten. Da nun die Discriminante der Form 5^{ten} Grades sich nicht als Summe von Producten von Formen niedrigerer Grade darstellen lässt, so darf man nicht erwarten, dass jener Ausdruck sich durch einen übersichtlicheren ersetzen liesse, wie man sonst etwa nach Analogie von II, § 49, Glchg. (11) vermuthen könnte.

XVI. Abschnitt.

Invarianten der senären Gruppe der a_{ik}.

§ 69.

Invarianten der Untergruppe G_0.

In diesem Abschnitt sollen einige Angaben über Invarianten der senären Gruppe der a_{ik}, bezw. ihrer Untergruppe gemacht werden; unter Verzicht auf Vollständigkeit beschränken wir uns dabei auf die im folgenden zu benutzenden einfachen Resultate.

Wir beginnen mit den Invarianten der von C, D, S_2 erzeugten Untergruppe G_0. Bei derselben werden zunächst aus C und D die 24 Vertauschungen der Indices 1, 2, 3, 4 erhalten; jede dieser Vertauschungen ist aber noch mit Zeichenwechseln bestimmter a_{ik} zu verbinden, die man am bequemsten daraus abliest, dass

$$A_1 = (a_{12}+a_{13}+a_{14}) - (a_{34}+a_{42}+a_{23}) \tag{1}$$

bei jeder *geraden* Vertauschung der Indices ungeändert bleibt, bei jeder *ungeraden* sein Zeichen ändert. Ferner werden von S_2 und seinen Transformirten die a_{ik} in der Weise mit dritten Einheitswurzeln multiplicirt, dass die Invarianten von G_0 die a_{ik} nur in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten oder in den Verbindungen $a_{12}a_{34}$, $a_{13}a_{42}$, $a_{14}a_{23}$ enthalten können. Berücksichtigt man beides, so findet man als einfachste Invarianten von G_0 die folgenden:

Zunächst haben wir die selbstverständliche Invariante *zweiten* Grades:

$$A_2 = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}; \tag{2}$$

ferner eine von A_2^2 linear unabhängige Invariante *vierten* Grades:*)

$$A_4 = a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{42}^2 + a_{14}^2a_{23}^2; \tag{3}$$

dann eine Invariante *fünften* Grades:

*) Sind die a_{ik} als Liniencoordinaten an die Bedingung $A_2 = 0$ geknüpft, so zerfällt $A_4 = 0$ in die beiden Complexe derjenigen Geraden, welche von den Ebenen des Fundamentaltetraeders in äquianharmonischen Punktgruppen getroffen werden.

$$A_5 = a_{12}a_{34}(a_{13}^3 - a_{14}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3) + a_{13}a_{42}(a_{14}^3 - a_{12}^3 - a_{23}^3 + a_{34}^3) + a_{14}a_{23}(a_{12}^3 - a_{13}^3 - a_{34}^3 + a_{42}^3);$$

dann drei von A_2^3 und A_2A_4 linear unabhängige Invarianten *sechsten* Grades:

(4) $$A_6 = a_{12}a_{34}\,a_{13}a_{42}\,a_{14}a_{23},$$

(5) $$A_6' = a_{12}^6 + a_{13}^6 + a_{14}^6 + a_{34}^6 + a_{42}^6 + a_{23}^6,$$

(6) $$A_6'' = \sum \pm a_{12}^3 a_{13}^3.$$

Dabei ist in A_6'' die Summe über alle durch Vertauschung der Indices sich ergebenden Glieder zu erstrecken, und die Vorzeichen sind nach der oben gegebenen Regel zu bestimmen.

Neben diesen Invarianten geraden Grades bemerken wir als einfachste Invariante *ungeraden* Grades die folgende:

(7) $$A_9 = (a_{12}^3 - a_{13}^3 - a_{34}^3 + a_{42}^3)(a_{13}^3 - a_{14}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3)(a_{14}^3 - a_{12}^3 - a_{23}^3 + a_{34}^3).$$

Alle bisher genannten Formen (2)—(7) sind *absolute* Invarianten von G_0; dagegen bleibt:

(8) $$A_3 = (a_{12}^3 + a_{13}^3 + a_{14}^3) - (a_{31}^3 + a_{24}^3 + a_{23}^3)$$

zwar bei C und S_2 absolut ungeändert, wechselt aber bei D sein Zeichen.

§ 70.

Invarianten der Untergruppe H.

Die Operationen B, C, S_2 erzeugen im senären Gebiet der a_{ik} eine Gruppe H von 648 linearen Substitutionen, welche folgendermassen zu charakterisiren ist:

(1) $$a_{12} = x_1, \quad a_{13} = x_2, \quad a_{14} = x_3$$

(die Coordinaten des Schnittpunkts der Raumgeraden (a_{ik}) mit der Coordinatenebene $Z_4 = 0$) substituiren sich für sich nach einer „Hesse'schen Gruppe", wie sie uns bereits wiederholt begegnet ist;

(2) $$a_{34} = u_1, \quad a_{42} = u_2, \quad a_{43} = u_3$$

(die Coordinaten der Projection derselben Geraden vom Punkte $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ auf die Ebene $Z_4 = 0$) erfahren dabei jedesmal die contragrediente Substitution, sodass:

(3) $$u_x \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$$

absolut invariant bleibt. *Demnach sind die Invarianten dieser senären Gruppe nichts anderes als die Combinanten des syzygetischen Büschels von Curven dritter Ordnung:*

(4) $$\varkappa(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\lambda x_1x_2x_3 = 0$$

mit den beiden contragredienten Variabelnreihen der x und der u.

Solche Combinanten haben Clebsch und Gordan*) in symbolischer Form mitgetheilt; wir entnehmen ihrer Arbeit die nachstehenden Resultate.**)

Zunächst hat man die von Hrn. Maschke bereits benutzten 5 Formen C_6, C_9, C_{12}, $\mathfrak{C}_{12}$, C_{18}, welche nur die x enthalten; ihnen treten 5 entsprechend gebildete $C_6', \ldots, C_{18}'$ zur Seite, welche nur die u enthalten. Ferner haben wir die beiden fundamentalen Combinanten:

$$(5) \qquad N_{4,1} = u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + u_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + u_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3)$$

(Cl. u. G. (59)) und:

$$(6) \qquad \mathsf{N}_{1,4} = u_1 x_1 (u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2 (u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3 (u_1^3 - u_2^3)$$

(Cl. u. G. (79)), sowie die aus ihnen durch einfache Operationen abzuleitenden:***)

$$(7) \quad C_{7,1} = \sum_i \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial u_i} = u_1 x_1 (x_2^6 + x_3^6 + 4 x_2^3 x_3^3 - 3 x_1^3 x_2^3 - 3 x_1^3 x_3^3) + \cdots,$$

$$(8) \quad C_{1,7} = \sum_i \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial u_i} = u_1 x_1 (u_2^6 + u_3^6 + 4 u_2^3 u_3^3 - 3 u_1^3 u_2^3 - 3 u_1^3 u_3^3) + \cdots,$$

$$(9) \quad \Gamma_{4,4} = \sum \frac{\partial N}{\partial u_1} \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x_1} = u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3)(u_2^3 - u_3^3) + \cdots$$

(Cl. u. G. (71), (82)).

Weitere Combinanten erhält man, indem man auch solche Formen als Durchgangspunkte benutzt, die keine Combinanten sind: nämlich die zu φ und ψ†) dualen Formen (Cl. u. G. (13), (20), (51)):

$$(10) \qquad \Pi = 18 u_1 u_2 u_3,$$

$$(11) \qquad \mathsf{P} = -(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3);$$

dann die einander paarweise dualen:

$$(12) \qquad \mathsf{H} = x_1^2 u_2 u_3 + \cdots \qquad \text{(Cl. u. G. (20))},$$

$$(13) \qquad \Theta = u_1^2 x_2 x_3 + \cdots \qquad \text{(Cl. u. G. (3))};$$

endlich die zu sich selbst duale:

$$(14) \qquad \mathsf{K} = u_1^2 x_1^2 - 2 u_1 u_2 x_1 x_2 + \cdots \qquad \text{(Cl. u. G. (22a))}.$$

Sie geben die Combinanten:

---

*) Ueber cubische ternäre Formen, dieser Ann. Bd. 6, p. 436 ff. (1873).

**) Die Zahlenfactoren sind z. T. abweichend normirt.

***) Die durch Punkte angedeuteten Glieder ergeben sich aus den angesetzten durch cyklische Vertauschung der Indices.

†) Bei Clebsch und Gordan f und Δ.

(15) $C_{3,3} = \varphi\Pi - \psi\mathsf{P} = 18x_1x_2x_3u_1u_2u_3 + (x_1^3+x_2^3+x_3^3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3)$
(Cl. u. G. p. 473);

(16) $C_{4,4} = \Theta\mathsf{K} + \mathsf{H}^2 = x_1^4u_2^2u_3^2 + x_1^3x_2u_1^2u_3^2 + x_1^2x_2x_3u_1^4$
$- 2x_1^2x_2x_3u_1u_2^3 + \cdots,$

(17) $C'_{4,4} = \mathsf{HK} + \Theta^2 = x_1^4u_1^2u_2u_3 - 2x_1^3x_2u_1u_2^2u_3 + x_1^2x_2^2u_3^4$
$+ x_1^2x_2^2u_1^3u_3 + \cdots$
(Cl. u. G. (73)).

Ausser diesen von Clebsch und Gordan aufgeführten Formen haben wir aber noch als Combinanten die beiden Functionaldeterminanten von N, N und u_x nach den x und nach den u, nämlich:

(18) $C_{3,6} = 3x_1^3u_1u_2u_3(u_2^3-u_3^3) + x_1^2x_2u_2^2u_3(2u_1^3-u_2^3-u_3^3)+\cdots,$
(19) $C_{6,3} = 3u_1^3x_1x_2x_3(x_1^3-x_2^3) + x_1^2x_2u_1u_3^2(2x_1^3-x_2^3-x_3^3)+\cdots,$
sowie die beiden durch Anwendung des invarianten Processes

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial u_3}$$

aus diesen hervorgehenden:

(20) $C_{2,5} = x_1^2u_2u_3(u_2^3-u_3^3) + \cdots,$
(21) $C_{5,2} = u_1^2x_2x_3(x_2^3-x_3^3) + \cdots.$

§ 71.

Invarianten der Hauptgruppe G.

Die Invarianten der Hauptgruppe G können nunmehr einfach dahin charakterisirt werden, dass sie zugleich dem Formenkreis von G_0 (§ 69) und dem von H (§ 70) angehören müssen. Auf Grund dieser Bemerkung findet man als Invarianten der niedrigsten Grade die drei folgenden:

(1) $J_2 = A_2 = u_x = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23};$
(2) $J_5 = A_5 = N - \mathsf{N} = a_{12}a_{34}(a_{13}^3 - a_{14}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3) + \cdots;$
(3) $J_6 = C_6 + C_6' + 10C_{3,3} = A_6' - 5A_2^3 + 15A_2A_4 + 10A_6'' + 150A_6$
$= a_{12}^6 + 10a_{12}^3a_{13}^3 + 10a_{12}^3a_{34}^3 + \cdots + 180a_{12}a_{13}a_{14}a_{34}a_{42}a_{23}.$

XVII. Abschnitt.

Algebraisches über das Problem der Z.

§ 72.

Allgemeine Bemerkungen.

Die algebraische Theorie des „Problems der Z“ ist im wesentlichen von Hrn. Maschke in § 10 seiner mehrerwähnten Arbeit entwickelt worden; wir brauchen dem für unsere Zwecke nur wenig hinzuzufügen.

Zunächst sei der Vollständigkeit wegen erwähnt, dass die Gruppe G von 51840 Substitutionen die *Monodromiegruppe* unseres Problems in Bezug auf a, b, c, d, e als Parameter repräsentirt. Die in unseren Formeln auftretende dritte Einheitswurzel ε ist dabei (wie in II, § 51) als adjungirt vorausgesetzt; die *arithmetische* Gruppe des Problems enthält die doppelte Anzahl von Substitutionen.

Wollen wir (vgl. II, § 52) das „Formenproblem der Z" durch ein „Gleichungssystem" ersetzen, so können wir etwa wählen:

$$(1) \qquad \frac{F_{24}}{F_{12}^2} = \alpha, \quad \frac{F_{30}}{F_{12}F_{18}} = \beta, \quad \frac{F_{18}^2}{F_{12}^3} = \gamma.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt

$$24 \cdot 30 \cdot 36 = 25920$$

Lösungen. Da die Collineationsgruppe der Z zu der zugehörigen homogenen Substitutionsgruppe nur *hemiedrisch* isomorph ist (vgl. Maschke a. a. O. p. 321), so bedarf es nach der Lösung dieses Gleichungssystems noch der Ausziehung einer Quadratwurzel, um zu den Lösungen des Formenproblems zu gelangen. Wir brauchen dazu*) nur irgend eine rationale Function der Invarianten, welche in den z vom zweiten Grad ist; eine solche ist z. B.:

$$(2) \qquad X = \frac{F_{16}F_{24}}{F_{40}}.$$

Was die Bildung von *Resolventen* unseres Problems betrifft, so gestalten sich dieselben noch weniger einfach als in II (§ 53ff). Denn auch die einfachsten absoluten Invarianten der Untergruppen, welche in Betracht kommen würden: $(Z_1Z_2Z_3Z_4)^2$ bei G_0, Z_1^6 bei H etc. geben schon Gleichungen von Gradzahlen wie 320, 240 etc. Auf eine Ausrechnung derselben dürfen wir daher wohl verzichten.

§ 73.

Reduction des Problems der Z auf das der Y.

Das Problem der Z steht mit dem der Y in einem ähnlichen Zusammenhange, wie das Ikosaederproblem mit dem ternären Problem der A**).

Einerseits muss es daher Functionen der Z geben, welche genau wie die Y sich substituiren. Nach der von Hrn. Klein in Bd. 15 dieser Annalen gegebenen Methode***) findet man als die einfachsten solchen Functionen:

*) Vgl. Klein, Vorl. über das Ikosaeder (Leipzig 1884) p. 64; p. 235.

**) Ikosaeder p. 411f.

***) Man vgl. auch die vorstehende Note.

$$(1)\qquad \begin{cases} \Upsilon_0 = \quad 6 z_1 z_2 z_3 z_4, \\ \Upsilon_1 = -z_1(* + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3), \\ \Upsilon_2 = -z_2(z_1^3 + * + z_3^3 - z_4^3), \\ \Upsilon_3 = -z_3(z_1^3 - z_2^3 + * + z_4^3), \\ \Upsilon_4 = -z_4(z_1^3 + z_2^3 - z_3^3 + *). \end{cases}$$

Bilden wir aus diesen Υ die Invarianten J (II, § 47), so müssen sie rationalen ganzen Functionen der Invarianten F der Gruppe der Z*) gleich werden. Dabei findet man zunächst

$$(2)\qquad J_4(\Upsilon) \equiv 0;$$

denn als Function der Z würde $J_4(\Upsilon)$ eine Invariante 16. Grades werden, und eine solche existirt nicht. *In der That ist selbstverständlich, dass zwischen den* 5 *Functionen* Υ *der* 4 *Variabeln* Z *eine identische Relation bestehen muss; diese wird eben durch* (2) *dargestellt.*

Ebenso schliesst man, dass sich $J_{10}(\Upsilon)$ von F_{40} nur durch einen rein numerischen Factor unterscheiden kann; um diesen zu bestimmen, berechnet man beiderseits die Glieder, welche Z_1^{28}, die höchste vorkommende Potenz von Z_1, zum Factor haben, und findet:

$$(3)\qquad J_{10}(\Upsilon) = -2F_{40}.$$

Bei Bestimmung der noch übrigen Invarianten dürfen wir zur Vereinfachung:

$$(4)\qquad Z_1 = 0$$

setzen, was:

$$(5)\qquad \Upsilon_0 = 0, \quad \Upsilon_1 = 0,$$

$$(6)\qquad \Upsilon_2 = z_2(z_4^3 - z_3^3), \quad \Upsilon_3 = z_3(z_2^3 - z_4^3), \quad \Upsilon_4 = z_4(z_3^3 - z_2^3)$$

ergiebt; denn es sind sowohl die noch in Betracht kommenden F durch ihre von Z_1 freien, als die J durch ihre von Υ_0 und Υ_1 freien Glieder („Leitterme") völlig bestimmt. Diese Formeln (6) stellen Functionen der 3 Grössen Z_2, Z_3, Z_4 vor, welche sich zu den Z cogredient substituiren, wenn diese einer „Hesse'schen Gruppe"**) linearer Substitutionen unterworfen werden. Die aus ihnen gebildeten Invarianten dieser Gruppe müssen sich also durch die aus den Z gebildeten rational und ganz ausdrücken.***) Um diese Ausdrücke zu finden, beachten wir zunächst, dass, für $Z_2 = Z_3$, $\Upsilon_2 = -\Upsilon_3$ und $\Upsilon_4 = 0$, also $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ wird. Wegen der invarianten Natur unserer Functionen folgt hieraus, dass φ' und ψ' durch C_9 theilbar sein müssen; und in der That findet man:

*) Maschke, dieser Ann. Bd. 33, p. 337.

**) Maschke a. a. O. p. 324 ff.

***) Für die letzteren gebrauchen wir die von Maschke eingeführten Zeichen, für die ersteren dieselben Zeichen mit Accenten.

(7) $$\varphi' = -\varphi C_9, \quad \psi' = -\psi C_9$$

und hieraus weiter:

(8) $$C_{12}' = C_{12}C_9^4, \quad \mathfrak{C}_{12}' = \mathfrak{C}_{12}C_9^4, \quad C_{18}' = C_{18}C_9^4.$$

Etwas umständlicher ist die Ausrechnung von C_6'. Wir setzen zunächst mit unbestimmten Coefficientea an:

(9) $$C_6' = \alpha C_6^4 + \beta C_6^2 C_{12} + \gamma C_6 C_{18} + \delta C_{12}^2.$$

Diese unbestimmten Coefficienten berechnen wir mit Hilfe einer Reihe specieller Annahmen. Zuerst setzen wir für Z_2 und Z_3 unendlich kleine Grössen 1. Ordnung; dabei werden alle drei Υ in (6) unendlich klein, also muss C_6' mindestens von der 6. Ordnung unendlich klein werden. Das gibt die Bedingungen:

(10a) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

(10b) $$-40\alpha - 16\beta - 4\gamma + 8\delta = 0.$$

Ferner setzen wir nach einander für (Z_2, Z_3, Z_4) die Werthe $(1, 1, 0)$; $(1, -1, 0)$; $(1, 1, -1)$ ein; das gibt die drei weiteren Bedingungen:

(10c) $$4096\alpha + 1024\beta - 512\gamma + 256\delta = 12,$$

(10d) $$1728\alpha = 1,$$

(10e) $$28561\alpha - 36335\beta - 68783\gamma + 46225\delta = 0.$$

Diese 5 Bedingungsgleichungen (10) sind mit einander verträglich; man findet mit ihrer Hilfe:

(11) $$1728 C_6' = C_6^4 + 6C_6^2 C_{12} - 16 C_6 C_{18} + 9 C_{12}^2.$$
$$= -\tfrac{1}{54} C_6 C_9^2 + 9(C_6^2 - C_{12}).$$

Aus diesen Ausdrücken für die Invarianten der Hesse'schen Gruppe findet man nun die entsprechenden für die Invarianten der Hauptgruppe. Zunächst erhält man, indem man II, § 47, Glchg. (2) mit Maschke Glchg. 31 vergleicht:

(12) $$J_6(\Upsilon) = -\tfrac{1}{216} F_{24};$$

(in der That werden für $Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0$ sowohl $J_6(\Upsilon)$, als F_{24}, aber nicht F_{12} zu Null). Ferner betrachten wir statt J_{12} die Combination $J_6^2 - 384 J_{12}$, deren Leitglied $64 C_{12}'$ (wegen (8)) $= 64 C_{12} C_9^4$ ist. Dies muss sich durch die Leitglieder L der F in der Form ausdrücken lassen:

(13) $$C_{12} C_9^4 = \alpha L_{12}^4 + \beta L_{12}^2 L_{24} + \gamma L_{12} L_{18}^2 + \delta L_{18} L_{30} + \varepsilon L_{24}^2.$$

Um hier die Coefficienten zu bestimmen, beachte man, dass wegen Maschke's erster Gleichung (10) die rechte Seite verschwinden muss, wenn man darin $2C_{18}$ durch $3C_6C_{12} - C_6^3$ ersetzt. Man erhält damit:

$$(14)\quad J_{12}(\Upsilon) = -\frac{1}{2^{13}3^7 5^5}(1296 F_{12}^4 - 4500 F_{12}^2 F_{24} - 96 F_{12} F_{18}^2 + 800 F_{18} F_{30} - 625 F_{24}^2).$$

In analoger Weise würde endlich auch noch $J_{15}(\Upsilon)$ zu berechnen sein.*)

XVIII. Abschnitt.

Reduction der Gleichungen 27. Grades, deren Gruppe mit der des Problems der a_{ik} isomorph ist, auf dieses Problem.

§ 74.

Einleitende Erörterungen.

Die Wurzeln einer Gleichung 27. Grades, deren Gruppe mit unserer Gruppe von 25920 Substitutionen holoedrisch isomorph ist, müssen**) folgende Eigenschaften besitzen: Wenn man irgend eine derselben adjungirt, zerfallen die 26 übrigen in $10 + 16$; wir mögen etwa die ersteren als zu der ersten Wurzel conjugirt, die letzteren als zu ihr nicht conjugirt bezeichnen. Die damit definirte Beziehung des Conjugirtseins zweier Wurzeln ist eine gegenseitige. Man kann die 27 Wurzeln folgendermassen bezeichnen:

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & \\ w_{23} & w_{24} & w_{25} & w_{26} & & \\ w_{34} & w_{35} & w_{36} & & & \\ w_{45} & w_{46} & & & & \\ w_{56}, & & & & & \end{array}$$

*) Wie man das Problem der a_{ik} auf das der Z reduciren kann, indem man zu einem Complex (a_{ik}) einen covarianten Punkt (Z_i) mit Hilfe zweier Quadratwurzeln bestimmt, ist von Hrn. Klein in der mehrerwähnten Skizze in Liouville's Journal gezeigt worden. Was die Reduction des Problems der a_{ik} auf das der Y und umgekehrt betrifft, so sei darüber nur folgendes bemerkt: die einfachste Function der a_{ik}, welche zu derselben Untergruppe wie Y_0 gehört, nämlich das A_8 des § 69, führt *nicht* zu Functionen, welche sich wie die Y substituiren; und ebensowenig gibt es einfache Functionen der Y, welche sich wie die ξ resp. die a_{ik} verhalten.

**) Die Ausdrucksweise des Textes setzt voraus, das alle Untergruppen des Index 27, welche unsere Gruppe G besitzen mag, unter einander und insbesondere mit der Untergruppe L des § 64 isomorph sind. Dass dem so ist, wird man wohl annehmen dürfen, da man trotz vielfacher Beschäftigung mit der Gruppe auf keine andern geführt worden ist; indess bedarf es noch des Beweises. Sollte sich das Gegentheil herausstellen, so würden die im Text genannten Gleichungen in mehrere Classen zerfallen, und die Entwicklungen dieses Abschnitts würden nur von einer dieser Classen gelten. Der Beweis ist von Dickson geführt worden, siehe Transactions Amer. math. Soc. vol 5 (1904) pag. 126

in der Weise dass bezüglich des Conjugirtseins der Wurzeln folgendes gilt: Zu einer Wurzel u_i sind diejenigen 5 Wurzeln v_k conjugirt, deren Index $k \gtrless i$ ist, ferner diejenigen 5 Wurzeln w_{ik}, deren einer Index $= i$ ist; ebenso zu einer Wurzel v_i diejenigen 5 Wurzeln u_k, deren Index $k \gtrless i$ ist, ferner diejenigen 5 Wurzeln w_{ik}, deren einer Index $= i$ ist; endlich zu einer Wurzel w_{ik} die 4 Wurzeln u_i, u_k, v_i, v_k, sowie diejenigen Wurzeln w_{lm}, deren Indices beide von i und k verschieden sind.

§ 75.

Bildung von Functionen der u, v, w, welche sich wie die ξ, η, ζ des § 65 verhalten.

Unsere Aufgabe ist nun zunächst, aus den u, v, w 6 Functionen ξ zu bilden, welche sich ebenso linear substituiren, wie die ξ des § 65, wenn man die u, v, w auf jede zulässige Weise unter sich vertauscht. Das können wir dahin wenden, dass wir gleich 27 Functionen ξ_i, η_i, ζ_{ik} bilden, welche sich bei solchen Vertauschungen der u, v, w in ganz derselben Weise vertauschen und zwischen welchen dieselben linearen Relationen bestehen, wie zwischen den gleichbezeichneten Functionen des § 65. Die letzteren sind sämmtlich Consequenzen der der einen Relation (4) dort und der 30 (übrigens nicht von einander unabhängigen), die sich aus (8) durch Vertauschung der Indices ergeben. Wir brauchen also nur solche Functionen zu suchen, welche jenen Relationen (4) und (8) genügen und welche bei Vertauschung der Indices der u, v, w sich entsprechend vertauschen. Wir machen den Versuch zunächst mit *linearen* Functionen und werden finden, dass er gelingt.

Zunächst stellen wir die allgemeinste Form einer linearen homogenen Function der u, v, w auf, welche ungeändert bleibt, wenn wir unter Festhaltung von u_1 die übrigen Wurzeln auf jede dann noch zulässige Weise permutiren, welche also durch u_1 und die bekannten Grössen sich rational ausdrückt. Dieselbe ist offenbar:

$$(1)\quad \xi_1 = \alpha u_1 + \beta(v_2 + \Sigma v_l + w_{12} + \Sigma w_{1l}) + \gamma(v_1 + u_2 + \Sigma u_l + \Sigma w_{2l} + \Sigma w_{lm}); \qquad (l, m = 3, 4, 5, 6)$$

analog haben wir dann zu bilden:

$$(2)\quad \eta_2 = \alpha v_2 + \beta(u_1 + \Sigma u_l + w_{12} + \Sigma w_{2l}) + \gamma(v_1 + u_2 + \Sigma v_l + \Sigma w_{1l} + \Sigma w_{lm});$$

$$(3)\quad \zeta_{12} = \alpha w_{12} + \beta(u_1 + u_2 + v_1 + v_2 + \Sigma w_{lm}) + \gamma(\Sigma u_l + \Sigma v_l + \Sigma w_{1l} + \Sigma w_{2l});$$

sowie diejenigen Ausdrücke, welche aus den angegebenen durch Vertauschung der Indices hervorgehen. Es ist dann:

$$(4) \quad \Sigma\xi_i + \Sigma\eta_i = (\alpha+5\beta+6\gamma)(\Sigma u_i + \Sigma v_i) + (4\beta+8\gamma)\Sigma w_{ik}$$

und:

$$(5) \quad \xi_1 + \eta_2 + \xi_{12} = (\alpha+2\beta)(u_1+v_2+w_{12}) + (\beta+2\gamma)(u_2+v_1+\Sigma u_l+\Sigma v_l+\Sigma w_{1l}+\Sigma w_{2l}+\Sigma w_{lm}).$$

Beide Ausdrücke werden identisch Null, wenn man:

$$(6) \quad \alpha = 4\gamma, \quad \beta = -2\gamma$$

setzt. *Bezeichnet also allgemein x_i irgend eine Wurzel unserer Gleichung 27. Grades, C_i die Summe der zu ihr conjugirten Wurzeln, N_i die Summe der zu ihr nicht conjugirten, so sind die 27 linearen Functionen:*

$$(7) \quad 4x_i - 2C_i + N_i$$

in der That durch dieselben linearen Relationen verbunden, wie die ξ, η, ζ des § 65; *und 6 geeignet ausgewählte unter ihnen sind solche Functionen der Wurzeln u, v, w der vorgelegten Gleichung, welche sich wie die ξ substituiren, wenn die 3 Wurzeln den sämmtlichen Permutationen ihrer Gruppe unterworfen werden.* Aus diesen „Complexcoordinaten ξ" ergeben sich dann die „Liniencoordinaten a_{ik}" durch die Formeln (2) des § 65. Damit ist das von Hrn. Klein*) gestellte Problem *„rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung 27. Grades zu finden, welche a_{ik}'s sind"* in der einfachsten Weise erledigt.

§ 76.

Anwendung auf das Problem der 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung.

Zu den Gleichungen der in den beiden letzten Paragraphen betrachteten Art gehört insbesondere auch diejenige, von welcher die Bestimmung der 27 Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängt (nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante der Fläche).**) Die Bestimmung dieser Geraden aus der vorgelegten Gleichung der Fläche würde also folgende Schritte erfordern:

1. Zuerst ist die Gleichung einer Fläche zu bilden, welche die gegebene in den 27 Geraden schneidet; das ist von Salmon und Clebsch geschehen.***)

2. Aus dieser Gleichung und der der Fläche ist durch Elimination

*) Liouville's Journal, sér. 4, t, 4, p. 172.

**) C. Jordan, vgl. die Citate p. 5.

***) Vgl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II. Bd. art. 324 und Note 168.

eine Gleichung mit nur einer Unbekannten herzustellen. Man mag etwa ein bestimmtes *Büschel linearer Complexe:*

$$\varkappa A + \lambda B = 0$$

zu Hilfe nehmen und die Parameter $\varkappa : \lambda$ derjenigen 27 Complexe dieses Büschels suchen, welchen die 27 Geraden angehören. Die Coefficienten der resultirenden Gleichung werden dann Simultaninvarianten des aus der Fläche und den beiden Complexen $A = 0$, $B = 0$ bestehenden Systems; anders ausgedrückt, sie werden solche Covarianten der Fläche, welche zwei Reihen von Liniencoordinaten enthalten. Die invariantentheoretische Untersuchung des Systems steht noch aus.*)

3. Aus den 27 Wurzeln $\varkappa : \lambda$ setzen sich lineare Functionen a_{ik} in der durch § 74 gegebenen Weise zusammen. Dabei ist zu beachten, dass die Art wie dies geschieht, zunächst den projectiven Charakter der Aufgabe verläugnet, sodass man nicht erwarten darf, dass die auftretenden Formeln eine einfache geometrische Bedeutung besitzen werden. Um eine solche zu finden, müsste man die in den Formeln versteckt liegenden Hilfselemente aufzeigen. Es gilt dies übrigens auch von viel elementareren Problemen, z. B. von der Lagrange'schen Resolvente der cubischen Gleichung, welche die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks zweier Kegelschnitte bestimmt.

4. Die Bestimmung der aus den a_{ik} zu bildenden Invarianten (§ 71) als Functionen der Covarianten des unter (2) besprochenen Systems wird keine Schwierigkeit mehr bieten, sobald man dieses System erst beherrscht.

5. Die Reduction des Problems der a_{ik} auf das der ε geschieht auf dem von Hrn. Klein a. a. O. angegebenen Wege.

6. Aus den Invarianten der ε berechnen sich die Coefficienten g des hyperelliptischen Gebildes nach § 68.

7. Wegen der Berechnung der Perioden vergleiche man diese Annalen p. 278; für unseren Fall käme gerade der dort erwähnte Ansatz des Hrn. Milewski in Betracht**).

8. Aus den ε sind wieder die a_{ik} zu berechnen, aus diesen die ξ, η, ζ.

9. Aus den ξ, η, ζ erhält man die $\varkappa : \lambda$ als zu ihnen ähnliche Functionen nach der Methode von Lagrange.

10. Zu jedem dieser Werthe $\varkappa : \lambda$ findet man die Coordinaten der zugehörigen Geraden nach derselben Methode.

---

*) De Paolis' ricerche sulle superficie del 3° ordine (memorie dell' acc. dei Lincei ser. III, t. 10, 1880) enthalten p. 149 einen Anfang dazu.

**) [Neuerdings hat Hr. Lindemann in den Göttinger Nachrichten v. J. 1892 eine Untersuchungen weiter gef ührt].

Damit mögen diese Untersuchungen abgeschlossen sein; nur zwei Bemerkungen allgemeineren Charakters seien noch beigefügt.

Einmal: unsere Gruppen besitzen 25920 bezw. 51840 Substitutionen; von den bisher vollständig untersuchten einfachen endlichen Gruppen linearer Substitutionen hat die höchste Ordnungszahl — 168 — diejenige ternäre Gruppe, welche aus der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen entspringt. Bei dieser können noch eine Reihe von Fragen durch ganz elementares Ausrechnen erledigt werden, auf deren Lösung wir bei unserer Gruppe verzichten mussten; dahin gehört namentlich die Aufstellung von Resolventen. Man wird dazu neue Kunstgriffe ausfindig machen müssen; die dazu erforderlichen Versuchsrechnungen wird man aber zweckmässigerweise an solchen Gruppen anstellen, deren Ordnungszahl zwischen den genannten Grenzen liegen.

Die andere Bemerkung ist folgende: die Resultate zu welchen wir gelangt sind, haben wir nur erreicht durch Heranziehung aller Hilfsmittel, welche die Riemann'sche Functionentheorie, Invariantentheorie im engeren Sinne, Liniengeometrie, Galois'sche Gleichungstheorie der Untersuchung darbieten. Als ein Beitrag zu den jetzt immer mächtiger durchdringenden Bestrebungen, diese verschiedenen Disciplinen aus ihrer gegenseitigen Isolirung zu befreien, wollen diese Untersuchungen verstanden sein.

Göttingen, Januar 1892.

Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Die auf den casus irreducibilis bei Gleichungen dritten Grades bezüglichen Fragen, welche Herr Hölder in Band XXXVIII dieser Annalen, S. 307 ff., und Herr Mollame in den Berichten der Akademie zu Neapel, Juni 1890 behandelt haben, können auch erledigt werden, indem man von folgenden einfachen Betrachtungen ausgeht.

§ 1.

Die Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ sei in dem beliebigen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$, dem ihre Coefficienten angehören mögen, irreducibel und habe die Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Bezeichnet man dann durch g eine ganze Function, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören, und setzt man $\eta_\nu = g(\xi_\nu)$, so ist das mit der Unbestimmten y gebildete Product

$$(y - \eta_1)(y - \eta_2) \ldots (y - \eta_n) = G(y)$$

als symmetrische Function aller Grössen ξ_ν im Bereich $\mathfrak{R}$ rational; $F(y)$ sei einer seiner in $\mathfrak{R}$ irreducibeln Factoren, der etwa für $y = \eta_\varrho$ verschwinden möge. Aus der Gleichung

$$F(\eta_\varrho) = F\big(g(\xi_\varrho)\big) = 0$$

folgt nun wegen der Grundeigenschaft der irreducibeln Gleichungen

$$F\big(g(\xi_\nu)\big) = F(\eta_\nu) = 0$$

für $\nu = 1, 2, \ldots n$; die irreducibeln Factoren von $G(y)$ haben also alle dasselbe System von Wurzeln, nämlich das System der von einander verschiedenen Werthe η_ν. Alle diese Factoren unterscheiden sich somit nur um Factoren, die von y unabhängig sind, und müssen speciell von gleichem Grade r sein; da das Polynom $G(y)$ vom Grade n ist, so kann man $n = rs$ setzen, wo s eine ganze Zahl bedeutet, und es sind dann je s und nicht mehr der Grössen η_ν einander gleich.

Es sei z. B. $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_s$; dann haben die Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad \eta_1 - g(x) = 0$$

genau s Wurzeln $x = \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ gemein; bestimmt man durch den euclidischen Algorithmus den grössten gemeinsamen Theiler der linken

Seiten dieser Gleichungen, so giebt derselbe, $= 0$ gesetzt, eine im Bereich $(\Re, \eta_1)$ rationale Gleichung, deren Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ sind. Ist diese Gleichung etwa $\Phi(x, \eta_1) = 0$, wo die Coefficienten des Polynoms Φ dem Bereich $\Re$ angehören; sind ferner $\eta_1, \eta_a, \eta_b, \ldots$ die von einander verschiedenen Werthe der Reihe $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, so ist bis auf einen von x unabhängigen, dem Bereich $\Re$ angehörigen Factor

$$f(x) = \Phi(x, \eta_1)\ \Phi(x, \eta_a)\ \Phi(x, \eta_b) \ldots .$$

Hieraus folgt, dass die Function $\Phi(x, \eta_1)$ im Bereich $(\Re, \eta_1)$ irreducibel ist, da sonst das Polynom $f(x)$ im Bereich $\Re$ reducibel wäre, entgegen der Voraussetzung.

Hat man speciell $s = 1$, $r = n$, so sind die Grössen ξ_ν und η_ν im Bereich $\Re$ rational durch einander ausdrückbar, da die Gleichung $\Phi(x, \eta_\nu) = 0$ linear wird.

Diese bekannten Erwägungen sind nur deshalb hier reproducirt, um zu zeigen, dass nichts als bekannt vorauszusetzen ist als der Begriff und die Grundeigenschaft der irreducibeln Gleichungen, sowie der Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers, also Dinge, die bei jeder über die ersten Specialitäten hinausgehenden Behandlung algebraischer Gleichungen an die Spitze gestellt werden müssen.

§ 2.

Es seien nun alle dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich $\Re$ angehörigen Grössen reell; eine in ihm irreducibele Gleichung dritten Grades sei durch eine Kette von reellen Radicalen aufgelöst, d. h. eine Wurzel dieser Gleichung sei in $\Re$ rational ausdrückbar durch die reellen Grössen $W_0, W_1, \ldots W_m$, welche durch folgendes Gleichungssystem definirt sind:

$$\begin{aligned} W_0^{p_0} &= a, \\ W_1^{p_1} &= f_1(W_0), \\ W_2^{p_2} &= f_2(W_0, W_1), \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ W_m^{p_m} &= f_m(W_0, W_1, \ldots W_{m-1}). \end{aligned}$$

Hierin sei a eine Grösse des Bereichs $\Re$, $f_1, f_2, \ldots$ seien ganze Functionen der beigefügten Argumente, deren Coefficienten dem Bereich $\Re$ angehören, und $p_0, p_1, \ldots p_m$ Primzahlen. Adjungirt man die Grössen $W_0, W_1, \ldots$ successive, so muss es ein erstes Mal vorkommen, z. B. bei Adjunction von $W_\varkappa$, dass die gegebene Gleichung reducibel wird, während sie im Rationalitätsbereich $\Re_1 = (\Re, W_0, W_1, \ldots W_{\varkappa-1})$ noch irreducibel ist. Da nun eine reducibele cubische Gleichung eine rationale Wurzel besitzt, so ist eine Wurzel ξ der gegebenen Gleichung

durch $W_\varkappa$ im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_1$ rational, also auch als ganze Function von $W_\varkappa$ ausdrückbar:

$$\xi = g(W_\varkappa;\ W_0,\ W_1,\ \ldots\ W_{\varkappa-1}). \tag{1}$$

Die Gleichung

$$W_\varkappa^{p_\varkappa} - f_\varkappa(W_0,\ W_1,\ \ldots\ W_{\varkappa-1}) = 0 \tag{2}$$

ist aber im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel; denn sonst müsste ein Product von weniger als $p_\varkappa$ ihrer Wurzeln dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ angehören; es wäre dies eine Grösse von der Form $W_\varkappa^h \omega^l$, wo ω eine $p_\varkappa^{te}$ Einheitswurzel bedeutet, und die Ungleichung $h < p_\varkappa$ besteht. Wäre nun der Exponent l durch $p_\varkappa$ theilbar, so gehörte schon die Grösse $W_\varkappa^h$, also eine niedrigere als die $p_\varkappa^{te}$ Potenz von $W_\varkappa$ dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ an, was offenbar ausgeschlossen werden kann. Wenn dagegen die Zahl l nicht durch $p_\varkappa$ theilbar ist, so ist die Grösse ω^l complex; es könnte also das Product $W_\varkappa^h \omega^l$ bei der vorausgesetzten Realität der Grösse $W_\varkappa$ nicht dem reellen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_1$ angehören. In diesem ist also die Gleichung (2) mit der Unbekannten $W_\varkappa$ irreducibel. Man kann also auf die gegebene und die Gleichung (2) die Sätze des § 1 anwenden; speciell ergiebt sich aus der Gleichung (1)

$$p_\varkappa \equiv 0 \pmod 3,$$

also, da $p_\varkappa$ eine Primzahl ist, $p_\varkappa = 3$. Dann folgt weiter nach § 1, dass im Bereich $\mathfrak{R}_1$ die Grössen ξ und $W_\varkappa$ rational durch einander ausdrückbar sind, und dass der Gleichung (1) die folgende zur Seite steht

$$W_\varkappa = \varphi(\xi,\ W_0,\ W_1,\ \ldots\ W_{\varkappa-1}),$$

wo φ eine in ξ ganze, in den übrigen Argumenten rationale Function ist, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören. Dann folgt aus der Gleichung (2)

$$\big(\varphi(\xi,\ W_0, \ldots\ W_{\varkappa-1})\big)^3 - f_\varkappa(W_0,\ W_1, \ldots\ W_{\varkappa-1}) = 0. \tag{3}$$

Nun ist die gegebene cubische Gleichung im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel; hat sie also ausser ξ noch die Wurzeln ξ', ξ'', so ergiebt sich

$$\big(\varphi(\xi',\ W_0,\ \ldots\ W_{\varkappa-1})\big)^3 - f_\varkappa(W_0,\ W_1, \ldots\ W_{\varkappa-1}) = 0, \tag{4}$$

$$\big(\varphi(\xi'',\ W_0,\ \ldots\ W_{\varkappa-1})\big)^3 - f_\varkappa(W_0,\ W_1, \ldots\ W_{\varkappa-1}) = 0; \tag{5}$$

die drei Grössen $\varphi(\xi,\ W_0, \ldots)$, $\varphi(\xi',\ W_0, \ldots)$ und $\varphi(\xi'',\ W_0, \ldots)$ können dabei nicht alle gleich sein, da sonst ihre Summe, also die Grösse $3\,W_\varkappa$ dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ angehörte, was offenbar nicht der Fall ist.

Jetzt werde die Annahme eingeführt, dass die gegebene cubische Gleichung drei reelle Wurzeln besitzt; dann würde sich aus den Gleichungen (3), (4), (5) ergeben, dass die Gleichung

$$x^3 - f_\varkappa(W_0, W_1, \ldots W_{\varkappa-1}) = 0$$

mehr als eine reelle Wurzel besitzt, was offenbar unmöglich ist. — Eine cubische Gleichung, die in einem reellen Rationalitätsbereich irreducibel ist und drei reelle Wurzeln besitzt, kann also niemals durch eine Kette reeller Radicale auflösbar sein; damit ist abermals nachgewiesen, dass und in welchem Sinne der casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen seinen Namen verdient.

§ 3.

Weiter sei im reellen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ eine irreducible Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, deren Wurzeln sämmtlich durch eine von ihnen, welche ξ heisse, rational ausdrückbar sind. Die Gleichung sei durch eine Kette von reellen Radicalen auflösbar, d. h. es sei die Wurzel ξ im Bereich $\mathfrak{R}$ rational ausdrückbar durch ein System von reellen Grössen $W_0, W_1, \ldots W_m$, die durch dasselbe Gleichungssystem wie in § 2 definirt sein mögen. Dann sei auch hier die gegebene Gleichung noch irreducibel etwa im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_1 = (\mathfrak{R}, W_0, W_1, \ldots W_{\varkappa-1})$, werde aber reducibel nach Adjunction der Grösse $W_\varkappa$, die durch die Gleichung

$$W_\varkappa^{p_\varkappa} = f_\varkappa(W_0, W_1, \ldots W_{\varkappa-1}) \tag{6}$$

definirt ist; diese Gleichung ist irreducibel im Bereich $\mathfrak{R}_1$, da für sie der in § 2 gegebene Beweis für die Irreducibilität der Gleichung (2) vollständig gültig bleibt.

Es sei nun σ irgend eine symmetrische Function gewisser Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ nicht angehört, wohl aber dem Bereich $(\mathfrak{R}_1, W_\varkappa)$. Da die Gleichung (6) im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel ist, so genügt nach § 1 die Grösse σ einer in demselben Bereich irreducibeln Gleichung, deren Grad ein Theiler der Zahl $p_\varkappa$, also $= p_\varkappa$ ist, da er grösser als Eins sein muss; daraus folgt weiter nach § 1, dass eine Gleichung

$$W_\varkappa = \Phi(\sigma, W_0, W_1, \ldots W_{\varkappa-1}) \tag{7}$$

gilt, in welcher Φ eine rationale, in σ ganze Function der beigefügten Argumente bedeutet, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören.

Nun kann andrerseits σ als rationale Function von ξ allein aufgefasst werden, da alle Wurzeln der gegebenen Gleichung in ξ rational sind; es kann also auch die Grösse $W_\varkappa$ durch ξ im Bereich $\mathfrak{R}_1$ rational ausgedrückt werden. Nach § 1 ist also n ein Vielfaches vom Grade der im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse $W_\varkappa$ genügt, d. h. der Gleichung (6); somit folgt, dass n durch $p_\varkappa$ theilbar sein muss. Ferner folgt nach § 1, dass nach Adjunction von $W_\varkappa$ vom Polynom $f(x)$ sich ein im Bereich $(\mathfrak{R}_1, W_\varkappa)$ irreducibler Factor abspaltet, dessen Grad $n : p_\varkappa$ ist.

Jetzt werde speciell die Annahme eingeführt, die schon mit der Realität des Bereichs $\mathfrak{R}_1$ und der Radicale W implicite gemacht war, dass eine und somit alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell seien. Denkt man sich also in der Gleichung (7) die Grösse σ durch ξ ausgedrückt, und ersetzt dann ξ successive durch alle Wurzeln der gegebenen Gleichung, so sind alle aus $W_\varkappa$ hervorgehenden Ausdrücke reell. Alle verschiedenen Werthe der so erhaltenen Reihe von Grössen bilden aber nach § 1 das System der Wurzeln der Gleichung (6) mit der Unbekannten $W_\varkappa$; diese Gleichung hätte also nur reelle Wurzeln, was nur möglich ist für $p_\varkappa = 2$. Es ist somit n eine gerade Zahl; nach Adjunction von $W_\varkappa$ reducirt sich also die gegebene Gleichung auf zwei irreducible Gleichungen vom Grade $\frac{n}{2}$. Die Wurzeln einer jeden von diesen sind offenbar auch durch $W_0, W_1, \ldots W_m$ rational ausdrückbar; man kann also auf diese Gleichungen die für die gegebene Gleichung n^{ten} Grades durchgeführte Schlussreihe anwenden, und damit erschliessen, dass auch $\frac{1}{2}n$ eine gerade Zahl sein muss. So fortfahrend erhält man schliesslich den von Herrn Hölder aufgestellten Satz, dass die Grundzahl n eine Potenz von 2 sein muss; d. h. jede in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible und durch eine Kette reeller Radicale auflösbare Gleichung, deren Wurzeln alle durch eine von ihnen in dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich rational ausdrückbar sind, hat zur Gradzahl eine Potenz von Zwei.

Die bei einer derartigen Gleichung auftretende Kette von Radicalen kann stets durch eine Kette von Quadratwurzeln ersetzt werden. Denn da alle Wurzeln der Gleichung durch eine von ihnen rational ausdrückbar sind, so wird die Gleichung nach § 1 reducibel, sobald irgend eine dem Bereich $\mathfrak{R}$ nicht angehörige Function ihrer Wurzeln adjungirt wird; da nun die Gleichung im Bereich $(\mathfrak{R}, W_0, \ldots W_{\varkappa-1})$ noch irreducibel sein soll, so kann in diesem die Grösse σ nicht rational sein; sie ist also auch im Bereich $\mathfrak{R}$ Wurzel einer quadratischen Gleichung. Die Zerfällung der gegebenen Gleichung n^{ten} Grades in zwei Gleichungen vom Grade $\frac{1}{2}n$ kann also durch Adjunction einer einzigen Quadratwurzel bewirkt werden. Da nun dieselben Erwägungen für jede weitere Zerlegung gelten, so ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Dorpat, December 1891.

Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Das Endziel einer über specielle Betrachtungen hinausgehenden Theorie der projectiven Gestaltsverhältnisse bei ebenen Curven würde in der Beantwortung der Fragen bestehen, wie eigentlich die allgemeinsten mit gegebenen Singularitäten behafteten reellen Curvenzüge aussehen; welche Combinationen von Singularitäten überhaupt möglich sind; wie oft eine Curve bestimmten Charakters von den Geraden der Ebene geschnitten wird, und im Zusammenhang damit, wie viele ihrer Tangenten durch irgend einen Punkt gehen. Diese zum Theil noch etwas unbestimmten Fragen bieten natürlich in ihrer vollen Allgemeinheit grosse Schwierigkeiten dar; ihre Präcisirung und Beantwortung in den einfachsten Fällen, d. h. unter den einfachsten Annahmen über die zugelassenen Sigularitäten bildet das Ziel der auf den folgenden Blättern durchgeführten Untersuchung.

Von gleicher Tendenz sind gewisse allgemeine Betrachtungen über die Gestaltsverhältnisse ebener Curven, welche Möbius im ersten Abschnitt seiner Abhandlung „Ueber die Grundformen der Linien dritter Ordnung", sowie in der merkwürdigen kleinen Note „Ueber die Gestalt sphärischer Curven" (Werke Bd. II, S. 108 und 183) angestellt hat; die dort erhaltenen Resultate sind unter den gegenwärtig abzuleitenden als Specialfälle enthalten.

Die Methode der Untersuchung ist dieselbe wie in meiner Abhandlung „Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten beliebiger Raumcurven" (Bd. XXXIV dieser Annalen, S. 204), die im Folgenden unter der Bezeichnung A. S. citirt werden soll; das wesentliche Hilfsmittel besteht in den dort angeführten „Staudt'schen Sätzen I und II", welche nur die Grundanschauung exact formuliren, dass wenn eine Curve von einem Punkte durchlaufen wird, die Bewegungsrichtung des Punktes und der Drehungssinn seiner Tangente sich nur in singulären Lagen des Punktes ändern. Der Standpunkt, von welchem die geometrischen Gebilde betrachtet werden, ist wie früher derjenige der projectiven Geometrie, sodass das Unendlichferne nur als specieller Fall, metrische Beziehungen gar nicht berücksichtigt und wesentlich nur projective Eigenschaften in's Auge gefasst werden.

I. Vorbemerkungen.

§ 1.

Genauer ausgedrückt besteht dasjenige, was wir hauptsächlich vom Inhalt der Staudt'schen Sätze gebrauchen, in Folgendem. Wird eine Curve in bestimmter Richtung vom Punkte V durchlaufen, so ändert der Schnittpunkt seiner Tangente mit einer festen Geraden die Richtung seiner Bewegung dann und nur dann, wenn die feste Gerade durch V geht, ohne mit der augenblicklichen Tangente dieses Punktes zusammenzufallen. Man kann hieraus leicht die Frage beantworten, wann der Schnittpunkt der Tangente mit einer festen Curve die Richtung seiner Bewegung längs dieser umkehrt.

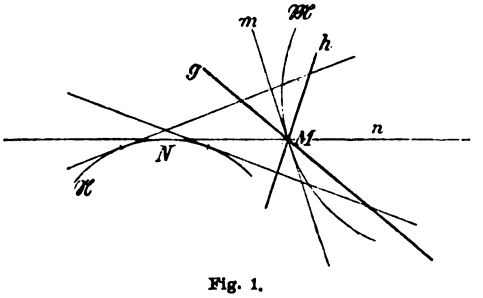


Fig. 1.

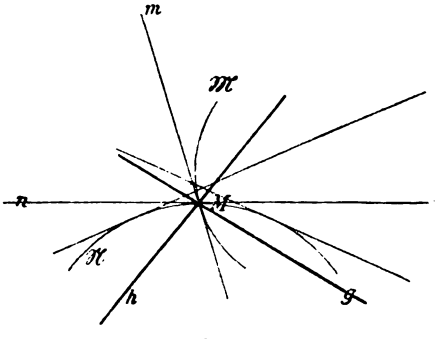


Fig. 2.

Es seien etwa (Fig. 1 und 2) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ irgend zwei von Singularitäten freie Bögen, M ein im Endlichen liegender Punkt des ersteren mit der Tangente m. Die Voraussetzung der Lage im Endlichen ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da es sich nur um die Ableitung projectiver Eigenschaften handelt. Zieht man dann durch M irgend zwei von m verschiedene Gerade g und h, so theilen dieselben die Ebene in zwei vollkommene Flächenwinkel. Dasjenige dieser Gebiete, in welchem die Tangente m verläuft, werde durch $[gh]$ bezeichnet; in ihm müssen alle von M hinreichend wenig verschiedenen Punkte der Curve $\mathfrak{M}$ liegen, da die Verbindungslinie eines jeden von ihnen mit M beliebig wenig von m verschieden ist. Es sei ferner N ein Punkt des Bogens $\mathfrak{N}$, dessen Tangente n durch M gehe, ohne mit m identisch zu sein, und die Geraden g und h seien so gewählt, dass sie die Tangenten m und n von einander trennen.

Dann durchlaufe der Punkt V, dessen Tangente v sei, in bestimmter Richtung längs des Bogens $\mathfrak{N}$ die Umgebung des Punktes N; da bei hinreichender Beschränkung dieser Umgebung alle Lagen von v, die in Betracht kommen, von n so wenig, wie man will, verschieden sind, so können sie alle mit dem Flächenwinkel $[gh]$, welchem die

Gerade n nicht angehört, nur endliche Strecken gemein haben, und diese liegen ganz in dem einen oder andern der beiden Scheitelwinkel, in welche das Gebiet $[gh]$ zerfällt, je nach der Lage eines einzigen ihrer Punkte, z. B. des Schnittpunktes (mv). Dieser liegt nach den Staudt'schen Sätzen entweder erst in dem einen und dann in dem andern jener beiden Scheitelwinkelräume oder nur in dem einen, d. h. er passirt die Lage M ohne Aenderung seiner Bewegungsrichtung oder kehrt in ihr um, je nachdem die Punkte M und N von einander verschieden sind oder nicht.

Der Schnittpunkt der Geraden v mit $\mathfrak{M}$ gehört nun wegen der Lage dieses Bogens im Gebiet $[gh]$ jedenfalls den bezeichneten endlichen Strecken der Geraden v an; dieser Schnittpunkt kehrt also die Richtung seiner Bewegung längs des Bogens $\mathfrak{M}$ um oder behält sie ungeändert bei, je nachdem die Punkte M und N zusammenfallen oder nicht.

Fallen M und N zusammen, so ändert sich demnach für einen längs des Bogens $\mathfrak{M}$ laufenden Punkt die Anzahl der durch ihn gehenden Tangenten des Bogens $\mathfrak{N}$ um Zwei beim Passiren des Punktes M; sind M und N verschieden, so tritt keine Aenderung dieser Anzahl ein. Längs des Bogens $\mathfrak{N}$ stösst also stets eins seiner Gebiete $(\mathfrak{m})$ mit einem Gebiet $(\mathfrak{m}+2)$ zusammen, wenn wie früher durch $(\mathfrak{r})$ das Gebiet der Punkte bezeichnet wird, durch welche genau $\mathfrak{r}$ Tangenten des betrachteten Bogens hindurchgehen.

§ 2.

Auf Grund dieser Resultate kann man auch umgekehrt auf die Existenz eines Schnittpunktes beider Bögen schliessen, wenn man weiss, dass ein bestimmter Schnittpunkt von v und $\mathfrak{M}$ die Richtung seiner Bewegung auf $\mathfrak{M}$ umkehrt. Reciprok entsprechend kann man auf die Existenz einer gemeinsamen Tangente der Bögen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ schliessen, wenn der Berührungspunkt einer bestimmten durch V gehenden Tangente des Bogens $\mathfrak{M}$ die Richtung seiner Bewegung auf diesem ändert.

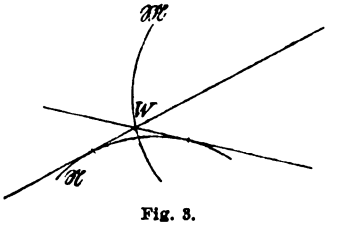


Fig. 3.

Tritt der erste Fall ein, sodass etwa wieder M und N zusammenfallen (Fig. 3), so folgt ferner aus § 1, dass durch einen den Bogen $\mathfrak{M}$ durchlaufenden Punkt W, wenn derselbe in die Nähe von M rückt, entweder zwei oder keine Tangenten des Bogens $\mathfrak{N}$ gehen, welche in der Nähe von M berühren; jenachdem der Punkt W die Lage M in der einen oder andern Richtung durchläuft, rücken die Berührungspunkte zweier durch W gehender

Tangenten des Bogens $\mathfrak{N}$ entweder aus der gemeinsamen Anfangslage M aus einander, oder sie nähern sich von entgegengesetzten Seiten her der gemeinsamen Grenzlage M.

Die reciprok entsprechende Thatsache, welche im Folgenden mehrfach zu benutzen sein wird, ist folgende. Haben die Bögen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine Tangente t gemein, deren Berührungspunkte mit beiden von einander verschieden sind, und durchläuft der Berührungspunkt einer Tangente v den Bogen $\mathfrak{M}$ in bestimmter Richtung, so wird, wenn man v die Lage t passiren lässt, ein Paar Schnittpunkte von $\mathfrak{N}$ und v gewonnen oder verloren; im ersten Falle rücken die Schnittpunkte auseinander, im zweiten gehen sie in entgegengesetzten Richtungen aufeinander los. (Fig. 4.)

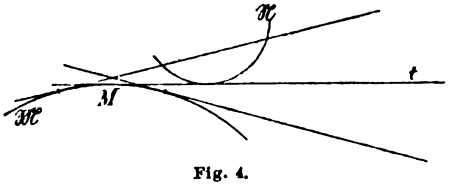


Fig. 4.

Weiss man umgekehrt, dass zwei Schnittpunkte der Tangente v mit $\mathfrak{N}$ sich in entgegengesetzten Richtungen längs dieses Bogens bewegen und sich einander nähern, so können sie sich den Schnittpunkten von $\mathfrak{N}$ mit einer Endtangente des Bogens $\mathfrak{M}$ als ihren Grenzlagen nähern; weiss man aber, dass dies nicht eintreten kann, so müssen sie in den Berührungspunkt einer gemeinsamen Tangente der Bögen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zusammenrücken. Ebenso wenn der Punkt V den Bogen $\mathfrak{N}$ durchläuft und die Berührungspunkte zweier durch V gehenden Tangenten des Bogens $\mathfrak{M}$ auf diesem gegeneinander vorrücken, während zwischen ihnen kein Berührungspunkt einer durch einen Endpunkt des Bogens $\mathfrak{N}$ gehenden Tangente liegt, so müssen sie nothwendig in einen Schnittpunkt beider Bögen zusammenrücken.

Damit ist neben der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Bemerkung ein zweites Hülfsmittel gegeben, um die Existenz einer gemeinsamen Tangente oder eines Schnittpunktes zweier Bögen nachzuweisen.

§ 3.

Zu diesen allgemeinen Vorbemerkungen stellen wir folgende Betrachtung specielleren Charakters.

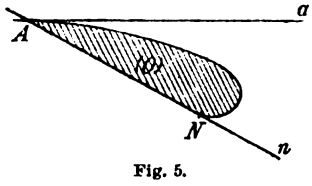


Fig. 5.

Es sei der Bogen AN, dessen in A und N berührende Endtangenten a und n heissen mögen, von Singularitäten frei und so beschaffen, dass von den Punkten des Bogens auf a nur A, auf n nur N und A liegen (Fig. 5). Bei einem solchen Bogen ist leicht zu übersehen, wie viele seiner Tangenten durch irgend einen Punkt der Ebene gehen: diese Anzahl

kann sich nach den Staudt'schen Sätzen — vgl. auch § 1 — nur ändern, wenn der betrachtete Punkt den Bogen oder eine seiner Endtangenten überschreitet. Unter unsern Voraussetzungen hat nun jede der Endtangenten mit dem Bogen nur Endpunkte gemein; der Bogen überschreitet also keine seiner Endtangenten und liegt demnach ganz in dem einen der beiden vollkommenen Flächenwinkel, in welche die Ebene durch a und n zerlegt wird. Dieser Flächenwinkel wird durch den Bogen in zwei im Sinne der projectiven Auffassung zusammenhängende Gebiete zerlegt, innerhalb deren die Zahl der durch einen Punkt gehenden Tangenten sich nicht ändert; ein ebensolches Gebiet bildet der zweite durch a und n abgegrenzte vollkommene Flächenwinkel.

Lässt man nun die Tangente t in einem längs des Bogens von A nach N laufenden Punkte berühren, so durchläuft der Punkt (nt) die eine der beiden Strecken AN genau einfach ohne Aenderung der Bewegungsrichtung, da der Bogen mit n nur die Endpunkte A und N gemein hat; die andere Strecke AN werde durch $\overline{AN}$ bezeichnet. Durch die Punkte der letzteren geht keine Tangente des Bogens ausser n; sie trennt also — in der Bezeichnung des § 1 — ein Gebiet (0) von einem Gebiete (1) des Bogens AN. Unter den bezeichneten drei durch a, n und den Bogen AN abgegrenzten Gebieten ist also eins das Gebiet (0) und ein anderes das Gebiet (1). Längs des Bogens stösst nun nach § 1 ein Gebiet $(\mathfrak{m})$ an ein Gebiet $(\mathfrak{m}+2)$; es kann hier aber nicht $\mathfrak{m}=1$ sein, weil sonst ein Gebiet (3) längs der Endtangenten an das Gebiet (0) grenzen müsste, was unmöglich ist. Es ist also $\mathfrak{m}=0$, d. h. der Bogen theilt den einen der von a und n abgegrenzten Flächenwinkel in die Gebiete (0) und (2); der andere bildet das Gebiet (1). Dabei hat das Gebiet (0) zur Grenze den Bogen und die Strecke $\overline{AN}$.

II. Die Grundeigenschaften des allgemeinsten nirgends singulären Bogens.

§ 4.

Jetzt sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiger von Singularitäten freier Bogen, wobei wie in A. S. auch Doppelpunkte und Doppeltangenten als Singularitäten zu rechnen sind; A sei der eine seiner Endpunkte und a die in ihm berührende Tangente (Fig. 6, s. S. 355). Durchläuft dann der Punkt T, dessen Tangente t sei, den Bogen von A aus, so trete von den beiden dual gegenüberstehenden Ereignissen, dass die Tangente t durch A geht und dass der Punkt T auf a liegt, etwa das erstere zuerst ein; die entsprechenden Lagen von t und T seien n und N.

Die Tangente t hat dann bei Beginn der Bewegung des Punktes T mit dem Bogen AT keinen Punkt ausser T gemein, und das kann sich nach den Staudt'schen Sätzen nur ändern, wenn t durch A geht; die Tangente n hat also ausser A und N keine Punkte mit dem Bogen AN gemein. Da dieser ferner nach Voraussetzung von a nicht geschnitten wird, so hat er die Eigenschaften des gleich bezeichneten Bogens in § 3.

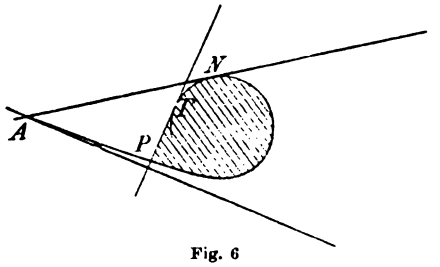


Fig. 6

Wenn nun der Punkt T durch die Lage N geht, so liegt er nicht auf a; der Punkt (at) passirt dann also die Lage A ohne Aenderung seiner Bewegungsrichtung. Da ferner, bevor man T in N übergehen lässt, kein Schnittpunkt der Tangente t mit dem Bogen AN ausser T vorhanden war, so wird ein solcher in A gewonnen, und in allen wenig von n verschiedenen und auf n folgenden Lagen hat die Gerade t einen einzigen, und zwar einen in der Nähe von A liegenden Punkt P mit dem Bogen AT gemein ausser dem Punkte T. Lässt man diesen in der festgesetzten Richtung von N aus weitergehen, so bewegt sich der Punkt P nach § 1 ohne Aenderung seiner Bewegungsrichtung auf $\mathfrak{B}$ stetig fort, kann also die Lage A nie wieder erreichen und könnte nur verschwinden, wenn er den zweiten Endpunkt B des Bogens $\mathfrak{B}$ erreichte. Letzteres ist aber unmöglich, da der Punkt P dem Bogen AT angehört, und ihn nur verlassen könnte, indem er dem Punkte T unendlich nahe rückte, was eine Singularität des Bogens $\mathfrak{B}$ bedingen würde. Der Punkt P muss sich demnach, wenn man T in die Endlage B übergehen lässt, einer bestimmten von B verschiedenen Grenzlage P_0 nähern, sodass der Bogen AP_0 von P in ungeänderter Richtung durchlaufen wird. Dieser Bewegung entsprechend geht der Bogen PT stetig aus dem Anfangsstadium AN in die Endgestalt P_0B über, sodass ihm in seinen aufeinanderfolgenden Lagen successive alle Punkte des Bogens $\mathfrak{B}$ angehören.

Dabei ist für jede Lage des Punktes T stets P der in der Richtung nach A hin von T aus längs des Bogens $\mathfrak{B}$ zuerst kommende Punkt, in welchem derselbe von t geschnitten wird. Denn dies ist sicher der Fall, wenn T in die Lage N fällt, und eine Aenderung des Sachverhalts könnte nur eintreten, wenn ein weiterer Schnittpunkt der Tangente t mit dem Bogen PT in diesen über P oder T hineinrückte, was nur bei Singularitäten des Bogens $\mathfrak{B}$ möglich ist. Die Tangente t enthält also vom Bogen PT stets nur die Endpunkte.

Aus ähnlichen Gründen kann auch die Tangente des Punktes P

ausser diesem keinen Punkt des Bogens PT enthalten; denn ein solcher ist zu Anfang nicht vorhanden und könnte später nur erscheinen bei vorhandenen Doppeltangenten oder Wendepunkten.

Damit ist bewiesen, dass der Bogen PT in jeder seiner Lagen die Eigenschaften des in § 3 untersuchten Bogens AN besitzt.

§ 5.

Wir betrachten nunmehr (Fig. 7) zwei nur wenig von einander verschiedene Lagen des Bogens PT, welche durch P_1T_1 und P_2T_2 bezeichnet werden mögen; dabei werde der Punkt T_1 in der Richtung von A nach B hin eher erreicht als T_2; die Tangenten der Punkte P_1, P_2, T_1, T_2 seien p_1, p_2, t_1, t_2. Dann liegen wegen der nach § 4 unveränderlichen Bewegungsrichtung des Punktes P die Punkte T_1 und P_2 beziehentlich innerhalb der Bögen P_2T_2 und P_1T_1. Lässt man den Punkt T von T_1 nach T_2 laufen, so geht der entsprechende Punkt P von P_1 nach P_2, und seine Tangente hat nach § 4 mit dem Bogen PT, also a fortiori mit dem darin enthaltenen Bogen P_2T_1 keinen Punkt gemein. Die Tangenten des Bogens P_1P_2 ausser p_2 schneiden also den Bogen P_2T_2 jedenfalls nicht in der Nähe von P_2. Da nun die Tangente p_2 mit P_2T_2 keinen Punkt ausser P_2 gemein hat, so folgt, dass die Tangenten des Bogens P_1P_2 ausser p_2 den Bogen P_2T_2 nicht schneiden.

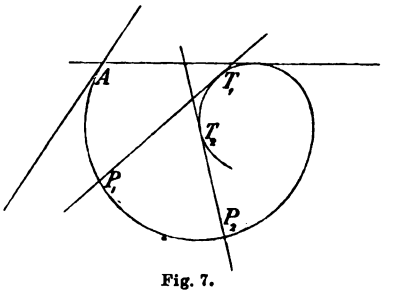


Fig. 7.

Dieser Bogen besitzt nun nach § 4 die Eigenschaften des in § 3 untersuchten Bogens AN; sein Gebiet (0) wird also von dem Bogen selbst und einer gewissen Strecke $\overline{P_2T_2}$ begrenzt, welche der in § 3 betrachteten Strecke $\overline{AN}$ analog zu definiren ist, also von den Tangenten des Bogens P_2T_2 nicht geschnitten wird. Diese Strecke wird auch von den Tangenten des Bogens P_1P_2 nicht geschnitten; denn passirt die Tangente v die Lage p_2, so liegt nach den Staudt'schen Sätzen der Punkt $(v|P_2T_2|)$ vor und nach der Coincidenz von v und p_2 auf derselben der Strecken P_2T_2, also hier niemals im Innern der Strecke $\overline{P_2T_2}$. Somit wird die ganze Umgrenzung des zum Bogen P_2T_2 gehörigen Gebietes (0) von den Tangenten des Bogens P_1P_2 ausser p_2 nicht geschnitten; in dieses Gebiet (0) geht also keine Tangente des Bogens P_1T_2, mithin auch keine des Bogens P_1T_1 hinein. Daraus folgt, dass jeder Punkt, der im Innern des zum Bogen P_2T_2 gehörigen Gebiets (0) liegt, auch dem Innern des zum Bogen P_1T_1

gehörigen Gebiets (0) angehört. Im Innern des letzteren liegt speciell der Punkt T_2, da er der Begrenzung desselben nicht angehört.

Betrachtet man also eine beliebige Anzahl von Bögen PT und ordnet sie entsprechend der Reihenfolge der Punkte T in der Richtung von A nach B hin, so kann man sagen, dass das Gebiet (0) jedes folgenden Bogens PT in demjenigen jedes vorhergehenden enthalten ist.

§ 6.

Nimmt man speciell für T den in § 4 definirten Punkt N, also für P den Punkt A, so lehrt das Resultat des vorigen Paragraphen, dass für irgend einen Punkt T des Bogens NB die Strecke $\overline{PT}$, also speciell der Punkt T selbst im Innern des zum Bogen AN gehörenden Gebietes (0) liegt; die ausserhalb dieses Gebietes liegende Tangente a wird also von den über N hinaus liegenden Theilen des Bogens $\mathfrak{B}$ nicht mehr erreicht, und hat demnach mit $\mathfrak{B}$ überhaupt nur den Punkt A gemein.

Dieselbe Betrachtung wie für A kann man offenbar für jeden Punkt P und den Bogen PB anstellen; die Tangente t irgend eines dem Bogen AB angehörigen Punktes T hat also mit dem Bogen TB ausser T keinen Punkt gemein. Das gilt auch, wenn der Punkt T dem Bogen P_0B angehört, da dieser die Eigenschaften des in § 3 betrachteten Bogens AN besitzt. Die Tangente t hat also stets nur Punkte des Bogens AT mit $\mathfrak{B}$ gemein, und die Anzahl derselben kann sich nur ändern, wenn die Gerade t durch A geht.

Da nun der Bogen $\mathfrak{B}$ mit a keinen Punkt ausser A gemein hat, so bewegt sich nach den Staudt'schen Sätzen der Punkt (at) ohne Richtungsänderung, wenn man T von A nach B laufen lässt; der Punkt (at) passirt also die Lage A stets in derselben Richtung wie das erste Mal, wenn T die Lage N hat. So oft also die Tangente t durch A geht, wird sie einen einzigen von T verschiedenen Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}$ gewinnen. Da alle diese Schnittpunkte nach dem Obigen dem Bogen AT angehören, so geht durch B ausser b keine weitere Tangente des Bogens $\mathfrak{B}$.

Allen diesen Ergebnissen können reciprok entsprechende gegenübergestellt werden, wenn man die in § 4 an die Spitze gestellte Voraussetzung durch die reciprok entsprechende Annahme ersetzt. Jene Voraussetzung bestand darin, dass, wenn man von A aus den Bogen entlang geht, von den beiden Ereignissen einer durch A gehenden Tangente und eines auf a liegenden Punktes der Curve das erstere zuerst eintreten sollte. Die reciproke Voraussetzung wäre, dass das zweite Ereigniss zuerst eintrifft. Mit Berücksichtigung dieser Bemerkung können die erhaltenen Resultate zu folgendem Satze zu-

sammengefasst werden, in welchem der in A. S. § 3 aufgestellte enthalten ist.

Bei einem beliebigen von Singularitäten freien Bogen gehen durch den einen Endpunkt keine Tangenten ausser der in ihm berührenden; die Tangente des andern hat ausser ihm keinen Punkt mit dem Bogen gemein. Enthält die Tangente des ersten Endpunktes ausser diesem noch genau $\mathfrak{m}$ *Punkte des Bogens, so gehen durch den zweiten Endpunkt ausser der in ihm berührenden noch genau* $\mathfrak{m}$ *Tangenten des Bogens.*

Die beiden Endpunkte sind also, sobald $\mathfrak{m} > 0$ ist, von verschiedener Qualität und sollen als „innerer" und „äusserer" Endpunkt unterschieden werden; durch ersteren geht keine Tangente ausser der in ihm berührenden, die Tangente des letzteren hat ausser ihm keinen Punkt mit dem Bogen gemein. Nur wenn $\mathfrak{m} = 0$ ist, fällt dieser Unterschied fort; dann hat man nach A. S. § 4 einen Bogen, der keiner Geraden mehr als zweimal begegnet und durch keinen Punkt mehr als zwei seiner Tangenten hindurchgehen lässt.

III. Zusätze und Anmerkungen zum vorhergehenden Abschnitt.

§ 7.

Das Theorem des vorigen Paragraphen bietet die Möglichkeit, für einen beliebigen von Singularitäten freien Bogen die Frage nach der Anzahl der durch einen Punkt gehenden Tangenten und der Schnittpunkte einer Geraden mit dem Bogen vollkommen zu erledigen.

Wird wie bisher durch A der äussere Endpunkt des Bogens $\mathfrak{B}$ bezeichnet, durch T ein Punkt des Bogens und durch t seine Tangente, so seien $S_1, S_2, \ldots S_m$ diejenigen Lagen von T, in welchen die Punkte A und (at) zusammenfallen, und zwar in der Reihenfolge, die sie längs des Bogens $\mathfrak{B}$ von A aus haben, $(S_1 = N)$. Da nun die Tangente nach § 6 einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}$ dann und nur dann gewinnt, wenn der Punkt T eine der Lagen S_n passirt, so folgt, dass die Tangenten des Bogens $S_n S_{n+1}$ genau n Punkte ausser ihrem Berührungspunkt mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben, wobei noch $S_0 = A$ und $S_{m+1} = B$ gesetzt werden kann.

Wenn nun $\mathfrak{m} > 0$ ist, also der Punkt (at) wirklich einmal durch die Lage A geht, so sind Tangenten des Bogens in jedem der beiden Continua vorhanden, in welche die Gesammtheit aller Geraden der Ebene durch A und B zerlegt wird; es kann also jede Gerade g stetig, ohne einen der Endpunkte zu überstreichen, in eine Tangente des Bogens übergeführt werden, welche dann ausser ihrem Berührungspunkte ebenso viele Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemein hat oder zwei weniger wie g, da aus der reciproken Ergänzung zur Schlussbemerkung des § 1 folgt, dass in der Umgebung einer Tangente, die ausser ihrem Berührungs-

punkte noch $\mathfrak{r}$ Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemein hat, Gerade liegen, die theils $\mathfrak{r}$, theils $\mathfrak{r}+2$ Punkte des Bogens enthalten. Da ferner nach dem Obigen alle Tangenten, welche dieselbe Zahl von Punkten mit $\mathfrak{B}$ gemein haben, ein einziges Continuum bilden, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Die Geraden, welche mit einem nirgends singulären Bogen genau eine und dieselbe Anzahl von Punkten gemein haben, bilden ein einziges Continuum; gehen durch den äusseren Endpunkt des Bogens ausser der in ihm berührenden noch genau $\mathfrak{m}$ *Tangenten des Bogens, so hat dieser mit keiner Geraden mehr als* $\mathfrak{m}+2$ *Punkte gemein, und es giebt Gerade, welche* $0, 1, 2, \ldots \mathfrak{m}+2$ *Punkte des Bogens enthalten.*

Speciell hervorgehoben zu werden verdient die Existenz von Geraden, welche den Bogen gar nicht schneiden; man kann also sagen:

Jeder nirgends singuläre Bogen kann als Projection eines ganz im Endlichen liegenden Bogens betrachtet werden.

Da endlich die Voraussetzungen dieser Entwicklung nach § 6 in sich reciprok sind, kann man sofort hinzufügen:

Die Punkte, durch welche genau $\mathfrak{r}$ *Tangenten des Bogens gehen, bilden ein einziges Continuum; es giebt Punkte, für welche* $\mathfrak{r}=0, 1, 2, \ldots \mathfrak{m}+2$ *ist.*

§ 8.

Ein weiteres Corollar ergiebt sich, wenn man nochmals direct an diejenige Thatsache anknüpft, welche den Kern der Entwicklungen des § 5 bildet, nämlich die gegenseitige Beziehung der Gebiete (0) der Bögen PT.

Liegt etwa der Punkt T_1 im Bogen NB, so haben die Gebiete (0) der Bögen T_1P_1 und AN in ihrer Begrenzung höchstens einen in P beginnenden Theil des Bogens PB gemein; der Punkt A liegt also sicher ausserhalb des erstgenannten Gebiets (0), und auch nicht auf der Grenze desselben. Da nun dieses bei beliebiger Wahl des Punktes T_1 die Gebiete (0) aller Bögen PT umfasst, für welche der Punkt T im Bogen T_1B angenommen wird, so kann man um den Punkt A herum eine Umgebung abgrenzen, welche ganz ausserhalb der bezeichneten Gebiete (0) liegt, auch nicht auf der Grenze derselben. In diese Umgebung kann also der über N hinaus fortgesetzte Bogen $\mathfrak{B}$ nicht wieder eindringen, kann also seinem äusseren Endpunkte A nicht wieder unbegrenzt nahe kommen, geschweige denn ihn erreichen.

Aus denselben Gründen liegt der innere Endpunkt B im Innern eines Gebiets, ausserhalb dessen jedenfalls der Punkt A gelegen ist; also auch, wenn man sich den Bogen durch einen vom innern End-

punkte ausgehenden Punkt beschrieben denkt, kann derselbe dem Ausgangspunkte nicht wieder unbegrenzt nahe kommen.

Diese Betrachtungen werden nur dann hinfällig, wenn keine Tangente $|AN|$ existirt, also der Unterschied zwischen innerem und äusserem Endpunkt fortfällt. Dann wird der Bogen AB nach A. S. § 3 von keiner Geraden mehr als zweimal geschnitten und durch keinen Punkt gehen mehr als zwei seiner Tangenten. Ein solcher Fall tritt ein, wenn z. B. von einer geschlossenen nirgends singulären Curve ein beliebig kleines Stück AB weggelassen wird; nennt man den übrigbleibenden Bogen $\mathfrak{B}$, und bezeichnet durch A seinen äusseren Endpunkt, so kann diesem der innere Endpunkt B unbegrenzt genähert werden, indem man das weggelassene Stück AB hinreichend klein nimmt. Der Bogen $\mathfrak{B}$ begegnet also keiner Geraden mehr als zweimal und durch keinen Punkt gehen mehr als zwei seiner Tangenten; dasselbe gilt von der gegebenen geschlossenen Curve, da sie sich von $\mathfrak{B}$ nur um den beliebig kleinen Bogen AB unterscheidet. Es gilt somit folgender Satz:

Eine geschlossene von Singularitäten freie Curve begegnet keiner Geraden öfter als zweimal, und durch keinen Punkt gehen mehr als zwei ihrer Tangenten; sie kann stets als Projection einer ganz im Endlichen gelegenen Curve betrachtet werden.

§ 9.

Einige der in den letzten Paragraphen erhaltenen Resultate stehen in engem Zusammenhang mit denjenigen Sätzen, welche Möbius in der Note „Ueber die Gestalt sphärischer Curven“ (Werke Bd. II, S. 183) aufgestellt hat. Die sphärischen Curven, welche dort betrachtet werden, können vom Mittelpunkt der Kugel in ebene Curven projicirt werden, die an Singularitäten nur Doppeltangenten besitzen.

Möbius erhält das Resultat, dass seine Curven entweder geschlossen, oder einfache oder Doppelspiralen sind; die letztere Möglichkeit fällt fort beim Ausschluss von Doppeltangenten — wir kommen auf sie in § 11 zurück —; die ersten beiden sind die in §§ 7 und 8 betrachteten Fälle. Denn denkt man sich z. B. im Falle des § 7 ($\mathfrak{m} > 0$) den Bogen ganz ins Endliche projicirt, so schneidet derselbe die Tangente b abgesehen von B noch mindestens einmal; um dies für eine im Endlichen liegende Curve zu ermöglichen, muss dieselbe, wenn man sie sich von B aus durchlaufen denkt, bei jedem Schnitt von der einen Seite der Geraden b auf die andere übergehen und demnach $\mathfrak{m}$ halbe Umkreisungen des Punktes B vollziehen. — Die Fragen nach der Anzahl der Schnitte mit einer Geraden u. s. w. werden bei Möbius nicht berührt.

Allerdings sind die Möbius'schen Entwicklungen ziemlich weit davon entfernt, einen strengen Beweis der aufgestellten Behauptungen

zu liefern; z. B wird — in der Bezeichnung unsrer §§ 4 ff. — als evident angesehen, dass der über N hinaus fortgesetzte Bogen die Strecke $\overline{AN}$ nicht wieder treffen kann, wenn nicht Wendepunkte oder Spitzen vorhanden sind. Das ist aber zunächst nur evident für endliche Bögen, während erst aus unseren Entwicklungen folgt, dass man sich auf endliche Bögen beschränken darf (§ 7); sodann aber dürfte es sich lohnen, einen bei bestimmten Voraussetzungen stichhaltigen Beweis derartiger evidenter Thatsachen aufzustellen, weil ein solcher nicht nur die Anforderungen einer strengen Methode befriedigt, sondern auch die evidente Einsicht sozusagen ins Einzelne hinein präcisirt. Worauf in unserem Falle die Unmöglichkeit, die Strecke $\overline{AN}$ wieder zu erreichen, beruht, lehrt die Betrachtung der in § 4 definirten Bögen PT und ihrer Gebiete (0).

Soweit übrigens Möbius Beweise liefert, ist seine Methode im Grunde die hier angewandte; überall handelt es sich um die Bewegungsrichtung der Schnittpunkte beweglicher Tangenten mit festen Geraden- oder Curven, und massgebend ist die Bemerkung, welche das Wesen der Staudt'schen Sätze ausmacht, dass derartige Bewegungsrichtungen sich nur in den bekannten besonderen Lagen der Tangenten ändern. — Ebenso liegen den Beweisen der allgemeinen Sätze über Gestaltsverhältnisse in der Abhandlung „über die Grundformen der Linien dritter Ordnung", auf welche wir im Abschnitt V zurückkommen, implicite die Staudt'schen Sätze zu Grunde.

IV. Curven mit Doppeltangenten und Doppelpunkten.

§ 10.

Analog den im Abschnitt III erhaltenen Sätzen über die allgemeinste Gestalt geschlossener oder ungeschlossener Curven, die von allen Singularitäten frei sind, kann man auch allgemeine Sätze ableiten unter der Voraussetzung, dass nur eine bestimmte Art von Singularitäten, z. B. nur Doppeltangenten oder nur Doppelpunkte auftreten.

Es sei etwa (Fig. 8) A_1A_2 ein beliebiger Bogen, der an Singularitäten nur Doppeltangenten aufweist. Lässt man dann den Punkt T, dessen Tangente t sei, von A_1 aus den Bogen entlang laufen, so wird es, wenn Doppeltangenten vorhanden sind, ein erstes Mal vorkommen, dass die Gerade t den Bogen A_1T nochmals ausserhalb des Punktes T berührt; diese Lage des Punktes T heisse S_2, der zweite Berührungspunkt des Bogens A_1S_2 mit t sei S_1. Die Doppeltangente $|S_1S_2|$ werde durch s bezeichnet. Man kann dabei annehmen, dass die Punkte S_1 und S_2 nicht zusam-

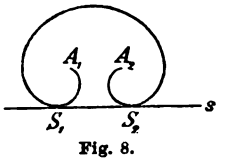


Fig. 8.

menfallen, da man sonst entweder complicirtere Singularitäten oder eine einfache geschlossene Curve ohne Singularitäten erhielte, welch letztere in § 8 hinreichend besprochen sind.

Es kann nun zunächst das Lemma bewiesen werden, dass der Bogen $S_1 S_2$ mit s nur die Punkte S_1 und S_2 gemein hat. Lässt man nämlich von diesem Bogen ein beliebig kleines den Punkt S_2 enthaltendes Stück fort, so bleibt zufolge der Definition dieses Punktes ein nirgends singulärer Bogen übrig, von dessen Endtangenten die eine die feste Gerade s ist, die andere dieser unbegrenzt genähert werden kann. Die reciprok entsprechende Figur wäre also ein nirgends singulärer Bogen, von dessen Endpunkten der eine, der Geraden s entsprechende fest ist, der andere diesem unbegrenzt nahe kommen kann. Ein solcher Bogen ist aber nach § 8, so lange die Endpunkte noch nicht zusammengefallen sind, so beschaffen, dass durch keinen Punkt mehr als zwei seiner Tangenten gehen; somit kann auch in der ursprünglichen Figur die Tangente s ausser S_1 keinen Punkt des Bogens enthalten, der aus $S_1 S_2$ durch Fortlassung eines beliebig kleinen S_2 enthaltenden Stückes entstanden ist. Der ganze Bogen $S_1 S_2$ hat also mit s nur die Punkte S_1 und S_2 gemein.

Beiläufig folgt noch, da jede Tangente des Bogens $S_1 S_2$ mit diesem nur den Berührungspunkt gemein hat, dass es Gerade giebt, die keinen Punkt des Bogens $S_1 S_2$ enthalten; derselbe kann also ganz ins Endliche projicirt werden.

§ 11.

Lässt man nun den Punkt T von A_1 herkommend die Lage S_1 passiren, so muss nach § 2 die Tangente t zwei in der Nähe von S_2 liegende Schnittpunkte mit dem Bogen $A_1 A_2$ entweder gewinnen oder verlieren. Ersteres ist unmöglich, da sonst eine von s verschiedene Tangente des Bogens $S_1 S_2$ diesen noch ausserhalb des Berührungspunktes schneiden würde, was nach § 10 nicht geschieht. — Auf Grund der analogen für S_2 durchgeführten Betrachtung folgt, dass die Tangente t, wenn der Punkt T die Lage S_2 in der Richtung nach A_2 hin passirt, einen von S_1 ausgehenden Schnittpunkt P mit dem Bogen $S_1 A_2$ gewinnt, oder auch einen Schnittpunkt mit dem Bogen $S' T$, mit welchem sie bisher nur den Berührungspunkt gemein hatte, wenn S' ein beliebig wenig von S_1 verschiedener Punkt des Bogens $S_1 S_2$ ist.

Jetzt laufe der Punkt T von S_2 nach A_2 hin; dann bewegt sich der Punkt P zunächst in derselben Richtung, und solange der Bogen $S' T$ noch keine Doppeltangente aufweist, können auf die aufeinanderfolgenden Lagen des Bogens PT die in den §§ 4 und 5 für den ebenso bezeichneten Bogen angestellten Betrachtungen angewandt werden. —

Angenommen nun (Fig. 9), der Bogen $S'A_2$ besässe Doppeltangenten, so würde der Punkt T ein erstes Mal in eine derartige Lage T_0 rücken müssen, dass seine Tangente den Bogen $S'T_0$ noch in einem weiteren Punkte T_0' berührte. Dann sei T_1 ein Punkt des Bogens T_0T_0', P_1 die zugehörige Lage des Punktes P, und der Bogen T_0T_1 so klein, dass er mit der Tangente T_1P_1 nur den Punkt T_1 gemein hat; ein beliebiger Punkt dieses Bogens zwischen T_1 und T_0 sei T_2. Da nun die Bögen $S'T_1$ und $S'T_2$ von Singularitäten frei sind, so können auf sie die Sätze der §§ 4 und 5 angewandt werden; also liegt der Punkt T_2 im Innern des zum Bogen P_1T_1 gehörigen Gebiets (0). Die Begrenzung dieses Gebiets besteht nach §§ 4 und 3 aus einer Strecke P_1T_1 und dem Bogen P_1T_1, kann also mit dem Bogen T_1P_0 zufolge der für diesen gemachten Voraussetzung ausser T_1 keinen Punkt gemein haben. Demnach muss, wie jeder Punkt T_2, so auch der Punkt T_0 im Innern des bezeichneten Gebiets (0) liegen. In dieses geht aber nach § 5 von den Tangenten des nirgends singulären Bogens $S'T_1$ keine hinein; also kann auch die in T_0' berührende nicht durch T_0 gehen; eine Doppeltangente des Bogens $S'A_2$ ist unmöglich.

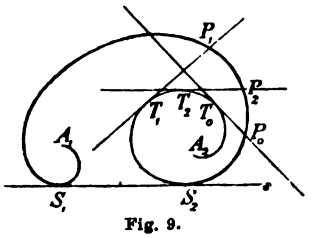


Fig. 9.

Ebenso ist der Bogen $S''A_1$ von Singularitäten frei, wenn S'' ein beliebig wenig von S_2 verschiedener Punkt des Bogens S_1S_2 ist; dabei ist S'' der äussere, A_1 der innere Endpunkt, ebenso wie S' der äussere, A_2 der innere Endpunkt des Bogens $S'A_2$ ist. Wenn also M ein beliebiger Punkt des Bogens S_1S_2 ist, so sind die Bögen MA_1 und MA_2 von Singularitäten frei, und die Doppeltangenten der Curve A_1A_2 können nur als gemeinsame Tangenten der Bögen MA_1 und MA_2 auftreten; da A_1 und A_2 die inneren Endpunkte sind, so sind diese Bögen nach Möbius als Spiralen, der ganze Bogen A_1A_2 als Doppelspirale zu bezeichnen.

Fügt man zu diesen Resultaten ihre reciproken Ergänzungen, so erhält man folgenden Satz:

Jeder ebene Bogen, der an Singularitäten entweder nur Doppelpunkte oder nur Doppeltangenten besitzt, kann auf mannichfaltige Weise durch einen seiner Punkte in zwei Theile zerlegt werden, welche beide von Singularitäten frei sind. Die Doppeltangenten bezw. Doppelpunkte sind gemeinsame Tangenten bezw. Schnittpunkte der beiden Theilbögen.

Beiläufig folgt noch aus den Eigenschaften der Bögen MA_1 und MA_2, dass der Bogen S_1S_2 zum Endpunkt A_2 in derselben Beziehung steht wie zu A_1; auch wenn man den gegebenen Bogen von A_2 aus durchlaufen denkt, ist $s = |S_1S_2|$ die erste Tangente, welche mit dem durchlaufenen Bogen in nochmalige Berührung tritt.

§ 12.

Die hiermit gewonnene Grundanschauung betreffs der Gestalt beliebiger mit den hier zugelassenen Singularitäten behafteter Bögen führt, analog dem Entwickelungsgange des Abschnitts III, zu entsprechenden Sätzen über geschlossene Curven.

Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, dass der Bogen $S_1 S_2$ nach § 10 mit s ausser den Berührungspunkten S_1 und S_2 keine weiteren Punkte gemein hat. Wenn also t eine Tangente dieses Bogens ist, deren Berührungspunkt T in ungeänderter Richtung von S_1 nach S_2 läuft, so überstreicht nach den Staudt'schen Sätzen der Schnittpunkt (st) die eine der beiden Strecken $S_1 S_2$ genau einfach; diese werde durch $[S_1 S_2]_1$, die andere durch $[S_1 S_2]_2$ bezeichnet. Es sei N_1 ein Punkt der ersteren, N_2 ein Punkt der zweiten Strecke; dann kehrt die Gerade $|N_2 T|$ den Sinn ihrer Drehung gar nicht, die Gerade $|N_1 T|$ genau einmal um, wenn sie nämlich in die einzige durch N_1 gehende Tangente des Bogens $S_1 S_2$ übergeht. Die Gerade $|N_1 T|$ hat demnach zu Anfang und Ende der Bewegung des Punktes T entgegengesetzte, die Gerade $|N_2 T|$ denselben Drehungssinn (Fig. 10). Letztere dreht sich also in demselben Sinne, wenn der Punkt T den Bogen $S_1 S_2$ über S_1 hinausgehend verlässt und von S_2 her in ihn hineintritt.

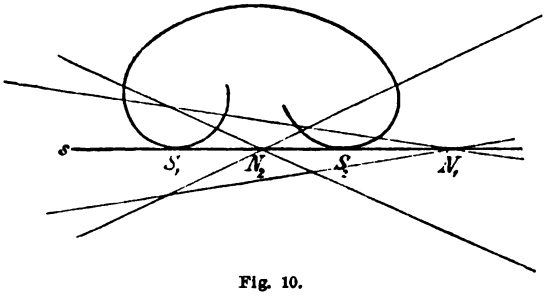


Fig. 10.

Wenn nun speciell s die einzige Doppeltangente der betrachteten Curve ist, so kann diese nicht — bei Ausschluss sonstiger Singularitäten geschlossen sein. Denn in diesem Falle wäre derjenige zweite Bogen $S_1 S_2$, der den bisher betrachteten zu einer geschlossenen Curve ergänzt, ein Bogen von derselben Beschaffenheit; die Schnittpunkte seiner Tangenten mit s liegen also auch alle auf einer und derselben der beiden Strecken $S_1 S_2$ und bedecken dieselbe einfach; es wäre dies die Strecke $[S_1 S_2]_2$, da der Schnittpunkt (st) in diese hineinrückt; wenn der Punkt T z. B. durch S_1 vom ersten zum zweiten Bogen $S_1 S_2$ übertritt. Von letzterem ginge also durch N_2 eine einzige Tangente, sodass die Gerade $|N_2 T|$ ihren Drehungssinn genau einmal umkehren müsste, wenn der Punkt T den zweiten Bogen $S_1 S_2$ durchläuft. Dies steht aber im Widerspruch mit dem vorher betreffs des Drehungssinnes der Geraden $|N_2 T|$ erhaltenen Resultate; es giebt demnach keine geschlossenen

Curven der angenommenen Beschaffenheit. Fügt man das reciprok entsprechende Resultat hinzu, so ergiebt sich:

Es giebt keine geschlossenen Curven, die an Singularitäten entweder nur eine Doppeltangente, oder nur einen Doppelpunkt besitzen.

§ 13.

Jetzt werde angenommen (Fig. 11, 12), dass der Bogen $A_1 A_2$ ausser s noch eine zweite Doppeltangente s_1 besitze; ihre Berührungspunkte mit den Bögen $A_1 S_1$ und $A_2 S_2$ (§ 10) seien T_1 und T_2. Geht

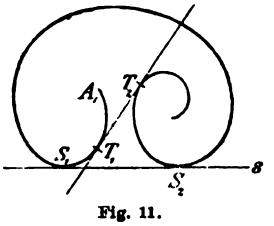


Fig. 11.

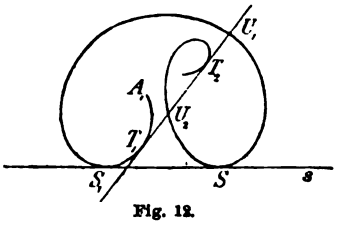


Fig. 12.

man von T_1 nach S_1, von T_2 nach S_2 hin und weiter längs der Curve, so seien U_1 bezw. U_2 die ersten Schnittpunkte der Curve mit s_1, die man erreicht. Solche Schnittpunkte sind wirklich vorhanden, da z. B. der beliebig nahe bei S_1 auf dem Bogen $S_1 S_2$ liegende Punkt S' nach § 10 der äussere Endpunkt des Bogens $S' A_2$ ist, durch welchen jedenfalls eine in der Nähe von S_2 berührende Tangente dieses Bogens geht; alle Tangenten des Bogens $S_2 A_2$ haben also ausser ihrem Berührungspunkt mindestens noch einen Punkt mit dem Bogen $S_1 A_2$ gemein. Analoge Betrachtungen gelten bei Vertauschung der Indices 1 und 2; es giebt also stets zwei ganz bestimmte Punkte U_1 und U_2, die aber auch zusammenfallen können (Fig. 11).

Die Bögen $U_1 T_1$ und $U_2 T_2$ sind nun ihrer Definition zufolge von der Art des in § 3 untersuchten Bogens AN; ihre Gebiete (0), welche durch $(0)_1$ und $(0)_2$ bezeichnet werden mögen, sind, abgesehen von den Bögen selbst, begrenzt durch zwei Strecken $\overline{U_1 T_1}$ und $\overline{U_2 T_2}$, die nach Analogie der Strecke $\overline{AN}$ zu definiren sind.

Wenn dann etwa der Bogen $U_2 T_2$ in einem seiner Endpunkte in das Gebiet $(0)_1$ hineintritt, so muss dies auch im andern Endpunkte eintreten; denn da der Bogen $U_2 T_2$ mit s_1 nur seine Endpunkte gemein hat, so könnte er das Gebiet $(0)_1$ nur verlassen, indem er den Bogen $U_1 T_1$ überschritte, was ausgeschlossen ist. In diesem Falle liegt demnach der ganze Bogen $U_2 T_2$ im Gebiet $(0)_1$; die Punkte U_1 und T_1 werden durch U_2 und T_2 nicht getrennt.

Nun verbleiben die nach § 10 von Singularitäten freien Bögen $T_1 A_1$ und $T_2 A_2$ nach § 5 ganz im Gebiet $(0)_1$ bezw. $(0)_2$; in letzteres kann

aber die Curve $T_1 A_1$ nicht eindringen ohne Ueberschreitung des Bogens $T_2 U_2$; wenn also einer der Endpunkte A_1 und A_2 fest, der andere variabel gedacht wird, so kann letzterer dem ersteren nicht unendlich nahe kommen. — Eine zu demselben Resultat führende Betrachtung liesse sich offenbar anstellen, wenn der Bogen $T_1 U_1$ in das Gebiet $(0)_2$ hereinträte.

Wenn dagegen keiner der Bögen $U_1 T_1$ und $U_2 T_2$ in das Gebiet (0) des andern hineintritt (Fig. 11), so haben die Gebiete (0) höchstens einen Theil der geradlinigen Begrenzung gemein; da nun nach § 4 die über T_1 und T_2 fortgesetzten Curvenstücke den Strecken $\overline{U_1 T_1}$ und $\overline{U_2 T_2}$ nicht wieder unbegrenzt nahe kommen können, so ergiebt sich auch in diesem Falle, dass die Endpunkte A_1 und A_2 einander nicht unendlich nahe kommen können. Speciell folgt der Satz:

Geschlossene Curven, welche an Singularitäten entweder nur Doppelpunkte oder Doppeltangenten besitzen, sind unmöglich.

§ 14.

Eine interessante Anwendung finden die Ergebnisse des vorigen Paragraphen bei der Betrachtung einer geschlossenen Curve mit einem Doppelpunkt, die an sonstigen Singularitäten nur Doppeltangenten aufweist.

Lässt man längs einer solchen Curve vom Doppelpunkte A aus (Fig. 13) einen Punkt in einer beliebigen Richtung fortgehen, bis er zum ersten Male wieder in die Lage A zurückkehrt, so heisse das beschriebene Stück der Curve etwa $\mathfrak{C}$, der Rest $\mathfrak{C}_1$. Lässt man von ersterem den Doppelpunkt und einen beliebig kleinen denselben enthaltenden Bogen fort, so erhält man ein Curvenstück, das an Singularitäten höchstens Doppeltangenten aufweist, und dessen Endpunkte einander unbegrenzt genähert werden können; es kann also nach § 13 höchstens eine Doppeltangente vorhanden sein.

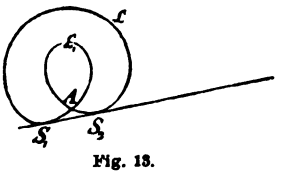


Fig. 13.

Angenommen nun, es sei eine solche wirklich vorhanden und berühre den Bogen $\mathfrak{C}$ in S_1 und S_2 so hat der Bogen $S_1 S_2$ die Eigenschaften des früher ebenso bezeichneten Bogens. Lässt man z. B. den Punkt T, dessen Tangente t sei, längs der Curve die Lage S_2 in der Richtung nach A hin überschreiten, so gewinnt nach § 11 die Gerade t einen Schnittpunkt P mit dem Bogen $S_1 S_2$, der in der Nähe von S_1 liegt. Man fasse nun irgend eine Lage des Punktes T ins Auge, bei welcher P noch der einzige Schnittpunkt von t mit dem Bogen $S_1 S_2$ ist; läuft dann der Punkt V von P aus längs des Bogens PS_2T und weiter über A hinaus, bis er diesen Punkt zum zweiten M[illegible]

nähert und den Bogen $\mathfrak{C}_1$ durchlaufen hat bis auf ein beliebig kleines Stück AA', so kann der Bogen PS_2TA' an Singularitäten nur Doppeltangenten besitzen.

Wenn nun der Bogen $\mathfrak{C}_1$ eine Doppeltangente besässe, so könnte zwischen ihren Berührungspunkten auf dem Bogen nach § 11 ein Punkt M derart gefunden werden, dass der Bogen PS_2TM dieselben Eigenschaften hat, wie in § 11 die Bögen MA_1 und MA_2: er muss von Singularitäten frei und P der innere Endpunkt sein. Letzteres ist aber offenbar nicht der Fall, da durch P eine in T nicht berührende Tangente des Bogens geht; eine Doppeltangente des Curvenstückes $\mathfrak{C}_1$ ist also nicht vorhanden.

Es bleibt somit nur die Frage übrig, ob die Bögen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ eine Tangente gemein haben können. Eine solche wäre entweder zugleich Doppeltangente des oben betrachteten Bogens PS_2TA', oder des analog construirten, wenn man T von S_1 ausgehen lässt. Hätte ersterer Doppeltangenten, so weiss man nach § 11, dass jedenfalls die Berührungspunkte einer bestimmten Doppeltangente — nämlich der Doppeltangente s in der Bezeichnung des § 11 — zwischen einem Endpunkt und dem Berührungspunkt einer durch ihn gehenden Tangente liegen muss. Es müsste also der Bogen PT, oder, da der Punkt T beliebig nahe bei S_2 liegen kann, der Bogen S_1S_2 eine Doppeltangente besitzen, was nach § 12 nicht der Fall ist; denn der jetzt betrachtete Bogen S_1S_2 hat, wie bemerkt die Eigenschaften des früher ebenso bezeichneten Bogens.

Hiermit ist gezeigt, dass $|S_1S_2|$ die einzige Doppeltangente der ganzen Curve ist, und folgender Satz bewiesen:

Hat eine geschlossene Curve an Singularitäten nur Doppeltangenten und einen einzigen Doppelpunkt, so hat sie auch nur eine Doppeltangente; sind nur Doppelpunkte und eine einzige Doppeltangente vorhanden, so kann auch nur ein Doppelpunkt vorhanden sein.

Da man somit den Bogen PS_2TA' von Singularitäten frei weiss, so folgt leicht, dass ganz im Gebiet (0) desselben das Curvenstück $\mathfrak{C}_1$ verlaufen muss; dieses verbleibt also auch nebst den Bögen S_1A und S_2A im Gebiet (0) des Bogens S_1S_2, und hieraus folgt leicht, dass die betrachtete Curve ganz ins Endliche projicirt werden kann.

V. Curven mit Wendepunkten.

§ 15.

Wir ziehen endlich auch das Auftreten von Wendepunkten und ihren Einfluss auf Gestaltsverhältnisse in den einfachsten Fällen in Betracht.

Ein Wendepunkt W, dessen Tangente w ist, wird nach Staudt (Geometrie der Lage Nr. 197) folgendermassen definirt. Der Punkt T, dessen Tangente t sei, passire längs der betrachteten Curve laufend die Lage W; ist dann g eine nicht durch W gehende Gerade und F ein nicht auf w liegender Punkt, so ändert der Punkt (gt) die Richtung seiner Bewegung; die Gerade $|FT|$ dagegen behält den Sinn ihrer Drehung bei. Liegt der Punkt W im Endlichen, so ist damit gesagt, dass der Drehungssinn der Tangente t, indem sie die Lage w passirt, sich umkehrt; die Bewegungsrichtung des Punktes T bleibt dieselbe.

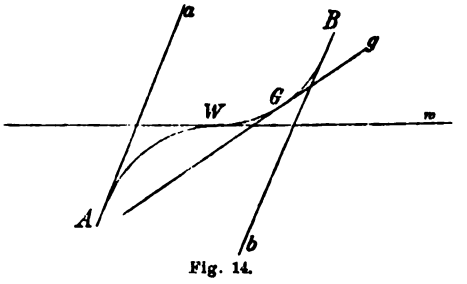


Fig. 14.

Es seien nun (Fig. 14) WA und WB zwei in W an einander grenzende endliche Theile der betrachteten Curve, deren jeder für sich von Singularitäten frei ist und keiner Geraden mehr als zweimal begegnet. Da diese Bögen von W aus längs ihrer gemeinsamen Endtangente w nach entgegengesetzten Richtungen ausgehen — zufolge der Voraussetzung, dass ein die Lage W passirender Punkt seine Richtung nicht ändert —, so passirt der Schnittpunkt (wt) ohne Richtungsänderung die Lage W, wenn der Punkt T längs der Curve von A über W nach B läuft. Zu Anfang und zu Ende dieser Bewegung hat aber t entgegengesetzte Drehungssinne; die Richtung der Bewegung des Punktes (wt) kann also nur dann beide Male dieselbe sein, wenn die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von w liegen. Die Wendetangente wird also von der Curve im Wendepunkte durchsetzt. Hieraus folgt, dass die Gerade $|WT|$, indem sie in die Lage w übergeht, den Sinn ihrer Drehung ändert.

Es sei ferner g eine in G berührende, von w hinreichend wenig verschiedene Tangente des Bogens WA; dann liegen die Punkte A und B auch auf verschiedenen Seiten von g. Daraus folgt, dass die Bewegungsrichtung des Punktes (gt) dieselbe ist, wenn der Punkt T in A und B seine Bewegung beginnt und endigt. Inzwischen aber hat sich diese Richtung geändert im Punkte (gw), wenn die Geraden t und w zusammenfallen; sie muss sich also noch in einer ungeraden Anzahl weiterer Stellen ändern. Da nun die Lage G vom Punkte (gt) ohne Richtungsänderung durchlaufen wird, so folgt, dass die Gerade g den Bogen WB in einer ungeraden Anzahl von Punkten, also genau einmal schneiden muss. Dieselbe Betrachtung gilt offenbar für eine entsprechend gewählte Tangente des Bogens WB; mit Rücksicht auf § 1 ergiebt sich also, dass, wenn der Punkt T einen Wendepunkt W

passirt, ein Schnittpunkt der Tangente des Punktes T mit der Curve die Lage W in entgegengesetzter Richtung durchläuft.

Man sieht, dass die an der Figur evidenten Eigenschaften des einen Wendepunkt enthaltenden Curvenstückes aus der Staudt'schen Definition dieser Singularität abgeleitet werden können.

§ 16.

Auf Grund der erhaltenen Resultate können leicht die Sätze von Möbius über die Wendepunkte geschlossener Curvenzüge, zum Theil in erweiterter Form, bewiesen werden.

Man weiss nach Staudt (Geometrie der Lage Nr. 203), dass die Anzahl der Wendepunkte eines geschlossenen unpaaren Zuges ungerade sein muss; es fragt sich, ob sie $= 1$ sein kann. Diese Frage kann jetzt leicht beantwortet werden, auch wenn man ausser Wendepunkten noch Doppeltangenten als Singularitäten zulässt. Wäre ein einziger Wendepunkt vorhanden, so erhielte man nach Fortlassung eines beliebig kleinen ihn enthaltenden Bogens einen Restbogen, dessen Endpunkte einander beliebig nahe kommen können, der also nach § 13 höchstens eine Doppeltangente besitzt. Wäre eine solche vorhanden, so müsste sie die Eigenschaften der in § 10 definirten Doppeltangente s besitzen, also mit dem betrachteten Bogen nur ihre Berührungspunkte gemein haben; das ist aber nicht möglich, da sich unser Bogen nur beliebig wenig von einem unpaaren Zuge unterscheidet, also jeder Doppeltangente noch ausserhalb ihrer Berührungspunkte begegnen muss.

Sind keine Doppeltangenten vorhanden, so ist der Restbogen von Singularitäten frei; da seine Endpunkte einander beliebig genähert werden können, so geht nach § 8 durch keinen seiner Punkte die Tangente eines andern. Das widerspricht aber der Thatsache, dass die Tangenten des Bogens diesen noch ausserhalb des Berührungspunktes schneiden, da der Bogen von dem unpaaren Zuge nur beliebig wenig verschieden ist. Ein unpaarer geschlossener Zug hat also stets mindestens drei Wendepunkte.

Ebenso kann auch der wichtige Möbius'sche Satz bewiesen werden, dass ein unpaarer Zug, der keiner Geraden mehr als dreimal begegnet, nicht mehr als drei Wendepunkte besitzt.

Es seien etwa W_1 und W_2 zwei längs der Curve aufeinanderfolgende Wendepunkte; der von ihnen begrenzte keinen Wendepunkt enthaltende Bogen heisse $\mathfrak{B}_1$, der Rest der Curve $\mathfrak{B}_2$. Durchläuft dann der Punkt T den Bogen $\mathfrak{B}_1$ von W_1 nach W_2 hin, so kann der Punkt T', den die Tangente des Punktes T ausser diesem noch mit der Curve gemein hat, die Richtung seiner Bewegung längs der Curve nach § 1 nicht ändern, da Doppeltangenten ausgeschlossen sind. Da

nun der Punkt T' zu Anfang seiner Bewegung die Lage W_1 nach § 15 in entgegengesetzter Richtung wie T verlässt, so durchläuft er den Bogen $\mathfrak{B}_2$; zu Ende seiner Bewegung rückt er gleichzeitig mit T in entgegengesetzter Richtung in die Lage W_2. Diese Betrachtung gilt auch, wenn der Bogen $\mathfrak{B}_2$ einen Doppelpunkt enthält; dann kann nicht mehr als ein Wendepunkt vorhanden sein, da sonst der Punkt T' in den Doppelpunkt rücken müsste, womit man Gerade erhalten würde, die der Curve viermal begegnen. — Im Allgemeinen kann die für W_1 und W_2 durchgeführte Betrachtung auf irgend zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte übertragen werden; sind also $2\mathfrak{m}+1$ Wendepunkte vorhanden, so gehen durch jeden Punkt der Curve ausser der in ihm berührenden noch $2\mathfrak{m}$ Tangenten der Curve.

Wenn nun etwa durch den nicht singulären Punkt P vier Tangenten ausser der in ihm berührenden Tangente p hindurchgingen ($\mathfrak{m}=2$), so drehe sich eine durch P gehende Gerade g von der Lage p aus in dem einen und andern Sinne, bis sie zum ersten Male mit einer der vier Tangenten zusammenfällt, welche in dem einen und andern Falle durch a_1 und a_2 bezeichnet werde. Dann beschreibt die Gerade g einen vollkommenen Flächenwinkel $[a_1 a_2]$, der von den Geraden a_1 und a_2 begrenzt wird, dem die Curve in der Umgebung des Punktes P, nicht aber die übrigen durch P gehenden Tangenten angehören. Sollen also die letzteren von der Curve berührt werden, so muss ein von P ausgehender die Curve entlang laufender Punkt den Flächenwinkel $[a_1 a_2]$ wieder verlassen, was in den Berührungspunkten der Tangenten a_1 und a_2 offenbar nicht geschieht. Diese Geraden hätten dann ausser ihren Berührungspunkten und P noch weitere, also mehr als drei Punkte mit der Curve gemein, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist der Möbius'sche Satz, dass nicht mehr als drei Wendepunkte vorhanden sein können, also $\mathfrak{m}=1$ sein muss, bewiesen.

§ 17.

Weitergehende Sätze von ähnlicher Gestalt erhält man vermittelst einer in den früheren Abschnitten noch nicht angewandten Untersuchungsmethode, die auf der Betrachtung von Deformationen und den dadurch bewirkten Modificationen der hauptsächlich in Betracht kommenden Singularitäten der Curve, der Doppeltangenten und Wendepunkte beruht. Bei Deformationen mögen irgend zwei Curvenstücke als nur wenig von einander verschieden betrachtet werden, wenn die Punkte des einen Stückes denen des andern so zugeordnet werden können, dass entsprechende Punkte und die Tangenten entsprechender Punkte nur wenig von einander verschieden sind.

Es berühre nun zunächst eine Doppeltangente irgend einer Curve

in den getrennten Punkten M und N (Fig. 15); um diese herum grenze man Bögen AB und CD ab, die keiner Geraden mehr als zweimal begegnen; der Bogen CD sei so klein angenommen, dass keine seiner Tangenten durch A oder B geht, und dass beide Bögen ausser $|MN|$ keine Tangente gemein haben. Dann berühren nach § 2 in der Nähe von N sowohl Tangenten des Bogens CD, die mit AB zwei, als auch solche die keinen Punkt mit AB gemein haben. Ist also $C'D'$ ein von CD hinreichend wenig verschiedener Bogen, so gehen auch von seinen Tangenten keine durch A oder B, und es sind unter diesen sowohl solche, die zwei, als auch solche, die keinen Punkt mit AB gemein haben, vorhanden. Der stetige Uebergang von den einen zu den andern ist dann nur durch gemeinsame Tangenten der Bögen AB und $C'D'$ möglich; solche sind also jedenfalls vorhanden.

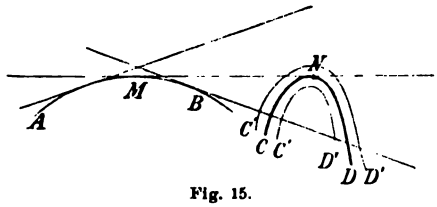


Fig. 15.

Bei hinreichender Beschränkung des Bogens AB geht nun keine Tangente desselben ausser $|MN|$ durch N; dieser Punkt und bei hinreichender Beschränkung des Bogens CD das ganze Gebiet (2) desselben liegen dann ganz im Gebiet (1) des Bogens AB. Wenn also der Bogen $C'D'$ von CD hinreichend wenig verschieden ist, so liegt auch das Gebiet (2) des ersteren ganz im Gebiet (1) des Bogens AB; die Bögen AB und $C'D'$ können also nicht mehr als eine Tangente gemein haben. — Das gleiche Raisonnement kann man auf den Bogen $C'D'$ und einen von AB hinreichend wenig verschiedenen Bogen anwenden; somit ergiebt sich, dass bei stetiger Deformation einer Curve eine Doppeltangente einfach erhalten bleibt, solange ihre Berührungspunkte getrennt und nicht singulär sind.

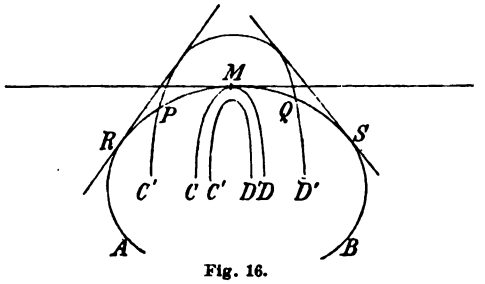


Fig. 16.

Fallen dagegen die Berührungspunkte zusammen, sodass die Curve einen Selbstberührungspunkt M besitzt, so seien die in M sich berührenden Bögen AB und CD (Fig. 16) derartig abgegrenzt, dass keine Tangente des letzteren durch A oder B geht; der Bogen CD liege zunächst in der Umgebung von M im Gebiet (0) des Bogens AB, dem er also bei hinreichender Beschränkung ganz angehört. Wenn nun der von CD beliebig wenig verschiedene Bogen $C'D'$ mit AB keinen Punkt gemein hat, so liegt er ebenfalls ganz im Gebiet (0) des Bogens AB; beide Bögen haben also

keine Tangente gemein. Schneiden sich dagegen die Bögen AB und $C'D'$, so kann dies nur in zwei Punkten P und Q in der Nähe von M geschehen. Läuft dann der Punkt T längs des Bogens AB von P nach A, so geht seine Tangente, sobald die Lage P verlassen ist, niemals durch P oder Q; sie hat aber zu Anfang ihrer Bewegung mit dem Bogen PQ einen Punkt gemein; dieser Schnittpunkt ist, wenn man T in die Lage A übergehen lässt, verschwunden, muss also mit einem zweiten Schnittpunkt zu einem Berührungspunkt zusammengerückt sein. Dies geschehe zum ersten Mal, wenn T die Lage R annimmt; dann liegt der Bogen PQ ganz im Gebiet (2) des Bogens RB, da dies von P und Q gilt, die Endtangenten des Bogens RB aber vom Bogen PQ nicht überschritten werden. Hätten also die Bögen PQ und RA eine Tangente gemein, so wäre ihr Berührungspunkt mit PQ ein Punkt, durch welchen drei Tangenten von AB gingen, was bei hinreichender Beschränkung dieses Bogens unmöglich ist. Das Stück PQ des Bogens $C'D'$ hat also genau eine Tangente mit dem Bogen AP, und ebenso natürlich genau eine mit dem Bogen BQ gemein. Die gleichen Betrachtungen kann man offenbar anstellen, wenn der Bogen AB deformirt wird; analoge gelten auch, wie man leicht sieht, wenn die Bögen AB und CD in der Nähe des Punktes M jeder im Gebiet (2) des andern liegt. In jedem Falle haben die Bögen nach der Deformation entweder zwei oder keine Tangenten gemein, d. h. die Deformation einer Curve in der Umgebung eines Selbstberührungspunktes führt stets zum Gewinn oder Verlust zweier Doppeltangenten.

§ 18.

Es sei wiederum W wie in § 15 ein Wendepunkt, in welchem die Bögen WA und WB zusammenstossen; diese seien von derselben Beschaffenheit wie die gleich bezeichneten Bögen in § 15. Die Wendetangente w berühre (Fig. 17) den nirgends singulären Bogen CD, der keiner Geraden mehr als zweimal begegnet, in dem von W verschiedenen Punkte E. Man denke sich nun die Bögen WA und WB durch angesetzte Bögen WA_1 und WB_1 zu Bögen AA_1 und BB_1 ergänzt, die keine Singularitäten besitzen, und mit CD nur die einzige Tangente w gemein haben. Läuft dann der Punkt T, dessen Tangente t sei, von A längs des Bogens AWA_1 nach A_1,

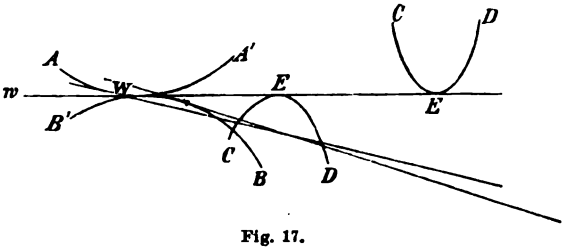


Fig. 17.

oder von B längs des Bogens BWB_1 nach B_1, so bewegen sich die Schnittpunkte der Geraden t mit dem Bogen CD nach § 2 beidemal in demselben Sinne, sie rücken entweder in die Endlage E zusammen, oder aus der Endlage E auseinander; bevor die Tangente t die Lage w erreicht, sind also in beiden Fällen entweder zwei oder kein Schnittpunkt mit CD vorhanden. Dasselbe gilt also, wenn man CD ersetzt durch den Bogen $C'D'$ von derselben Beschaffenheit, der sich von CD hinreichend wenig unterscheidet.

Nach § 17 hat nun der Bogen $C'D'$ mit jedem der Bögen AA_1 und BB_1 genau eine Tangente gemein; diese sind dann und nur dann gemeinsame Tangenten von $C'D'$ und AWB, wenn ihre Berührungspunkte mit AA_1 bez. BB_1 den Bögen AW bez. WB angehören. Wenn nun z. B. der Bogen $C'D'$ die Gerade w schneidet, so hat die Tangente t, bevor sie die Lage w erreicht, also solange sie Tangente des Bogens AWB ist, entweder ebensoviel Punkte wie w mit $C'D'$ gemein, oder zwei weniger; im ersten Falle hat also keiner der Bögen AW, BW, im zweiten jeder von ihnen mit $C'D'$ eine Tangente gemein. Dasselbe Verhältniss, d. h. dass die Bögen AW und BW sich in Bezug auf den Besitz einer mit $C'D'$ gemeinsamen Tangente gleich verhalten, findet offenbar auch statt, wenn die Gerade w den Bogen $C'D'$ nicht schneidet; es werden also, wenn man $C'D'$ an Stelle von CD setzt, stets zwei gemeinsame Tangenten mit AWB gewonnen oder verloren. Da endlich dieselben Betrachtungen angestellt werden können, wenn man nicht CD, sondern AWB deformirt, so so ergiebt sich folgender Satz:

Berührt bei Deformation einer Curve eine Wendetangente noch ausserhalb ihres Wendepunktes in einem nicht singulären Punkte der Curve, so werden zwei Doppeltangenten gewonnen oder verloren.

Eine letzte für uns in Betracht kommende Art der Deformation ist folgende: Der endliche, nirgends singuläre und keiner Geraden mehr als zweimal begegnende Bogen AB gehe über in einen nur wenig davon verschiedenen Bogen $A'B'$, der zwei einander sehr nahe liegende Wendepunkte W_1 und W_2 mit den Tangenten w_1 und w_2 besitzt (Fig. 18, s. S. 374); die Tangenten in A' und B' seien a' und b'. Durchläuft dann der Punkt T, dessen Tangente t sei, einen der drei Bögen $A'W_1$, W_1W_2, W_2B', so können die Schnittpunkte $(a't)$, (w_1t), (w_2t), $(b't)$ ihre Anfangslagen nicht wieder erreichen, da die Bewegung eines jeden dieser Punkte sich von der Bewegung des Schnittpunktes einer festen und einer beweglichen Tangente des Bogens AB nur wenig unterscheidet; keiner jener drei Bögen begegnet also einer Geraden mehr als zweimal. Lässt man nun den Punkt T von A' bis B' laufen, so hat der Punkt (w_1t) zu Anfang und zu Ende seiner Bewegung dieselbe Richtung, muss also inzwischen eine gerade

Anzahl von Malen umgekehrt sein. Das geschieht z. B. nach § 15, wenn T in die Lage W_2 fällt; da nun w_1 mit den Bögen $A'W_1$ und W_1W_2 nur den Punkt W_1 gemein hat, in welchem der Punkt $(w_1 t)$

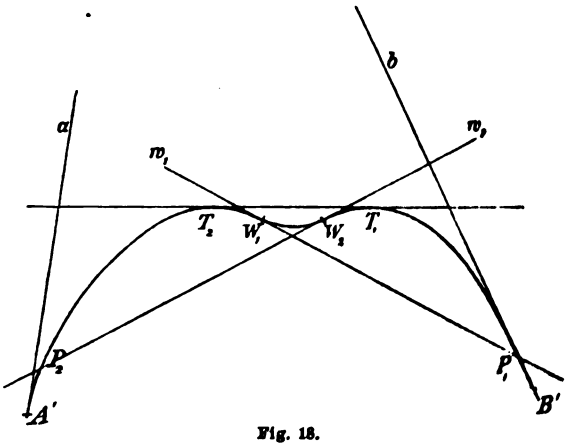


Fig. 18.

nach § 15 nicht umkehrt, so muss eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten des Bogens W_2B' mit w_1, also genau einer vorhanden sein, welcher P_1 heisse. Ebenso schneidet die Tangente w_2 den Bogen $A'W_1$ in genau einem Punkte P_2.

Gemeinsame Tangenten des Bogens W_1W_2 mit einem der Bögen $A'W_1$ und $B'W_2$ sind nun offenbar nicht vorhanden, da z. B. die Schnittpunkte der Tangenten von W_1W_2 und $A'W_1$ mit w_1 durch den Punkt W_1 von einander getrennt werden. Lässt man aber den Punkt T über W_2 in den Bogen W_2B' eintreten, so hat t anfangs nach dem obigen und § 15 einen in der Nähe von P_2 und einen in der Nähe von W_2 liegenden Punkt mit dem Bogen $A'B'$ gemein; beide Punkte sind verschwunden, wenn T die Lage B' erreicht; sie müssen also in einen Berührungspunkt T_2 der Tangente t mit dem Bogen $A'W_1$ zusammengerückt sein. Dabei sei T_1 die erste von W_2 aus erreichte Lage von T, bei welcher ein Punkt T_2 vorhanden ist. Die Tangenten des Bogens T_1B' fallen theils in das Gebiet (1), theils in das Gebiet (2) desselben. In letzteres dringt aber der Bogen $A'W_1$ nicht ein, da er sonst entweder eine der Geraden $|T_1T_2$ und b', oder den Bogen $B'T_1$ schneiden müsste, was nicht stattfindet. Hätte also eine Tangente des Bogens T_1B' mit $A'W_1$ eine Berührung, so fände dieselbe statt im Gebiet (1) des Bogens T_1B'. Dieses liegt aber, soweit es dem den Bogen $A'B'$ enthaltenden durch a' und b' begrenzten vollkommenen Flächenwinkel angehört, auf der entgegengesetzten Seite von T_1T_2 wie der Bogen T_1B', also auch wie der Bogen $A'W_1$, kann also keinen Punkt des letzteren enthalten. Somit

ist $|T_1 T_2|$ die einzige gemeinsame Tangente der Bögen $A' W_1$ und $W_2 B'$, oder die einzige Doppeltangente des Bogens $A'B'$. Da nun die Beschränkung auf einen endlichen Bogen AB offenbar der Allgemeinheit keinen wesentlichen Abbruch thut, so ist folgender Satz bewiesen.

Treten bei stetiger Deformation eines anfangs von Singularitäten freien Curvenstücks zwei Wendepunkte auf, die aus unendlicher Nähe auseinanderrücken, so tritt gleichzeitig eine einzige Doppeltangente auf.

§ 19.

Aus den letzten beiden Paragraphen ist vollständig zu ersehen, wie sich bei stetiger Deformation einer Curve ohne Rückkehrpunkte die Singularitäten ändern. Speciell können die Doppeltangenten, wenn keine Aenderung im Bestand der Wendepunkte eintritt, nur paarweise auftreten und verschwinden; sie können einzeln nur auftreten oder verschwinden gleichzeitig mit einem Paar von Wendepunkten. Die dem § 17 reciprok entsprechenden Entwicklungen ergeben ferner, dass Doppelpunkte im Allgemeinen erhalten bleiben, und nur dann paarweise verschwinden oder auftreten, wenn die Curve sich selbst berührt. Um von diesen Resultaten zur Ableitung von Sätzen über die wirklich vorkommenden Combinationen von Singularitäten Gebrauch machen zu können, muss man sich über die Deformirbarkeit der Curven in einander klar werden.

Zu diesem Zweck ist es ganz passend, nach der in § 9 erwähnten Methode von Möbius die projective Geometrie der Ebene durch die Geometrie der Kugel zu ersetzen. Man projicire einfach die Ebene vom Mittelpunkt der Kugel auf die Oberfläche derselben; dann entsprechen jedem Punkte der Ebene zunächst zwei Punkte der Kugel. Jetzt sei eine geschlossene ebene Curve gegeben und von den beiden Projectionen eines ihr angehörigen Punktes P die eine nach Willkür herausgegriffen und durch P_1 bezeichnet; lässt man den Punkt T von P aus die ebene Curve entlang laufen, so geht eine bestimmte seiner Projectionen stetig aus P_1 hervor, und man erhält so eine sphärische Curve, deren Punkte denen der gegebenen ein-eindeutig entsprechen. Enthält die sphärische Curve diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel, so hat die ebene Curve einen Doppelpunkt. Kehrt ferner der Punkt T, nachdem er die gegebene Curve vollständig durchlaufen hat, zur Lage P zurück, so kehrt der entsprechende Punkt der sphärischen Curve entweder in die Lage P_1 zurück, oder geht in den diametral gegenüberliegenden Punkt über, je nachdem die gegebene Curve paar oder unpaar ist; in ersterem Falle hat man eine geschlossene, in letzterem eine durch zwei diametral gegenüberliegende Punkte be-

grenzte sphärische Curve, die der gegebenen punktweise ein-eindeutig entspricht. Durchläuft ein Punkt die geschlossene ebene Curve einmal vollständig, so hat er jeden grössten Kugelkreis eine gerade Anzahl von Malen überschritten; diese Anzahl ist ungerade, wenn der Punkt von seiner Anfangslage bis zu dem diametral gegenüberliegenden Punkte läuft.

Etwas abweichend von dieser Anschauungsweise betrachtet Möbius immer gleichzeitig beide Projectionen des Punktes T und unterscheidet, entsprechend paaren und unpaaren Zügen, zwischen Zwillingscurven und Doppelcurven. Es kommt dies im Wesentlichen auf dasselbe hinaus, wie wenn man sich die Ebene der projectiven Geometrie doppelt denkt, und die beiden über einander liegenden Blätter längs irgend einer Geraden, etwa im Unendlichen zusammenhängen lässt — eine Anschauungsweise, die Herr F. Klein bei gewissen zur Definition der Zusammenhangszahlen führenden Betrachtungen über Deformation von Curven angewandt hat (Bd. VII dieser Annalen S. 550).

Auf der Kugelfläche ist nun evident, dass irgend zwei von Doppelpunkten und Spitzen freie Curven, die entweder beide geschlossen oder beide durch ein Paar diametral gegenüberliegender Punkte begrenzt sind, in einander deformirt werden können, indem ein stetiger Uebergang durch eine Reihe von Curven derselben Beschaffenheit vermittelt wird. Dabei wird es sich aber nicht im Allgemeinen vermeiden lassen, dass während der Deformation Paare diametral gegenüberliegender Punkte auf der Curve vorkommen. Hat man also in der Ebene irgend zwei geschlossene Curven, die beide paar oder beide unpaar sind, und keine Doppelpunkte oder Spitzen besitzen, so kann man die Curven in einander deformiren durch eine stetige Reihe von Curven derselben Parität, die ebenfalls keine Rückkehrpunkte besitzen, bei denen aber das Auftreten von Doppelpunkten möglicherweise nicht vermieden werden kann. Letztere können aber, wenn sie zu Anfang und zu Ende der Deformation nicht vorhanden sind, nur auftreten und verschwinden, indem die Curve sich selbst berührt, ein Fall, der schon in § 17 betrachtet worden ist.

Bei derartigen Deformationen können nun nach §§ 17 und 18 Doppeltangenten entweder nur paarweise auftreten und verschwinden, oder einzeln gleichzeitig mit einem Paar von Wendepunkten. Deformirt man also z. B. einen paaren Zug, der nach Staudt (Geometrie der Lage Nr. 203) eine gerade Zahl von Wendepunkten, etwa $2w$ besitzen muss, und ausserdem an Singularitäten nur noch b Doppeltangenten aufweist, in einen paaren Zug, der nirgends singulär ist, so sind genau w Doppeltangenten einzeln verloren gegangen, während ausserdem nur Paare von Doppeltangenten erschienen und verschwunden sind; also muss $b - w$ eine gerade Zahl sein. D. h.

Besitzt ein paarer Zug an Singularitäten nur $2w$ *Wendepunkte und* b *Doppeltangenten, so besteht die Congruenz* $b \equiv w$ (*mod.* 2).

Dieselben Erwägungen ergeben ein ähnliches Resultat, wenn man einen unpaaren Zug mit einer ungeraden Anzahl von etwa $2w + 3$ Wendepunkten und b Doppeltangenten in einen unpaaren Zug mit drei Wendepunkten deformirt:

Besitzt ein unpaarer Zug an Singularitäten nur $2w + 3$ *Wendepunkte und* b *Doppeltangenten, so besteht die Congruenz* $w \equiv b$ (*mod.* 2).

Bei fünf Wendepunkten sind also z. B. sicher Doppeltangenten vorhanden.

Dorpat, December 1891.

Ueber Functionen einer reellen Variabeln, welche Derivirte jeder Ordnung besitzen.

Von

L. Maurer in Strassburg.

Die Frage, unter welchen Bedingungen eine Function einer reellen Variabeln einen Differentialquotienten besitzt, ist in neuerer Zeit mehrfach untersucht worden, doch ist es bisher nicht gelungen eine vollständig befriedigende Beantwortung derselben zu finden. Ich sehe davon ab, im Folgenden auf diese Frage in ihrer ganzen Allgemeinheit einzugehen und beschränke mich darauf ein weit specielleres Problem zu behandeln, für das eine vollständige — noch dazu merkwürdig einfache — Lösung nachgewiesen werden kann: ich untersuche die Bedingungen, unter denen eine Function einer reellen Variabeln in allen Punkten eines gegebenen Intervalls bestimmte, endliche Derivirte jeder vorgeschriebenen Ordnung besitzt.

I.

Ich bezeichne mit $f(x)$ eine Function der reellen Variabeln x, welche für das Intervall a, b der Variabeln definirt ist. Ich setze voraus, dass der Function $f(x)$ in jedem Punkte dieses Intervalles bestimmte, endliche Derivirte jeder vorgeschriebenen Ordnung zukommen. Aus dieser Voraussetzung folgt, dass die Function selbst und alle ihre Derivirten in dem angegebenen Intervall stetig sind.

Da das Verhalten der ganzen rationalen Functionen in den hier in Betracht kommenden Beziehungen von dem Verhalten der übrigen Functionen wesentlich abweicht, so schliesse ich dieselben von der folgenden Untersuchung aus; ich setze also voraus, dass keine Derivirte von angebbarer Ordnung in dem Intervall a, b den constanten Werth Null habe.

Ich mache ferner die beschränkende Voraussetzung, die Function selbst und eine jede Derivirte von angebbarer Ordnung verschwinde

nur in einer angebbaren Anzahl von Punkten des endlichen Intervalls a, b.

Um zu übersehen, welche Functionen durch diese Voraussetzung ausgeschlossen werden, nehmen wir einen Augenblick an, die k^{te} Derivirte $f^{(k)}(x)$ verschwinde in unendlich vielen Punkten des betrachteten Intervalls, ohne im ganzen Intervall gleich Null zu sein.

Dann bieten sich zwei Möglichkeiten dar.

Die Nullpunkte können erstens einen Theil α, β des Intervalls a, b stetig erfüllen, der Art, dass in jedem noch so kleinen Theile des Intervalls α, β unbegrenzt viele derselben liegen. Dann muss $f^{(k)}(x)$ als stetige Function in dem ganzen Intervall α, β den constanten Werth Null haben. Dagegen werden $f^{(k)}(x)$ und die Derivirten höherer Ordnung ausserhalb des Intervalls α, β von Null verschiedene Werthe annehmen.

Es kann zweitens der Fall eintreten, dass sich die Nullpunkte von $f^{(k)}(x)$ um einen Punkt α häufen, der Art dass jedes noch so kleine den Punkt α einschliessende Intervall unendlich viele derselben enthält, dass aber von jedem derartigen Intervall immer noch Theile abgetrennt werden können, die nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten enthalten. Da zwischen zwei Nullpunkten einer Derivirten immer mindestens ein Nullpunkt der Derivirten nächst höherer Ordnung liegt, so häufen sich um den Punkt α auch die Nullpunkte der Derivirten von höherer als der k^{ten} Ordnung.

In beiden betrachteten Fällen giebt es mindestens einen singulären Punkt, in dem die k^{te} Derivirte und alle Derivirten höherer Ordnung verschwinden, während eine jede dieser Derivirten in unmittelbarer Nähe des singulären Punktes von Null verschiedene Werthe annimmt.

Functionen die von derartigen Singularitäten frei sind, genügen sicher der Voraussetzung, dass jede Derivirte von angebbarer Ordnung nur in einer angebbaren Anzahl von Punkten verschwindet; diese Voraussetzung kann aber auch erfüllt sein, wenn die Function Singularitäten der angegebenen Art in endlicher Anzahl besitzt.

Die Voraussetzung, dass eine Derivirte von angebbarer Ordnung nur eine angebbare Anzahl von Nullpunkten hat, schliesst nicht die Möglichkeit aus, dass mit der Ordnung der Derivirten auch die Anzahl ihrer Nullpunkte über alle Grenzen wächst. Dieser Fall tritt bei Functionen der einfachsten Art ein, so z. B. bei allen rationalen gebrochenen Functionen, deren Nenner für keinen reellen Werth der Variabeln verschwindet.

Es sei α ein Nullpunkt der Derivirten $f^{(k)}(x)$. Da die Anzahl der Nullpunkte von $f^{(k)}(x)$ und $f^{(k+1)}(x)$ endlich ist, so kann man ein den Punkt α einschliessendes Intervall $\alpha - \delta$, $\alpha + \delta$ der Art wählen, dass erstens $f^{(k)}(x)$ nur im Punkte α und in keinem anderen Punkte

dieses Intervalls verschwindet und dass zweitens $f^{(k+1)}(x)$ entweder in keinem Punkte des Intervalls $\alpha - \delta$, $\alpha + \delta$ oder nur im Punkte α verschwindet. Durchläuft x das Intervall $\alpha - \delta$, α so nimmt der absolute Werth von $f^{(k)}(x)$ beständig ab; durchläuft x das Intervall α, $\alpha + \delta$, so nimmt der absolute Werth von $f^{(k)}(x)$ beständig zu.

Die Functionen $f^{(k)}(x)$ und $f^{(k+1)}(x)$ haben daher in dem Intervall $\alpha - \delta$, α verschiedene, in dem Intervall α, $\alpha + \delta$ dagegen gleiche Vorzeichen. Die eine der beiden Functionen wechselt demnach im Punkte α ihr Vorzeichen, die andere nicht.

II.

Im vorigen Artikel wurde die Voraussetzung eingeführt, dass eine Derivirte von bestimmter Ordnung nur in einer angebbaren Anzahl von Punkten des Intervalls a, b verschwindet. Es handelt sich nun zunächst darum, dieser Voraussetzung Ausdruck zu geben, ohne den Begriff des Differentialquotienten zu benützen. Zu diesem Zweck theilen wir das Intervall a, b, für welches die Function $f(x)$ definirt ist, in n gleiche Theile von der Grösse $h = \frac{b-a}{n}$ und bezeichnen die Theilpunkte der Reihe nach mit $x_0 x_1 x_2 \ldots x_n$, so dass $x_0 = a$ und $x_n = b$ ist.

Sodann bilden wir die Differenzen

$$\Delta_0 = f(x_1) - f(x_0), \quad \Delta_1 = f(x_2) - f(x_1) \ldots \Delta_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}),$$
$$\Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_0, \quad \Delta_1^2 = \Delta_2 - \Delta_1 \ldots \Delta_{n-2}^2 = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$
$$\Delta_0^3 = \Delta_1^2 - \Delta_0^2, \quad \Delta_1^3 = \Delta_2^2 - \Delta_1^2 \ldots \Delta_{n-3}^3 = \Delta_{n-2}^2 - \Delta_{n-3}^2$$

u. s. w.

Man kann diese Differenzen als Functionaldifferenzen erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. bezeichnen.

Die Functionaldifferenzen lassen sich in einfacher Weise durch bestimmte Integrale ausdrücken. Aus der Gleichung

$$\Delta_\lambda = f(x_{\lambda+1}) - f(x_\lambda) = \int_0^h f'(x_\lambda + \xi)\, d\xi$$

folgt nämlich:

$$\Delta_\lambda^2 = \int_0^h [f'(x_\lambda + h + \xi_1) - f'(x_\lambda + \xi_1)]\, d\xi_1 = \int_0^h \int_0^h f''(x_\lambda + \xi_1 + \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$\Delta_\lambda^3 = \int_0^h \int_0^h \int_0^h f'''(x_\lambda + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

und allgemein

$$\Delta_\lambda^k = \int_0^h \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(k)}(x_\lambda + \xi_1 + \xi_1 + \cdots + \xi_k)\, d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_k.$$

Aus der eben nachgewiesenen Ausdrucksform von Δ_λ^k ergiebt sich: wenn die Derivirte $f^{(k)}(x)$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, während x das Intervall x_λ, $x_\lambda + kh$ durchläuft, so ist die Differenz Δ_λ^k von Null verschieden und ihr Vorzeichen ist durch das Vorzeichen von $f^{(k)}(x)$ bestimmt. Dies gilt auch für den Fall, dass $f^{(k)}(x)$ in einem Punkt des genannten Intervalls verschwindet, wenn nur kein Wechsel des Vorzeichens eintritt.

Bezüglich der Anzahl der Theilintervalle haben wir bisher keine beschränkende Voraussetzung gemacht. Wir wollen nunmehr annehmen, die Zahl n sei so gross gewählt, dass der Abstand eines Punktes, in dem die Derivirte $f^{(k)}(x)$ ihr Zeichen wechselt, von dem nächsten Punkte, in dem die Derivirte $f^{(k+1)}(x)$ ihr Zeichen wechselt, grösser als $(k+2)\,h$ ist. Aus dieser Voraussetzung folgt sofort, dass auch der Abstand zwischen zwei Punkten, in denen ein Zeichenwechsel der k^{ten} Derivirten eintritt, grösser als $(k+2)\,h$ ist.

Nehmen wir nun an, die Derivirte $f^{(k)}(x)$ wechsle ihr Vorzeichen, wenn x von x_λ bis $x_{\lambda+1}$ wächst, und zwar wollen wir, um eine bestimmte Annahme zu machen, voraussetzen, sie gehe von positiven zu negativen Werthen über. Dann ist nach Voraussetzung $f^{(k)}(x)$ in dem Intervall $x_{\lambda-k}$, x_λ positiv, in dem Intervall $x_{\lambda+1}$, $x_{\lambda+k+1}$ negativ; die Derivirte $f^{(\lambda+1)}(x)$ dagegen ist in dem ganzen Intervall $x_{\lambda-k}$, $x_{\lambda+k+1}$ negativ. Demnach ist von den k^{ten} Functionaldifferenzen

$$(\Delta^k) \quad \Delta_{\lambda-k}^k \quad \Delta_{\lambda-k+1}^k \ldots \Delta_{\lambda+1}^k$$

die erste positiv, die letzte negativ. Dagegen sind die Functionaldifferenzen der Ordnung $k+1$

$$(\Delta^{k+1}) \quad \Delta_{\lambda-k}^{k+1} \quad \Delta_{\lambda-k+1}^{k+1} \ldots \Delta_{\lambda}^{k+1}$$

sämmtlich negativ. Daraus folgt: die Reihe (Δ^k) bietet einen und nur einen Zeichenwechsel dar. Dieser Zeichenwechsel kann entweder in der Weise zu Stande kommen, dass auf eine positive Differenz eine negative folgt, oder in der Weise, dass auf eine positive Differenz eine Differenz folgt, die den Werth Null hat, und auf diese dann eine negative.

Jedem Punkte des Intervalls a, b in dem die k^{te} Derivirte ihr Vorzeichen wechselt, entspricht somit ein Zeichenwechsel in der Reihe der k^{ten} Functionaldifferenzen.

Die Beziehung zwischen den Nullpunkten und den Zeichenwechseln tritt noch klarer hervor durch folgende Betrachtung:

Die Differenz Δ_λ^k ist durch die Functionswerthe bestimmt, welche den Argumenten $x_\lambda\ x_{\lambda+1} \ldots x_{\lambda+k}$ entsprechen. Nehmen wir nun an, die Differenzen Δ_λ^k und $\Delta_{\lambda+1}^k$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Der Zeichenwechsel $\Delta_\lambda^k\ \Delta_{\lambda+1}^k$ ist bedingt durch die Functionswerthe, die den Argumenten $x_\lambda\ x_{\lambda+1} \ldots x_{\lambda+k+1}$ entsprechen. Diesem Zeichenwechsel ist daher das Intervall x_λ, $x_{\lambda+k+1}$ „zugeordnet".

Nehmen wir zweitens an es sei $\Delta_\lambda^k = 0$.

Dann müssen die Differenzen $\Delta_{\lambda-1}^k$ und $\Delta_{\lambda+1}^k$ von Null verschieden sein und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Zeichenwechsel $\Delta_{\lambda-1}^k\ \Delta_\lambda^k\ \Delta_{\lambda+1}^k$ ist durch die Functionswerthe bedingt, die den Argumenten $x_\lambda\ x_{\lambda+1} \ldots x_{\lambda+k}$ entsprechen. Man kann daher diesem Zeichenwechsel das Intervall x_λ, $x_{\lambda+k}$ zuordnen.

Jedem Zeichenwechsel in der Reihe der k^{ten} Functionaldifferenzen ist demnach ein bestimmtes Intervall zugeordnet, dessen Grösse höchstens $= (k+1)\,h$ ist, und in jedem dieser Intervalle liegt ein und nur ein Punkt, in dem die k^{te} Derivirte ihr Vorzeichen wechselt.

Da nach Voraussetzung die Entfernung eines Punktes, in dem die k^{te} Derivirte ihr Zeichen wechselt, von dem nächsten Punkte, in dem die $k+1^{\text{te}}$ Derivirte ihr Zeichen wechselt, grösser als $(k+2)\,h$ ist, so hat ein Intervall, das einem Zeichenwechsel der k^{ten} Differenzenreihe zugeordnet ist, mit einem Intervall, das einem Zeichenwechsel der $k+1^{\text{ten}}$ Differenzenreihe zugeordnet ist, keinen Punkt gemein.

III.

Die Functionenclasse, welche den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, ist durch die im Vorausgehenden nachgewiesenen Eigenschaften vollständig charakterisirt.

Wir sind ausgegangen von den beiden Voraussetzungen:

A) Die Function $f(x)$ hat in jedem Punkt des Intervalls a, b bestimmte endliche Derivirte von jeder vorgeschriebenen Ordnung und

B) eine Derivirte von gegebener Ordnung verschwindet nur in einer angebbaren Anzahl von Punkten des Intervalls a, b.

Aus diesen Voraussetzungen ergab sich zunächst die Bedingung:

1) $f(x)$ ist in dem Intervall a, b stetig.

Die übrigen Bedingungen, denen $f(x)$ genügt, beziehen sich auf die Functionaldifferenzen dieser Function.

Theilen wir das Intervall a, b in n gleiche Theile und bilden wir die dieser Theilung entsprechenden Functionaldifferenzen. Wenn wir die Zahl n hinreichend gross wählen, dann genügen die Functionaldifferenzen einer beliebig gegebenen Ordnung den beiden folgenden Bedingungen:

2) In der Reihe dieser Functionaldifferenzen haben keine zwei auf einander folgenden Differenzen den Werth Null. Hat eine Differenz den Werth Null, so haben die vorangehende und die nachfolgende Differenz entgegengesetzte Vorzeichen.

3) Ein Intervall, das einem Zeichenwechsel der in Rede stehenden Differenzenreihe zugeordnet ist, hat mit einem Intervall, das einem Zeichenwechsel der Differenzenreihe nächst höherer Ordnung zugeordnet ist, keinen Punkt gemein.

Dass auch zwei Intervalle, welche zwei Zeichenwechseln derselben Differenzenreihe zugeordnet sind, keinen Punkt gemein haben, wenn die Anzahl der Theilintervalle hinreichend gross gewählt wird, braucht nicht besonders ausgesprochen zu werden, denn dies ist eine nothwendige Folge der Bedingung 3).

Die Bedingungen 2) und 3) sind dahin zu verstehen:

Wenn die Functionaldifferenzen einer gegebenen Ordnung, welche der Theilung des Intervalls a, b in n Theile entsprechen, diesen beiden Bedingungen genügen, so genügen die Functionaldifferenzen, welche einer Theilung des Intervalls in mehr als n Theile entsprechen, denselben Bedingungen.

Zu den angegebenen 3 Bedingungen tritt noch die folgende hinzu:

4) Die Anzahl der Zeichenwechsel, die in einer Differenzenreihe von gegebener Ordnung vorkommen, kann eine bestimmte angebbare Zahl nicht überschreiten, wie gross auch immer die Anzahl n der Theilintervalle gewählt werden mag.

Wir lassen nunmehr die Voraussetzung, die Function $f(x)$ habe Derivirte jeder Ordnung, fallen, und setzen nur voraus, die Function genüge den Bedingungen 1) bis 4).

Diese Bedingungen reichen aus, um für alle Punkte innerhalb des Intervalls a, b die Existenz von Derivirten jeder Ordnung nachzuweisen.

IV.

Wir nehmen an, die Anzahl n der Theilintervalle, in die das Gesammtintervall a, b zerlegt wird, sei so gross gewählt, dass kein Intervall, das einem Zeichenwechsel der k^{ten} Differenzenreihe zugeordnet ist, mit einem Intervall, das einem Zeichenwechsel der $k+1^{\text{ten}}$ Differenzenreihe zugeordnet ist, einen Punkt gemein hat. Damit ist für die Zahl n eine untere Grenze festgesetzt. Wir nehmen weiter an, die Zahl n sei so gewählt, dass die Anzahl der Zeichenwechsel, die in der k^{ten} Differenzenreihe

$$\Delta_0^k \; \Delta_1^k \; \Delta_2^k \; \ldots \; \Delta_{n-k}^k$$

vorkommen, den grössten überhaupt möglichen Werth erreicht, dass also die Anzahl der Zeichenwechsel nicht steigen kann, wenn man die Anzahl der Theilintervalle über n hinaus wachsen lässt.

Wir theilen nun jedes der n Theilintervalle abermals in m gleiche Theile. Die der neuen Theilung entsprechenden Theilpunkte bezeichne ich der Reihe nach mit $\xi_0\ \xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_{mn}$, so dass $\xi_0 = a$, $\xi_{mn} = b$ und $\xi_{m\lambda} = x_\lambda$ ist. Die der neuen Theilung entsprechenden Functionaldifferenzen bezeichne ich mit

$$\delta_0\ \ \delta_1\ \ \delta_2\ \ \ldots\ \ \delta_{mn-1},$$
$$\delta_0^2\ \delta_1^2\ \delta_2^2\ \ldots\ \delta_{mn-2}^2$$

u. s. w.

Die Functionaldifferenzen Δ_λ^k lassen sich in der Form darstellen

$$(D) \qquad \Delta_\lambda^k = \sum_{\mu=0}^{k(m-1)} c_\mu^{(k)}(m)\ \delta_{\lambda m+\mu}^k \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-k).$$

Für $k = 1$ ist diese Behauptung ohne Weiteres einleuchtend, denn es ist

$$\Delta_\lambda = f(\xi_{(\lambda+1)m}) - f(\xi_{\lambda m}) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \delta_{\lambda m+\mu}.$$

Nehmen wir nun an, die Gleichung (D) sei für einen bestimmten Werth von k bereits bewiesen, so folgt:

$$\Delta_\lambda^{k+1} = \Delta_{\lambda+1}^k - \Delta_\lambda^k = \sum_{\mu=0}^{k(m-1)} c_\mu^{(k)}(m)\left[\delta_{(\lambda+1)m+\mu}^k - \delta_{\lambda m+\mu}^k\right]$$
$$= \sum_{\mu=0}^{k(m-1)} \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\mu^{(k)}(m)\ \delta_{\lambda m+\mu+\nu}^{k+1} = \sum_{\mu=0}^{(k+1)(m-1)} c_\mu^{(k+1)}(m)\ \delta_{\lambda m+\mu}^{k+1},$$

wie oben behauptet wurde.

Um die Coefficienten $c_\mu^{(k)}(m)$ zu bestimmen, ersetzen wir in der letzten Gleichung, welche in Bezug auf die Differenzen δ^{k+1} identisch ist, $\delta_{\lambda m+\mu}^{k+1}$ durch die μ^{te} Potenz einer unbestimmten Grösse α. Es ergiebt sich:

$$\sum_{\mu=0}^{(k+1)(m-1)} c_\mu^{(k+1)}(m)\ \alpha^\mu = (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1}) \sum_{\mu=0}^{k(m-1)} c_\mu^{(k)}(m)\ \alpha^\mu.$$

Da $c_\mu^{(1)}(m) = 1$ ist, so folgt hieraus

$$\sum_{\mu=0}^{(k+1)(m-1)} c_\mu^{(k+1)}(m)\ \alpha^\mu = (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})^{k+1},$$

d. h. $c_\mu^{(k+1)}(m)$ ist der Coefficient von α^μ in der Entwicklung des Polynoms

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})^{k+1}.$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung (1) auftretenden Coefficienten sind alle positiv, daraus folgt:

Ist $\Delta_\lambda^k = 0$, so müssen unter den Differenzen

(d) $$\delta_{\lambda m}^k \; \delta_{\lambda m+1}^k \; \ldots \; \delta_{\lambda m+k(m-1)}^k$$

sowohl positive wie negative Grössen vorkommen, da diese Differenzen (nach III, 2) nicht alle den Werth Null haben können. Wenn $\Delta_\lambda^k = 0$ ist, so sind die Differenzen $\Delta_{\lambda-1}^k$ und $\Delta_{\lambda+1}^k$ von Null verschieden und sie haben entgegengesetzte Vorzeichen. Dem Zeichenwechsel $\Delta_{\lambda-1}^k$ Δ_λ^k $\Delta_{\lambda+1}^k$ entspricht demnach mindestens ein Zeichenwechsel in der Reihe (d) und das dem letzteren Zeichenwechsel zugeordnete Intervall bildet einen Theil des dem ersteren Zeichenwechsel zugeordneten Intervalls.

Nehmen wir nunmehr an, die Differenzen Δ_λ^k und $\Delta_{\lambda+1}^k$ seien von Null verschieden und haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Dann muss eine Anzahl der Differenzen

$$\delta_{\lambda m}^k \; \delta_{\lambda m+1}^k \; \ldots \; \delta_{\lambda m+k(m-1)}^k$$

dasselbe Vorzeichen haben wie Δ_λ^k und eine Anzahl der Differenzen

$$\delta_{(\lambda+1)m}^k \; \delta_{(\lambda+1)m+1}^k \; \ldots \; \delta_{(\lambda+1)m+k(m-1)}^k$$

muss dasselbe Vorzeichen haben wie $\Delta_{\lambda+1}^k$.

Dem Zeichenwechsel Δ_λ^k $\Delta_{\lambda+1}^k$ entspricht demnach mindestens ein Zeichenwechsel in der Reihe

$$\delta_{\lambda m}^k \; \delta_{\lambda m+1}^k \; \ldots \; \delta_{(\lambda+1)m+k(m-1)}^k$$

und das dem letzteren Zeichenwechsel zugeordnete Intervall bildet einen Theil des dem ersteren Zeichenwechsel zugeordneten Intervalls.

Nun haben nach Voraussetzung zwei Intervalle, die zwei verschiedenen Zeichenwechseln der Reihe

(Δ_k) $$\Delta_0^k \; \Delta_1^k \; \Delta_2^k \; \ldots \; \Delta_{n-k}^k$$

zugeordnet sind, keinen Punkt gemein. Demnach müssen zwei verschiedenen Zeichenwechseln der Reihe (Δ^k) auch mindestens zwei verschiedene Zeichenwechsel der Reihe

(δ^k) $$\delta_0^k \; \delta_1^k \; \delta_2^k \; \ldots \; \delta_{mn-k}^k$$

entsprechen. Da ferner nach Voraussetzung die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (δ^k) nicht grösser sein kann, als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe (Δ^k), so folgt: in beiden Reihen kommen gleich viele Zeichenwechsel vor. Jedem Zeichenwechsel der Reihe

(Δ^k) entspricht ein ganz bestimmter Zeichenwechsel der Reihe (δ^k) und das dem letzteren Zeichenwechsel zugeordnete Intervall bildet einen Theil des dem ersteren Zeichenwechsel zugeordneten Intervalls.

Lassen wir — die Zahl n festhaltend — die Zahl m unbegrenzt wachsen, so nehmen die Intervalle, die den Zeichenwechseln der Reihe (δ^k) zugeordnet sind, unbegrenzt ab und ziehen sich schliesslich auf gewisse Punkte zusammen. Diese Punkte bezeichne ich als Grenzpunkte k^{ter} Ordnung.

Aus der Definition der Grenzpunkte folgt unmittelbar: eine Functionaldifferenz k^{ter} Ordnung Δ_λ^k kann nur dann gleich Null sein, wenn in das Intervall x_λ, $x_\lambda + kh$ ein Grenzpunkt k^{ter} Ordnung fällt. Zwei aufeinander folgende von Null verschiedene Functionaldifferenzen $\Delta_\lambda^k \Delta_{\lambda+1}^k$ können nur dann verschiedene Vorzeichen haben, wenn in das Intervall x_λ, $x_\lambda + (k+1)h$ ein Grenzpunkt k^{ter} Ordnung fällt.

Bezeichnen wir mit α, β, γ drei aufeinander folgende Grenzpunkte k^{ter} Ordnung. Der Punkt α falle in das Intervall x_λ, $x_{\lambda+1}$, der Punkt β in das Intervall x_μ, $x_{\mu+1}$, der Punkt γ in das Intervall x_ν, $x_{\nu+1}$. Dann haben von den Functionaldifferenzen

$$\Delta_{\lambda+1}^k \; \Delta_{\lambda+2}^k \; \ldots \; \Delta_{\nu-k}^k$$

die $\mu - \lambda - k$ ersten

(A) $$\Delta_{\lambda+1}^k \; \Delta_{\lambda+2}^k \; \ldots \; \Delta_{\mu-k}^k$$

ein und dasselbe Vorzeichen. In der Reihe

(B) $$\Delta_{\mu-k}^k \; \Delta_{\mu-k+1}^k \; \ldots \; \Delta_\mu^k \; \Delta_{\mu+1}^k$$

kommt ein und nur ein Zeichenwechsel vor und die Functionaldifferenzen

(C) $$\Delta_{\mu+1}^k \; \Delta_{\mu+2}^k \; \ldots \; \Delta_{\nu-k}^k$$

haben wieder alle dasselbe Vorzeichen und zwar das entgegengesetzte wie die Differenzen (A).

Wir haben die Anzahl n der Theilintervalle, in die das Intervall a, b zunächst zerlegt worden ist, so gewählt, dass 1) kein Intervall, das einem Zeichenwechsel der k^{ten} Differenzenreihe zugeordnet ist, mit einem Intervall, das einem Zeichenwechsel der $k+1^{\text{ten}}$ Differenzenreihe zugeordnet ist, einen Punkt gemein hat, und dass 2) die Anzahl der Zeichenwechsel in der k^{ten} Differenzenreihe möglichst gross ist. Beide Bedingungen bleiben — wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht — erfüllt, wenn wir an Stelle der Zahl n ein beliebiges Multiplum von n z. B. mn treten lassen. Die Zahl m können wir so wählen, dass auch in der Differenzenreihe $k+1^{\text{ter}}$ Ordnung, die der Eintheilung des Intervalls a, b in mn Theile entspricht, die Anzahl der Zeichenwechsel den grössten überhaupt möglichen Werth erreicht. Nun liegen die Grenzpunkte k^{ter} Ordnung in den Intervallen, die den Zeichenwechseln

der k^{ten} Differenzenreihe zugeordnet sind, die Grenzpunkte $k+1^{\text{ter}}$ Ordnung liegen in den Intervallen, die den Zeichenwechseln der $k+1^{\text{ten}}$ Differenzenreihe zugeordnet sind. Die Intervalle der ersteren Art haben mit den Intervallen der letzteren Art keinen Punkt gemein. Daraus folgt: kein Grenzpunkt der Ordnung k kann mit einem Grenzpunkt der Ordnung $k+1$ zusammenfallen.

V.

Zufolge der Definition der Functionaldifferenzen k^{ter} Ordnung

$$\Delta_\lambda^k = f(x_{\lambda+k}) - k f(x_{\lambda+k-1}) + \frac{k(k-1)}{2} f(x_{\lambda+k-2}) \cdots$$
$$- (-1)^k k f(x_{\lambda+1}) + (-1)^k f(x_\lambda)$$

unterliegen die Differenzen

$$x_{\lambda+1} - x_\lambda = x_{\lambda+2} - x_{\lambda+1} = \cdots = x_{\lambda+k} - x_{\lambda+k-1}$$

der Bedingung, dass der Quotient $\frac{b-a}{x_{\lambda+1}-x_\lambda}$ eine ganze Zahl ist, und ebenso muss der Quotient $\frac{x_\lambda - a}{x_{\lambda+1}-x_\lambda}$ eine ganze Zahl sein. Wir bilden nun — unter x, y Variable verstehend — den allgemeineren Ausdruck

$$\varphi_k(x|y) = f(y) - kf\Big(\frac{(k-1)y+x}{k}\Big) + \frac{k(k-1)}{2} f\Big(\frac{(k-2)y+2x}{k}\Big) \cdots$$
$$- (-1)^k kf\Big(\frac{y+(k-1)x}{k}\Big) + (-1)^k f(x).$$

Da die Function $f(x)$ nach Voraussetzung stetig ist, so ist auch $\varphi_k(x|y)$ stetige Function von x und y.

Für diese Function gelten die folgenden Sätze:

1) Wir bezeichnen mit α, β zwei aufeinander folgende Grenzpunkte der Ordnung k.

Für jedes der Bedingung

$$\beta > y > x > \alpha$$

genügende Werthsystem x, y hat $\varphi_k(x|y)$ einen von Null verschiedenen Werth und alle diese Functionswerthe haben dasselbe Vorzeichen.

2) Wir halten an den soeben ausgesprochenen Voraussetzungen fest und nehmen überdies an, es sei

$$\beta > y' > y \quad \text{und} \quad x > x' > \alpha.$$

Dann ist $\varphi_k(x|y)$ dem absoluten Werthe nach kleiner als $\varphi_k(x|y')$ und kleiner als $\varphi_k(x'|y)$.

3) Für jedes Werthsystem, das der Bedingung

$$\beta > y + u > y > x > \alpha$$

genügt, hat die Differenz

$$\varphi_{k-1}(x+u|y+u) - \varphi_{k-1}(x|y)$$

einen von Null verschiedenen Werth und alle diese Werthe haben dasselbe Vorzeichen.

4) Wir halten an den Voraussetzungen des vorigen Satzes fest und nehmen überdies an, es sei

$$\beta > y' > y \quad \text{und} \quad x > x' > \alpha.$$

Dann ist die Differenz

$$\varphi_{k-1}(x+u \mid y+u) - \varphi_{k-1}(x \mid y)$$

dem absoluten Werthe nach kleiner als jede der beiden Differenzen

$$\varphi_{k-1}(x+u \mid y'+u) - \varphi_{k-1}(x \mid y') \text{ und } \varphi_{k-1}(x'+u \mid y+u) - \varphi_{k-1}(x' \mid y).$$

VI.

Bei dem Beweis der Sätze des vorigen Artikels hat man zu unterscheiden, ob für die in Betracht kommenden Grössen $x, y \ldots$ die Quotienten $\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a} \cdots$ rationale oder irrationale Werthe haben. Je nachdem der eine oder der andere Fall eintritt, bezeichne ich die Grössen $x, y \ldots$ kurz als commensurable oder incommensurable Grössen des Intervalls a, b.

Wir beweisen zunächst die Sätze 1) und 2) unter der Voraussetzung, dass die Grössen x', x, y, y' commensurable Grössen des Intervalls a, b sind.

Zu diesem Zweck theilen wir das Intervall a, b in n gleiche Theile von der Grösse $h = \frac{b-a}{n}$ und bezeichnen wie oben die Theilpunkte mit $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Die Zahl n wählen wir so, dass jeder der Punkte x', x, y, y' mit einem Theilpunkt zusammenfällt, und dass sich überdiess jedes der Intervalle x', x; x, y und x, y' aus einer durch k theilbaren Zahl von Theilintervallen der Grösse h zusammensetzt.

Die Theilpunkte, mit denen die Punkte x', x, y, y' zusammenfallen, bezeichnen wir der Reihe nach mit $x_{i-kr}, x_i, x_{i+kp}, x_{i+kq}$.

Der Grenzpunkt α falle in das Theilintervall $x_\lambda, x_{\lambda+1}$, der Grenzpunkt β in das Theilintervall $x_\mu, x_{\mu+1}$.

Nun sind nach Art. IV die Functionaldifferenzen k^{ter} Ordnung

$$(\Delta^k)\quad \Delta^k_{\lambda+1}\ \Delta^k_{\lambda+2} \ldots \Delta^k_{\mu-k}$$

alle von Null verschieden und sie haben alle dasselbe Vorzeichen. Die Function $\varphi_k(x \mid y) = \varphi_k(x_i \mid x_{i+kp})$ lässt sich — wie ebenfalls in Art. IV nachgewiesen wurde — in der Form darstellen

$$\varphi_k(x \mid y) = \sum_{\nu=0}^{k(p-1)} c_\nu^{(k)}(p)\, \Delta^k_{i+\nu}$$

und zwar sind die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretenden Coefficienten $c_\nu^{(k)}(p)$ alle positiv. Daraus folgt: die Function $\varphi_k(x|y)$ hat einen von Null verschiedenen Werth und dasselbe Vorzeichen wie die Grössen der Reihe (Δ^k). Damit ist der Satz (1) für commensurable Grössen des Intervalls a, b bewiesen.

Die Function $\varphi_k(x|y') = \varphi_k(x_i|x_{i+kq})$ lässt sich in der Form

$$\varphi_k(x|y') = \sum_{\nu=0}^{k(q-1)} c_\nu^{(k)}(q)\, \Delta_{i+\nu}^k$$

darstellen; für die Differenz $\varphi_k(x|y') - \varphi^k(x|y)$ ergiebt sich somit ein Ausdruck der Form

$$\sum_{\nu=0}^{k(q-1)} \gamma_\nu^{(k)} \Delta_{i+\nu}^k.$$

$c_\nu^{(k)}(p)$ ist nach Art. IV gleich dem Coefficienten von α^ν in der Entwicklung von $(1 + \alpha + \alpha^2 \cdots + \alpha^{p-1})^k$. Dementsprechend ist $c_\nu^{(k)}(q)$ gleich dem Coefficienten von α^ν in der Entwicklung von $(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{q-1})^k$. Demnach ist $\gamma_\nu^{(k)}$ gleich dem Coefficienten von α^ν in der Entwicklung von

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{q-1})^k - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-1})^k$$
$$= \alpha^p (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{q-p-1}) \sum_{\sigma=1}^{k} (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{q-1})^{k-\sigma} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-1})^{\sigma-1}.$$

$\gamma_\nu^{(k)}$ ist demnach $= 0$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots p-1$ und von Null verschieden und positiv für $\nu = p, p+1, \cdots k(q-1)$.

Die Differenz $\varphi_k(x|y') - \varphi_k(x|y)$ ist demnach von Null verschieden und hat dasselbe Vorzeichen, wie die Grössen der Reihe (Δ^k).

Man beweist ganz in derselben Weise, dass auch die Differenz $\varphi_k(x'|y) - \varphi_k(x|y)$ von Null verschieden ist, und dass sie dasselbe Vorzeichen hat wie die Grössen der Reihe (Δ^k).

Damit ist auch der zweite Satz für commensurable Grössen des Intervalls a, b bewiesen.

Um zu zeigen, dass die Sätze 1) und 2) auch für incommensurable Grössen des Intervalls a, b gelten, genügt es offenbar, dies für den Satz 2) nachzuweisen.

Nehmen wir an die Grössen x, y, y' seien incommensurable Grössen des Intervalls a, b. Wir betrachten eine jede dieser Grössen als Grenzwerth einer unbegrenzten Reihe von commensurablen Grössen des Intervalls a, b;

$$x \text{ als Grenzwerth von } \xi_1\ \xi_2\ \xi_3 \ldots (\xi),$$
$$y \text{ „ } \text{ „ } \text{ „ } \eta_1\ \eta_2\ \eta_3 \ldots (\eta),$$
$$y' \text{ „ } \text{ „ } \text{ „ } \eta_1'\ \eta_2'\ \eta_3' \ldots (\eta'),$$

Die Näherungswerthe η wählen wir so, dass die Glieder der Reihe (η) beständig abnehmen, die Näherungswerthe η' so, dass die Glieder der Reihe (η') beständig zunehmen. Ueberdies setzen wir voraus, dass $\eta_1' > \eta_1$ ist, was wegen $y' > y$ offenbar zulässig ist. Da $\varphi_k(x|y)$ stetige Function von x und y ist, so convergiren die Glieder der Reihe

$$(\Phi) \qquad \varphi_k(\xi_\nu|\eta_\nu') - \varphi_k(\xi_\nu|\eta_\nu) \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots \text{ in inf.}$$

gegen einen Grenzwerth und dieser Grenzwerth ist

$$= \varphi_k(x|y') - \varphi_k(x|y).$$

Die Glieder der Reihe (Φ) haben alle dasselbe Vorzeichen, dasselbe Vorzeichen hat auch der Grenzwerth der Reihe.

VII.

Die Sätze 3) und 4) des Art. V beweisen wir nur unter der Voraussetzung, die Grössen x', x, y, y', u seien commensurable Grössen des des Intervalls a, b. Dass diese Sätze auch noch gelten, wenn die genannten Grössen incommensurable Grössen des Intervalls a, b sind, beweist man dann leicht mit Hülfe des Princips, das im vorigen Artikel zu analogen Zwecken verwendet worden ist.

Wir theilen das Intervall a, b der Art in n gleiche Theile von der Grösse $h = \frac{b-a}{n}$, dass die Punkte

$$x', x, y, y', x'+u, x+u, y+u, y'+u$$

mit den Theilpunkten

$$x_{i-rk}, x_i, x_{i+pk}, x_{i+qk}, x_{i-rk+s}, x_{i+s}, x_{i+pk+s}, x_{i+qk+s}$$

zusammenfallen. Die Grenzpunkte α und β mögen wieder in die Theilintervalle $x_\lambda, x_{\lambda+1}$ und $x_\mu, x_{\mu+1}$ fallen. Dann sind die k^{ten} Functionaldifferenzen

$$(\Delta^k) \qquad \Delta^k_{\lambda+1}\ \Delta^k_{\lambda+2} \ldots \Delta^k_{\mu-k}$$

alle von Null verschieden und sie haben alle dasselbe Vorzeichen. Nun ist (Art. IV)

$$\varphi_{k-1}(x|y) = \varphi_{k-1}(x_i|x_{i+pk}) = \sum_{\nu=0}^{(k-1)(p-1)} c_\nu^{(k-1)}(p)\, \Delta^{k-1}_{i+\nu}$$

und

$$\varphi_{k-1}(x+u|y+u) = \varphi_{k-1}(x_{i+s}|x_{i+s+pk}) = \sum_{\nu=0}^{(k-1)(p-1)} c_\nu^{(k-1)}(p)\, \Delta^{k-1}_{i+s+\nu}.$$

Folglich

$$\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y) = \sum_{\nu=0}^{(k-1)(p-1)} c_\nu^{(k-1)}(p)\,[\Delta_{i+s+\nu}^{k-1} - \Delta_{i+\nu}^{k-1}]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{(k-1)(p-1)} \sum_{\sigma=0}^{s-1} c_\nu^{(k-1)}(p)\,\Delta_{i+\sigma+\nu}^{k}.$$

Die Grössen $c_\nu^{(k-1)}(p)$ sind von Null verschieden und positiv. Demnach ist die Differenz

$$\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y)$$

von Null verschieden und sie hat dasselbe Vorzeichen, wie die Grössen der Reihe (Δ^k). Damit ist der Satz 3) für commensurable Grössen des Intervalls a, b bewiesen.

Um nun auch noch den Satz 4) für commensurable Grössen des Intervalls a, b zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass die Differenz $D = [\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y'+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y')] - [\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y)]$ dasselbe Vorzeichen hat, wie die Grössen der Reihe (Δ^k).

Nun ist — wie im vorigen Artikel gezeigt wurde —

$$\varphi_{k-1}(x\,|\,y') - \varphi_{k-1}(x\,|\,y) = \varphi_{k-1}(x_i\,|\,x_{i+kq}) - \varphi_{k-1}(x_i\,|\,x_{i+kp})$$

$$= \sum_{\nu=p}^{(k-1)(q-1)} \gamma_\nu^{(k-1)}\,\Delta_{i+\nu}^{k-1}$$

und die in dieser Gleichung vorkommenden Grössen $\gamma_\nu^{(k-1)}$ sind von Null verschieden und positiv.

Ferner ist

$$\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y'+u) - \varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u)$$

$$= \varphi_{k-1}(x_{i+s}\,|\,x_{i+s+kq}) - \varphi_{k-1}(x_{i+s}\,|\,x_{i+s+kp})$$

$$= \sum_{\nu=0}^{(k-1)(q-1)} \gamma_\nu^{(k-1)}\,\Delta_{i+s+\nu}^{k-1}.$$

Daraus folgt

$$D = \sum_{\nu=0}^{(k-1)(q-1)} \gamma_\nu^{(k-1)}\,[\Delta_{i+s+\nu}^{k-1} - \Delta_{i+\nu}^{k-1}]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{(k-1)(q-1)} \sum_{\sigma=0}^{s-1} \gamma_\nu^{(k-1)}\,\Delta_{i+\sigma+\nu}^{k}.$$

Die Differenz D ist somit in der That von Null verschieden und sie hat dasselbe Vorzeichen wie die Grössen der Reihe (Δ^k).

Auf demselben Wege lässt sich beweisen, dass auch die Differenz $[\varphi_{k-1}(x'+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x'\,|\,y)] - [\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y)]$ dasselbe Vorzeichen hat, wie die Grössen der Reihe (Δ^k).

VIII.

Mit Hülfe der Sätze des Art. V lässt sich nun der Beweis erbringen, dass eine Function $f(x)$, die den Bedingungen des Art. III genügt, in jedem Punkte innerhalb des Intervalls a, b bestimmte endliche Derivirte jeder vorgeschriebenen Ordnung besitzt. Wir zerlegen diesen Beweis in zwei Theile. Wir beweisen erstens, dass die Function in jedem Punkte innerhalb des Intervalls a, b eine bestimmte endliche Derivirte *erster* Ordnung $f'(x)$ besitzt und wir beweisen zweitens, dass diese Function $f'(x)$ den Bedingungen des Art. III genügt.

Es ist zweckmässig den zweiten Theil des Beweises voranzustellen, weil sich dadurch einige Vereinfachungen im ersten Theile des Beweises ergeben.

Wir setzen also zunächst nicht nur voraus, die Function $f(x)$ genüge den Bedingungen des Art. III, sondern wir setzen noch überdies voraus, die Function habe in jedem Punkte innerhalb des Intervalls a, b eine bestimmte endliche Derivirte $f'(x)$.

Wir beweisen zunächst, dass die Derivirte $f'(x)$ stetig ist.

Aus der Definition des Differentialquotienten ergiebt sich: nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse σ muss sich für jeden Punkt x innerhalb des Intervalls a, b eine positive Grösse τ der Art bestimmen lassen, dass der absolute Werth der Differenz

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} - f'(x)$$

kleiner als σ ist, wenn die Grösse ε ihrem absoluten Werth nach kleiner als τ ist.

Die Grösse τ hängt von den Grössen σ und x ab. Fixirt man die Grösse σ, so kann τ nicht unter einen angebbaren Werth τ' sinken, solange x innerhalb des Intervalls a, b bleibt.

Bezeichnen wir mit ε eine Grösse, deren absoluter Werth kleiner als $\frac{1}{2}\tau'$ ist, so ist

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = f'(x) + \varrho_1,$$

$$\frac{f(x+2\varepsilon)-f(x)}{2\varepsilon} = f'(x) + \varrho_2,$$

$$\frac{f(x+2\varepsilon)-f(x+\varepsilon)}{\varepsilon} = f'(x+\varepsilon) + \varrho_3$$

und die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind dem absoluten Werthe nach kleiner als σ.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$f'(x+\varepsilon) - f'(x) = 2\varrho_2 - \varrho_1 - \varrho_3.$$

Der absolute Werth der Differenz $f'(x+\varepsilon) - f'(x)$ ist also kleiner als die zur Verfügung stehende Grösse 4σ.

IX.

Um zu beweisen, dass die Function $f'(x)$ auch den übrigen 3 Bedingungen des Art. III genügt, betrachten wir zunächst die Function

$$\psi_{k-1}(x\,|\,y) = f'(y) - (k-1)\,f'\left(\frac{(k-2)y+x}{k-1}\right) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} f'\left(\frac{(k-3)y+2x}{k-1}\right)$$
$$\cdots - (-1)^{k-1}(k-1) f'\left(\frac{y+(k-2)x}{k-1}\right) + (-1)^{k-1} f'(x)$$

welche zur Function $f'(x)$ in derselben Beziehung steht, wie die in Art. IV betrachtete Function $\varphi_{k-1}(x\,|\,y)$ zur Function $f(x)$.

Die Function $\psi_{k-1}(x\,|\,y)$ lässt sich in doppelter Weise durch die Functionen $\varphi_k(x\,|\,y)$ und $\varphi_{k-1}(x\,|\,y)$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$(1) \qquad \psi_{k-1}(x\,|\,y) = \frac{\partial \varphi_k(x\,|\,y)}{\partial y}$$

und

$$(2) \qquad \psi_{k-1}(x\,|\,y) = \frac{\partial \varphi_{k-1}(x\,|\,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{k-1}(x\,|\,y)}{\partial y}$$

Nehmen wir an, in dem Intervall x, y' liege kein Grenzpunkt der Ordnung k und es sei $y' > y > x$. Dann gelten die Sätze 1) und 2) des Art. IV: Die Function $\varphi_k(x\,|\,y)$ hat einen von Null verschiedenen Werth und der absolute Werth dieser Function nimmt zu, wenn y bei constant bleibendem x wächst. Daraus folgt zunächst: wenn die partielle Derivirte $\frac{\partial \varphi_k(x\,|\,y)}{\partial y}$ von Null verschieden ist, so hat sie dasselbe Vorzeichen wie die Function $\varphi_k(x\,|\,y)$; und ausserdem ergiebt sich: die partielle Derivirte $\frac{\partial \varphi_k(x\,|\,y)}{\partial y} = \varphi_{k-1}(x\,|\,y)$ kann nicht für alle Werthe y, die der Bedingung $y' \geqq y \geqq x$ genügen, verschwinden, denn sonst wäre

$$\varphi_k(x\,|\,y') = \int_x^{y'} \frac{\partial \varphi_k(x\,|\,y)}{\partial y}\, dy = 0\,.$$

Die Gleichung (2) zeigt, dass der Quotient

$$\frac{\varphi_{k-1}(x+u\,|\,y+u) - \varphi_{k-1}(x\,|\,y)}{u}$$

für unendlich abnehmende Werthe von u gegen $\psi_{k-1}(x\,|\,y)$ convergirt. Nun nimmt nach Art. IV, 4 der absolute Werth dieses Quotienten zu, wenn die Grösse y wächst, während die Grössen x und u constant bleiben. Demnach kann der absolute Werth von $\psi_{k-1}(x\,|\,y)$ wenigstens nicht abnehmen, wenn y wächst. Da nun, wie oben gezeigt wurde $\psi_{k-1}(x\,|\,y)$ nicht für alle Werthe y, die dem Intervalle $y' \geqq y \geqq x$ angehören, verschwinden kann, so hat $\psi_{k-1}(x\,|\,y')$ einen von Null ver-

schiedenen Werth und das Vorzeichen dieses Werthes stimmt mit dem Vorzeichen von $\varphi_k(x \mid y)$ überein.

Es seien nun α, β, γ drei aufeinanderfolgende Grenzpunkte der Ordnung k und sei ferner

$$\gamma > y' > x' > \beta > y > x > \alpha.$$

Wir theilen das Gesammtintervall a, b in n gleiche Theile und wählen die Zahl n so gross, dass in das Intervall α, β mindestens $k+1$ Theilpunkte x_λ, $x_{\lambda+1}$, $\ldots x_{\lambda+k}$ und in das Intervall β, γ mindestens $k+1$ Theilpunkte x_μ, $x_{\mu+1}$, $\ldots x_{\mu+k}$ fallen.

Die Functionen $\psi_{k-1}(x \mid y)$ und $\varphi_k(x \mid y)$ haben dasselbe Vorzeichen und zwar ist dieses Vorzeichen gleich dem Vorzeichen der Functionaldifferenz k^{ter} Ordnung Δ_λ^k (Art. V). Dementsprechend hat $\psi_{k-1}(x' \mid y')$ dasselbe Vorzeichen wie die Functionaldifferenz Δ_μ^k. Da nun nach Art. III die beiden Functionaldifferenzen Δ_λ^k und Δ_μ^k entgegengesetzte Vorzeichen haben, so gilt dasselbe für die Functionswerthe $\psi_{k-1}(x \mid y)$ und $\psi_{k-1}(x' \mid y')$.

X.

Wir bezeichnen mit a', b' zwei beliebige Grössen, welche der Bedingung $b > b' > a' > a$ genügen.

Das Intervall a', b' theilen wir in n gleiche Theile und sodann bilden wir die dieser Theilung entsprechenden Functionaldifferenzen der Function $f'(x)$:

$$\Delta_0 f' \;\; \Delta_1 f' \;\; \Delta_2 f' \ldots \Delta_{n-1} f',$$
$$\Delta_0^2 f' \;\; \Delta_1^2 f' \;\; \Delta_2^2 f' \ldots \Delta_{n-1}^2 f' \quad \text{u. s. w.}$$

Die Zahl n wählen wir so gross, dass der Abstand eines in das Intervall a', b' fallenden Grenzpunkts der Ordnung k von dem nächsten in dasselbe Intervall fallenden Grenzpunkte $k+1^{\text{ter}}$ Ordnung grösser ist als $(k+1)\,\frac{b'-a'}{n}$.

Nehmen wir zunächst an, zwischen die Theilpunkte x_λ und x_μ falle kein Grenzpunkt k^{ter} Ordnung. Dann sind nach Art. IX die Functionaldifferenzen

$$\Delta_\lambda^{k-1} f' \;\; \Delta_{\lambda+1}^{k-1} f' \ldots \Delta_{\mu-(k-1)}^{k-1} f'$$

alle von Null verschieden und sie haben alle dasselbe Vorzeichen.

Nehmen wir nunmehr an, in dem Intervall x_λ, $x_{\lambda+1}$ liege der Grenzpunkt k^{ter} Ordnung α. Dann fällt nach Voraussetzung in das Intervall $x_{\lambda-k}$, $x_{\lambda+k+1}$ kein Grenzpunkt der Ordnung $k+1$ und folglich auch kein von α verschiedener Grenzpunkt der Ordnung k.

Weil in den Intervallen $x_{\lambda-k}$, x_λ und $x_{\lambda+1}$, $x_{\lambda+k+1}$ kein Grenzpunkt der Ordnung k liegt, so sind die Functionaldifferenzen $\Delta_{\lambda-k}^{k-1} f'$ und

$\Delta_{\lambda+2}^{k-1} f'$ beide von Null verschieden und sie haben entgegengesetzte Vorzeichen (Art. IX, Schluss). In der Reihe

$$(A) \qquad \Delta_{\lambda-k}^{k-1} f' \;\; \Delta_{\lambda-k+1}^{k-1} f' \ldots \Delta_{\lambda+2}^{k-1} f'$$

muss demnach mindestens ein Zeichenwechsel vorkommen.

Die Functionaldifferenzen der Reihe

$$(B) \qquad \Delta_{\lambda-k}^{k} f' \;\; \Delta_{\lambda-k+1}^{k} f' \ldots \Delta_{\lambda+1}^{k} f'$$

sind alle von Null verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt, dass in der Reihe (A) auch nur ein Zeichenwechsel vorkommen kann.

Einen jeden Grenzpunkt k^{ter} Ordnung, der dem Intervall a', b' angehört, entspricht demnach ein und nur ein Zeichenwechsel in der Reihe der $k - 1^{\text{ten}}$ Functionaldifferenzen.

$$\Delta_0^{k-1} f' \;\; \Delta_1^{k-1} f' \;\; \Delta_2^{k-1} f' \ldots \Delta_{n-k+1}^{k-1} f'.$$

Der einem bestimmten Zeichenwechsel entsprechende Grenzpunkt liegt in dem Intervall, das diesem Zeichenwechsel zugeordnet ist.

Daraus folgt einmal, dass die Function den Bedingungen 2), 3) und 4) des Art. III genügt, und es ergiebt sich ausserdem, dass jeder Punkt, der für die Function $f(x)$ Grenzpunkt der Ordnung k ist, für die Function $f'(x)$ Grenzpunkt der Ordnung $k - 1$ ist.

XI.

Es bleibt noch zu beweisen, dass die Function $f(x)$ in jedem Punkte innerhalb des Intervalls a, b eine bestimmte endliche erste Derivirte $f'(x)$ hat. Zu diesem Zweck ist es nöthig zu zeigen:

1) Die Quotienten

$$Q_1 = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{f(x-\delta) - f(x)}{-\delta}$$

können nicht über alle Grenzen wachsen, wenn die positive Grösse δ gegen Null convergirt.

2) Wenn δ ohne Ende abnimmt, so convergirt Q_1 gegen eine bestimmte Grenze $\overset{+}{f}'(x)$ und Q_2 gegen eine bestimmte Grenze $\overset{-}{f}'(x)$.

Wenn der Beweis für 1) erbracht ist, so genügt es für den Beweis von 2) zu zeigen: wenn δ von einem bestimmten Werthe $\delta = \delta'$ ausgehend beständig abnimmt, so muss ein jeder der beiden Quotienten Q_1 und Q_2 entweder beständig zunehmen oder beständig abnehmen.

3) Endlich ist noch zu beweisen, dass

$$\overset{+}{f}'(x) = \overset{-}{f}'(x)$$

ist.

Der Beweis für 1) und 3) gestaltet sich verschieden, je nachdem der Punkt x Grenzpunkt 1^{ter}, 2^{ter} oder 3^{ter} Ordnung ist oder nicht.

Bei dem Beweis für zwei ist diese Unterscheidung unnöthig. Ich stelle desswegen diesen Beweis voran.

XII.

Wir schliessen den Punkt x in ein Intervall α, β ein, das so zu wählen ist, dass weder innerhalb des Intervalls α, x noch innerhalb des Intervalls x, β ein Grenzpunkt zweiter Ordnung liegt. Dagegen bleibt die Möglichkeit offen, dass der Punkt x selbst Grenzpunkt zweiter Ordnung ist. Die Endpunkte α, β des Intervalls wählen wir überdies so, dass der Quotient $\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ eine rationale Zahl ist.

Wir beweisen nun zunächst: für alle Werthe der Grössen u, v, welche der Bedingung

$$\beta > x+v > x+u > x$$

genügen, hat die Differenz

$$D = \frac{f(x+v)-f(x)}{v} - \frac{f(x+u)-f(x)}{u}$$

dasselbe Vorzeichen.

Wir führen den Beweis unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die Grössen $\beta-\alpha$, u, v commensurabel sind. Ist dies bewiesen, so zeigt man leicht mit Hülfe des in Art. V verwendeten Princips, dass der Satz auch noch gilt, wenn die in Rede stehenden Grössen incommensurabel sind.

Wir theilen das Intervall α, β in n gleiche Theile von der Grösse $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$ und wählen die Zahl n der Art, dass die Punkte x, $x+u$, $x+v$ mit gewissen Theilpunkten x_i, x_{i+p}, x_{i+q} zusammenfallen. Sodann bilden wir die Functionaldifferenzen erster und zweiter Ordnung:

$$\Delta_0 \; \Delta_1 \; \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1},$$
$$\Delta_0^2 \; \Delta_1^2 \; \Delta_2^2 \ldots \Delta_{n-2}^2.$$

Da innerhalb des Intervalls x_i, β kein Grenzpunkt zweiter Ordnung liegt, so sind die Functionaldifferenzen (Art. V, 1)

$$(\Delta^2) \qquad \Delta_i^2 \; \Delta_{i+1}^2 \; \Delta_{i+2}^2 \ldots \Delta_{n-2}^2$$

alle von Null verschieden und haben alle dasselbe Vorzeichen.

Nun ist

$$f(x+u) - f(x) = f(x_{i+p}) - f(x_i) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \Delta_{i+\nu}$$
$$= p\Delta_0 + \sum_{\nu=0}^{p-2} \frac{1}{2}(p-\nu)(p-\nu-1)\Delta_{i+\nu}^2$$

und

$$f(x+v) - f(x) = f(x_{i+q}) - f(x_i)$$
$$= q\Delta_0 + \sum_{\nu=0}^{q-2} \frac{1}{2}(q-\nu)(q-\nu-1)\Delta^2_{i+\nu}.$$

Folglich ist

$$D = \frac{f(x+v)-f(x)}{v} - \frac{f(x+u)-f(x)}{u} = \frac{1}{pqh}\sum_{\nu=0}^{q-2}\gamma_\nu \Delta^2_{i+\nu}.$$

Für $\nu > p-2$ ist $\gamma_\nu = \frac{1}{2}(q-\nu)(q-\nu-1)p$,

für $\nu \leq p-2$ ist $\gamma_\nu = \frac{1}{2}[(q-\nu)(q-\nu-1)p - (p-\nu)(p-\nu-1)q]$
$$= \frac{1}{2}(q-p)\left(qp - \nu(\nu+1)\right).$$

Die Coefficienten γ_ν sind also — da nach Voraussetzung $q > p$ ist, — alle von Null verschieden und positiv, folglich ist die Differenz D von Null verschieden und hat dasselbe Vorzeichen wie die Grössen (Δ^2).

Auf demselben Wege ist zu beweisen, dass die Differenz

$$\frac{f(x)-f(x-v)}{v} - \frac{f(x)-f(x-u)}{u}$$

für alle der Bedingung

$$x > x-u > x-v > \alpha$$

genügenden Werthe u, v dasselbe Vorzeichen hat.

XIII.

Bei dem Beweise zu X, 1 hat man zu unterscheiden, ob der Punkt x Grenzpunkt zweiter Ordnung ist oder nicht. Wir behandeln zunächst den zweiten Fall.

Wir schliessen den Punkt x in ein Intervall α, β ein, das keinen Grenzpunkt zweiter Ordnung enthält. Für den Fall, dass der Punkt x nicht Grenzpunkt erster Ordnung ist, nehmen wir überdies an, das Intervall α, β enthalte auch keinen Grenzpunkt erster Ordnung; ist dagegen der Punkt x Grenzpunkt erster Ordnung, so nehmen wir an, dieser Punkt sei der einzige Grenzpunkt erster Ordnung innerhalb des Intervalls α, β. Die Punkte α, β wählen wir wieder so, dass die Grössen $x-\alpha$ und $\beta-\alpha$ commensurabel sind. Das Intervall α, β theilen wir sodann der Art in n gleiche Theile von der Grösse $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$, dass der Punkt x mit einem Theilpunkt x_i zusammenfällt.

Die dieser Theilung entsprechenden Functionaldifferenzen zweiter Ordnung

$$(\Delta^2) \qquad \Delta_0^2 \; \Delta_1^2 \; \Delta_2^2 \ldots \Delta_{n-2}^2$$

sind alle von Null verschieden und haben alle dasselbe Vorzeichen.

Ist der Punkt x Grenzpunkt erster Ordnung, so haben die Differenzen $\Delta_0 \; \Delta_1 \; \Delta_2 \ldots \Delta_{i-1}$ alle dasselbe Vorzeichen; um eine bestimmte Annahme zu machen, wollen wir voraussetzen, sie seien positiv. Die Differenzen $\Delta_i \; \Delta_{i+1} \; \Delta_{i+2} \ldots \Delta_{n-1}$ haben alle das entgegengesetzte Vorzeichen, sind also negativ. Die Differenzen (Δ^2) sind im vorliegenden Fall offenbar ebenfalls alle negativ. Folglich ist

$$\Delta_0 > \Delta_1 \quad > \Delta_2 \quad \cdots > \Delta_{i-1}$$

und dem absoluten Werthe nach

$$\Delta_i < \Delta_{i+1} < \Delta_{i+2} \cdots < \Delta_{n-1}.$$

Der Quotient

$$\frac{\Delta_{i-1}}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = Q_2$$

ist demnach kleiner als

$$\frac{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{i-1}}{ih} = \frac{f(x_i) - f(\alpha)}{x_i - \alpha}$$

und der Quotient

$$\frac{\Delta_i}{h} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = Q_1$$

ist dem absoluten Werthe nach kleiner als

$$\frac{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \cdots + \Delta_{n-1}}{(n-i)\,h} = \frac{f(\beta) - f(x_i)}{\beta - x_i}.$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden positiven Werth von h. Demnach können die Quotienten Q_1 und Q_2 nicht über alle Grenzen wachsen, wenn h gegen Null convergirt.

Nehmen wir nunmehr an, das Intervall α, β enthalte keinen Grenzpunkt erster Ordnung. Dann haben die Differenzen

$$(\Delta) \qquad \Delta_0 \; \Delta_1 \; \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}$$

alle dasselbe Vorzeichen. Da auch die Differenzen (Δ^2) alle dasselbe Vorzeichen haben, so muss entweder eine jede der Grössen (Δ) kleiner als die vorhergehende sein, oder es muss eine jede grösser als die vorhergehende sein. Die Werthe des Quotienten $\frac{\Delta_{i-1}}{h}$ und $\frac{\Delta_i}{h}$ liegen also zwischen den Werthen

$$\frac{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_{i-1}}{ih} = \frac{f(x_i) - f(\alpha)}{x_i - \alpha}$$

und

$$\frac{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \cdots + \Delta_{n-1}}{(n-i)h} = \frac{f(\beta) - f(x_i)}{\beta - x_i}.$$

Diese Quotienten können somit nicht über alle Grenzen wachsen, wenn h gegen Null convergirt.

Damit ist die Existenz der Grenzwerthe $\overset{+}{f}'(x)$ und $\overset{-}{f}'(x)$ für jeden Punkt x, der nicht Grenzpunkt zweiter Ordnung ist, erwiesen.

XIV.

Wir fügen zu den Voraussetzungen des vorigen Artikels noch die weitere hinzu, das Intervall α, β enthalte keinen Grenzpunkt dritter Ordnung, und wir beweisen, dass unter dieser Voraussetzung $\overset{+}{f}'(x) = \overset{-}{f}'(x)$ ist.

Weil in dem Intervall α, β weder ein Grenzpunkt zweiter noch ein Grenzpunkt dritter Ordnung liegt, so haben die Differenzen

$$\Delta_0^2 \; \Delta_1^2 \; \Delta_2^2 \ldots \Delta_{n-2}^2$$

alle dasselbe Vorzeichen und das gleiche gilt für die Differenzen

$$\Delta_0^3 \; \Delta_1^3 \; \Delta_2^3 \ldots \Delta_{n-3}^3.$$

Es ist daher entweder dem absoluten Werth nach

$$\Delta_0^2 > \Delta_1^2 > \Delta_2^2 > \cdots > \Delta_{n-2}^2$$

oder

$$\Delta_0^2 < \Delta_1^2 < \Delta_2^2 < \cdots < \Delta_{n-2}^2.$$

Nehmen wir an, es trete der erstere Fall ein. Dann ist für $p < i$

$$\Delta_p - \Delta_0 = \Delta_0^2 + \Delta_1^2 + \cdots + \Delta_{p-1}^2$$

dem absoluten Werth nach grösser als $p\Delta_{i-1}^2$; folglich ist

$$\sum_{p=0}^{i-1} (\Delta_p - \Delta_0) = f(x_i) - f(\alpha) - (x_i - \alpha)\frac{\Delta_0}{h}$$

dem absoluten Werthe nach grösser als

$$\frac{1}{2} i(i-1)\Delta_{i-1}^2 = \frac{1}{2}(x_i - \alpha)(x_i - a - h)\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}.$$

Für unbegrenzt abnehmende Werthe von h convergirt

$$\frac{\Delta_0}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gegen die endliche Grösse $\overset{+}{f}'(\alpha)$. Demnach bleibt der absolute Werth des Quotienten $\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$ beständig unter einer angebbaren Grösse, folglich convergirt die Differenz

$$\frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h} = h\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$$

gegen Null, wenn h unbegrenzt abnimmt, d. h. es ist

$$\overset{+}{f}'(x) = \overset{-}{f}'(x).$$

Damit ist für alle Punkte innerhalb des Intervalls a, b, die nicht Grenzpunkte zweiter oder dritter Ordnung sind, die Existenz einer bestimmten endlichen Derivirten erster Ordnung nachgewiesen.

Bei diesem Beweis wurde von den Bedingungen 2), 3) und 4) des Art. III nur insoweit Gebrauch gemacht, als sie sich auf die Functionaldifferenzen der 3 ersten Ordnungen beziehen.

Für alle stetigen Functionen, welche diesem Theil der Bedingungen des Art. III genügen, steht demnach fest, dass sie im Allgemeinen, d. h. abgesehen von isolirten Punkten, bestimmte endliche Differentialquotienten besitzen.

Nehmen wir an, dem Theile α, β des Intervalls a, b gehöre kein Grenzpunkt von einer der Ordnungen $2, 3, \ldots k+2$ an. Dann hat die Function $f(x)$ in jedem Punkte des Intervalls α, β eine bestimmte, endliche erste Derivirte und diese Derivirte genügt ebenfalls den Bedingungen des Art. III. Die Punkte, welche für die Function $f'(x)$ Grenzpunkte i^{ter} Ordnung sind, fallen mit den Punkten zusammen, die für die Function $f(x)$ Grenzpunkte $i+1^{ter}$ Ordnung sind (Art. IX). Demnach ist kein Punkt des Intervalls α, β für die Function $f'(x)$ Grenzpunkt von einer der Ordnungen $1, 2, 3, \ldots k+1$. Unter der Voraussetzung $k \geqq 2$ hat folglich die Function $f'(x)$ in jedem Punkte innerhalb des Intervalls α, β eine bestimmte endliche Derivirte $f'(x)$. Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, dass $f(x)$ in jedem Punkte, der nicht Grenzpunkt 2^{ter}, $3^{ter}, \ldots k+2^{ter}$ Ordnung ist, bestimmte endliche Derivirte von den Ordnungen $1, 2, \ldots k$ besitzt.

XV.

Wir beweisen nun, dass die Function $f(x)$ auch in einem Grenzpunkt 2^{ter} Ordnung eine bestimmte endliche Derivirte besitzt.

Wir schliessen den betrachteten Grenzpunkt wieder in ein Intervall α, β ein, theilen dieses in n gleiche Theile und richten uns dabei so ein, dass der Grenzpunkt mit einem Theilpunkt x_i zusammenfällt.

Da kein Grenzpunkt 3^{ter} Ordnung mit einem Grenzpunkt zweiter Ordnung zusammenfallen kann, so dürfen wir annehmen, das Intervall α, β enthalte keinen Grenzpunkt 3^{ter} Ordnung.

Wir wollen überdies die Punkte α, β so wählen, dass sie auch nicht Grenzpunkte 4^{ter} Ordnung sind. Dann existiren, wie im vorigen Artikel gezeigt wurde, bestimmte, endliche Derivirte $f''(\alpha)$ und $f''(\beta)$.

Die Differenzen

$$(\Delta^3) \qquad \Delta_0^3\ \Delta_1^3\ \Delta_2^3 \ldots \Delta_{n-3}^3$$

haben, weil in dem Intervall α, β kein Grenzpunkt 3^{ter} Ordnung liegt, alle dasselbe Vorzeichen, wir wollen annehmen, sie seien negativ. Dagegen kommt in der Reihe

$$(\Delta^2) \qquad \Delta_0^2\ \Delta_1^2\ \Delta_2^2 \ldots \Delta_{n-2}^2$$

weil x_i Grenzpunkt 2^{ter} Ordnung ist, ein — aber auch nur ein Zeichenwechsel vor.

Da die Grössen (Δ^3) negativ sind, so muss die Reihe der Grössen (Δ^2) mit positiven Gliedern beginnen und mit negativen schliessen. Jedes positive Glied der Reihe ist $\leqq \Delta_0^2$, jedes negative ist dem absoluten Werth nach $\leqq \Delta_{n-2}^2$. Für unendlich abnehmende Werthe von h convergiren die Quotienten $\frac{\Delta_0^2}{h^2}$ und $\frac{\Delta_{n-2}^2}{h^2}$ gegen die endlichen Grössen $f''(\alpha)$ beziehungsweise $f''(\beta)$. Demnach bleibt für jeden Werth von h der absolute Werth der Quotienten $\frac{\Delta_\lambda^2}{h^2}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-2)$ unter einer angebbaren Grösse M. Der absolute Werth der Differenz

$$\frac{\Delta_i}{h} - \frac{\Delta_0}{h} = \frac{\Delta_0^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots \Delta_{i-1}^2}{h}$$

ist demnach kleiner als $(x_i - \alpha) M$.

Für unbegrenzt abnehmende Werthe von h convergirt der Quotient $\frac{\Delta_0}{h}$ gegen die endliche Grösse $f'(\alpha)$. Folglich bleibt für jeden Werth von h der absolute Werth des Quotienten

$$Q_1 = \frac{\Delta_i}{h} = \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$$

unter einer angebbaren Grösse und hieraus folgt auf Grund des in Art. XII bewiesenen Satzes, dass Q_1 für unbegrenzt abnehmende Werthe von h gegen eine bestimmte, endliche Grenze $\overset{+}{f}'(x)$ convergirt.

Durch ganz analoge Betrachtungen lässt sich zeigen, dass der Quotient

$$Q_2 = \frac{\Delta_{i-1}}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

für unbegrenzt abnehmende h gegen eine bestimmte, endliche Grenze $\overline{f}'(x)$ convergirt.

Dass die beiden Grenzwerthe $\overset{+}{f}'(x)$ und $\overline{f}'(x)$ einander gleich sind, folgt daraus, dass die Differenz $Q_1 - Q_2 = h \frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$ zugleich mit der Grösse gegen Null convergirt.

XVI.

Da ein Grenzpunkt 3ter Ordnung nicht mit einem Grenzpunkt 2ter Ordnung zusammenfallen kann, so steht für jeden Grenzpunkt 3ter Ordnung x bereits die Existenz der Grenzwerthe $\overset{+}{f}'(x)$ und $\overset{-}{f}'(x)$ fest (Art. XIII) und es handelt sich nur mehr darum zu beweisen, dass diese Grenzwerthe nicht verschieden sein können.

Wir schliessen den Grenzpunkt 3ter Ordnung x in ein Intervall α, β ein, theilen dieses in n gleiche Theile von der Grösse h und richten uns wieder so ein, dass der Grenzpunkt x mit einem Theilpunkt x_i zusammenfällt.

Da kein Grenzpunkt dritter Ordnung mit einem Grenzpunkt 4ter Ordnung zusammenfallen kann, so dürfen wir annehmen, das Intervall α, β enthalte keinen Grenzpunkt 4ter Ordnung. Die Punkte α, β können wir überdies so wählen, dass keiner von beiden mit einem Grenzpunkt 5ter Ordnung zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung steht die Existenz der Derivirten $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha)$ und $f''(\beta)$, $f'''(\beta)$ bereits fest (Art. XIV).

Die Differenzen

$$(\Delta^4) \qquad \Delta_0^4\ \Delta_1^4\ \Delta_2^4 \ldots \Delta_{n-4}^4$$

haben alle dasselbe Vorzeichen; wir wollen annehmen, sie seien negativ. In der Reihe

$$(\Delta^3) \qquad \Delta_0^3\ \Delta_1^3\ \Delta_2^3 \ldots \Delta_{n-3}^3$$

dagegen wird ein und nur ein Zeichenwechsel vorkommen. Es ist klar, dass die Reihe (Δ^3) mit positiven Gliedern beginnen und mit negativen Gliedern schliessen muss. Von den positiven Gliedern ist jedes $\leqq \Delta_0^3$; der absolute Werth eines jeden negativen Gliedes ist $\leqq \Delta_{n-3}^3$.

Für unbegrenzt abnehmende Werthe von h convergiren die Quotienten $\frac{\Delta_0^3}{h^3}$ und $\frac{\Delta_{n-3}^3}{h^3}$ gegen die endlichen Grössen $f'''(\alpha)$ beziehungsweise $f'''(\beta)$. Folglich bleibt für jeden Werth von h der absolute Werth des Quotienten $\frac{\Delta_\lambda^3}{h^3}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-3)$ unter einer angebbaren Grösse M.

Der absolute Werth des Quotienten $\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$ ist jedenfalls nicht grösser als die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$\frac{\Delta_0^2}{h^2} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta_0^3 + \Delta_1^3 + \Delta_2^3 \cdots \Delta_{i-2}^3}{h^2}.$$

Von diesen Grössen convergirt die erste für abnehmende h gegen die endliche Grösse $f''(\alpha)$; der absolute Werth des zweiten ist kleiner als $(i-1)hM = (x_i - \alpha - h)M$. Folglich bleibt der absolute Werth des Quotienten $\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$ für jeden Werth von h unter einer festen Grösse. Daraus folgt: die Differenz

$$\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h} = h\,\frac{\Delta_{i-1}^2}{h^2}$$

convergirt gleichzeitig mit h gegen Null w. z. b. w.

Damit ist der Beweis erbracht, dass die Bedingungen des Art. III hinreichen, damit die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalls a, b bestimmte, endliche Derivirte jeder vorgeschriebenen Ordnung besitzt.

Strassburg, im März 1892.

Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die vorliegende Abhandlung habe ich in drei Abschnitte eingetheilt, über deren Inhalt ich hier einen kurzen Ueberblick voraufschicke.

Der erste Abschnitt bringt zunächst einen neuen Beweis des Satzes, nach welchem eine Riemann'sche Fläche (ein irreducibles algebraisches Gebilde) nur eine endliche Zahl von eindeutigen Transformationen in sich besitzen kann, wenn das Geschlecht p der Fläche grösser als 1 ist. Einen wesentlichen Stützpunkt dieses Beweises bildet die nähere Untersuchung derjenigen besonderen Stellen auf einer Fläche vom Geschlechte p, in welchen eine eindeutige algebraische Function von niedrigerer als der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird, ohne noch an anderen Stellen unstetig zu werden*).

Die Anzahl dieser besonderen Stellen beträgt stets $p(p^2-1)$. Jedoch ist dabei vorausgesetzt, dass jede Stelle mit einer gewissen Multiplicität gezählt wird. Ich zeige nun, dass die Anzahl jener Stellen, wenn man jede Stelle einfach rechnet, also das Wort „Anzahl" in seiner ursprünglichen Bedeutung versteht, stets grösser ist als $2p+2$. Eine Ausnahme bildet der hyperelliptische Fall, in welchem die Anzahl gleich $2p+2$ ist.

Schliesst man den hyperelliptischen Fall aus, so sind die erwähnten Stellen auf der Curve der φ im Raume von $p-1$ Dimensionen mit denjenigen Punkten identisch, in welchen eine Ebene hyperosculirt, d. i. mindestens p-punktig berührt. Ich bespreche kurz die allgemeinere Frage nach denjenigen Punkten auf der Curve der φ, in welchen eine

*) Diese Stellen spielen auch in den älteren Beweisen des Satzes eine Rolle. Eine Zusammenstellung der sich auf den Satz beziehenden Litteratur habe ich in Nr. 3 meiner Note: „Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen", gegeben. Mathematische Annalen, Bd. 32 oder Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1887.

Fläche k^{ter} Ordnung, wo $k > 1$ ist, hyperosculirt, d. i. mindestens $(2k-1)(p-1)$-punktig berührt. Die Anzahl dieser Stellen ist stets gleich

$$(2k-1)^2 \cdot p \cdot (p-1)^2,$$

wenn man jede Stelle mit einer gewissen Multiplicität rechnet, welche ich genau definire.

Der zweite Abschnitt giebt die Construction der Riemann'schen Flächen, welche eine endliche Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzen, aus unabhängigen Bestimmungsstücken. Man erhält die allgemeinste derartige Fläche, wenn man eine beliebig gewählte Fläche Φ in r Exemplaren nimmt, diese Exemplare auf einander legt und in geeigneter Weise zu einer einzigen Fläche mit einander verbindet. Die so entstehenden Flächen sind keine anderen, als die von Herrn Klein eingeführten und von Herrn Dyck nach verschiedenen Richtungen untersuchten „regulären" Riemann'schen Flächen, welche die Verzweigung von Galois'schen Resolventen darstellen*).

Ist eine Riemann'sche Fläche F vom Geschlecht p r-blättrig über der Fläche Φ vom Geschlecht π ausgebreitet, so besteht die Gleichung

$$2p - 2 = W + r(2\pi - 2),$$

wo W die Gesammtzahl der Verzweigungen von F in Bezug auf Φ bedeutet.

Aus dieser Gleichung leite ich beiläufig die von Herrn Zeuthen aufgestellte Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier mehrdeutig aufeinander bezogener algebraischen Gebilde ab. Eben diese Gleichung führt zu einer wesentlichen Ergänzung des im ersten Abschnitte bewiesenen Satzes. Es ergiebt sich nämlich, dass eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ nicht mehr als $84(p-1)$ eindeutige Transformationen in sich besitzen kann.

Die Untersuchungen des dritten Abschnitts beziehen sich auf die Integrale erster Gattung einer Riemann'schen Fläche $(p > 1)$, von welcher vorausgesetzt wird, dass sie eine Gruppe eindeutiger Transformationen in sich besitzt.

Jeder eindeutigen Transformation der Fläche in sich entspricht eine lineare Transformation der Integrale erster Gattung, welche man auch in die Gestalt einer homogenen linearen Transformation der Differentiale erster Gattung setzen kann. Der Gruppe eindeutiger Transformationen der Fläche in sich entspricht eine Gruppe von homogenen linearen Transformationen der Differentiale erster Gattung, und ich beweise zuerst, dass beide Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind.

---

*) Vergleiche die unten folgenden Citate.

Es handelt sich dann weiter darum, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für die einzelne homogene lineare Transformation der Differentiale erster Gattung zu bestimmen. Die Bestimmung geschieht auf Grund der Theorie gewisser Functionensysteme auf einer Riemann'schen Fläche. Die Functionen eines solchen Systems sind wesentlich durch die Eigenschaft charakterisirt, dass sie sich auf geschlossenen Wegen bis auf multiplicative Constanten reproduciren. Die eindeutigen algebraischen Functionen bilden einen speciellen Fall eines solchen Functionensystems. Sie entsprechen dem Falle, in welchem jene multiplicativen Constanten sämmtlich gleich 1 sind. Auf die Theorie der allgemeinen Functionensysteme, welche an sich von Interesse erscheint, hoffe ich demnächst zurückzukommen.

Ich bemerke noch, dass die Resultate des dritten Abschnittes mannigfache Anwendungen auf die von Herrn Klein entworfene Theorie der elliptischen Modulfunctionen gestatten. Thatsächlich bin ich auch durch Untersuchungen über Classenzahlrelationen*), welche sich auf jene Theorie stützen, zu den hier behandelten allgemeineren Fragen hingeführt worden.

Schliesslich will ich noch in Betreff des allgemeinen Begriffes einer Riemann'schen Fläche auf die folgenden Publicationen verweisen: F. Klein, „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" (Leipzig 1882) und „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" Mathematische Annalen, Bd. 21. R. Dedekind und H. Weber: „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen". Crelle's Journal Bd. 92.

Soweit es sich nur um Lagebeziehungen, also um Wege und Schnitte auf einer Fläche handelt, denke ich mir dieselbe stets als eine frei im Raume liegende geschlossene Ringfläche mit p Oeffnungen.

I. Abschnitt.

1.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p besitze eine eindeutige Transformation S in sich. Dann beträgt die Anzahl der verschiedenen Stellen P der Fläche, welche mit ihrer entsprechenden Stelle P' zusammenfallen, höchstens $2p + 2$, es sei denn, dass S die identische Transformation ist, d. h. dass jede Stelle P mit ihrer entsprechenden P' zusammenfällt.

In der That, angenommen S sei nicht die identische Transformation und Q irgend eine Stelle, welche nicht mit ihrer entsprechenden Q'

*) „Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe" Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 4. Mai 1885.

zusammenfällt. Wir betrachten dann eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf unserer Fläche, welche nur bei Q und zwar von einer Ordnung $\mu \leqq p+1$ unendlich wird. Eine solche Function existirt bekanntlich immer. Sind nun z und z' die Werthe, welche diese Function in den entsprechenden Stellen P und P' annimmt, so können wir die Differenz $z'-z$ als eine Function der Stelle P ansehen. Diese Function ist eine eindeutige algebraische Function der Fläche, welche 2μ-Mal unendlich wird, nämlich μ-fach an der Stelle Q und μ-fach an der Stelle Q_1, deren entsprechende die Stelle Q ist. Folglich wird $z'-z$ auch 2μ-Mal Null. Nun ist aber jede Stelle P, welche mit ihrer entsprechenden Stelle P' coincidirt, eine Nullstelle von $z'-z$. Folglich ist die Anzahl dieser Stellen höchstens $2\mu \leqq 2p+2$, w. z. b. w.

Wenn die Riemann'sche Fläche hyperelliptisch ist, so beträgt die im vorigen Satze erwähnte Anzahl höchstens 4, *es sei denn, dass die Transformation S die identische ist, oder diejenige, welche je zwei Stellen einander zuordnet, in denen die zweiwerthige Function der Fläche denselben Werth annimmt.*

Sind nämlich z und z' die Werthe dieser Function in zwei entsprechenden Stellen P und P', so ist $z'-z$ aufgefasst als Function der Stelle P eine eindeutige algebraische Function, welche höchstens 4 Mal unendlich wird. Folglich wird $z'-z$ auch höchstens 4 Mal Null, es sei denn, dass $z'-z$ identisch Null ist. Hieraus folgt ohne Weiteres die Richtigkeit unseres Satzes.

Eine Riemann'sche Fläche, deren Geschlecht p grösser als 1 *ist, kann nur eine endliche Anzahl von eindeutigen Transformationen in sich besitzen.*

Zur Abkürzung werde ich mich der Ausdrucksweise bedienen „die Transformation S ersetze den Punkt P durch den Punkt P'", wenn dem Punkte P vermöge S der Punkt P' entspricht. Ferner werde ich, wie üblich, unter S^{-1} diejenige Transformation verstehen, welche den Punkt P' durch den Punkt P ersetzt. Endlich möge, wenn S den Punkt P durch P' und T den Punkt P' durch P'' ersetzt, unter ST diejenige Transformation verstanden werden, welche den Punkt P durch P'' ersetzt.

Dies vorausgeschickt, wende ich mich zu dem Beweise des aufgestellten Satzes und betrachte zuerst den Fall, wo die Riemann'sche Fläche nicht hyperelliptisch ist.

In diesem Falle giebt es, wie ich in der folgenden Nummer zeigen werde, stets eine Gruppe von $r > 2p+2$ Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$, welche sich bei jeder eindeutigen Transformation der Fläche in sich nur untereinander vertauschen können. Hieraus schliessen wir sofort, dass die Fläche eine endliche Anzahl, nämlich höchstens $r!$ Transformationen in sich besitzen kann. Denn zwei Transformationen

S und S', welche dieselbe Vertauschung der Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$ hervorbringen, sind nothwendig identisch, da $S' S^{-1}$ die r Stellen fest lässt und also, nach dem oben Bewiesenen, die identische Transformation ist.

Wenn nun zweitens die Riemann'sche Fläche hyperelliptisch ist, so sei s die zweiwerthige Function der Fläche. Dann müssen sich die $2p+2$ Stellen, an welchen ds von der zweiten Ordnung verschwindet, bei jeder eindeutigen Transformation der Fläche in sich unter einander vertauschen. Sind daher S und S' zwei solche Transformationen, welche dieselbe Vertauschung dieser Stellen hervorbringen, so bleiben bei der Transformation $S'S^{-1}$ mehr als 4, nämlich die erwähnten $2p+2$ Stellen fest. Folglich ist $S'S^{-1}$ entweder die identische Transformation oder diejenige, welche je zwei Stellen einander zuordnet, in denen die zweiwerthige Function denselben Werth annimmt. Hieraus folgt nun sofort, dass die Fläche höchstens doppelt so viele Transformationen in sich besitzen kann, als die $2p+2$ Stellen unter einander vertauschbar sind, also höchstens $2(2p+2)!$.

2.

Es sei F eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht $p > 1$, ferner seien $u_1, u_2, \ldots u_p$ zugehörige linear unabhängige Integrale 1. Gattung. Bezeichnet nun u eine beliebige Function des Ortes auf der Fläche F, so besitzt die Determinante

$$(1) \qquad \Delta_u = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{du}, & \frac{du_2}{du}, & \ldots & \frac{du_p}{du} \\ \frac{d^2u_1}{du}, & \frac{d^2u_2}{du^2}, & \ldots & \frac{d^2u_p}{du^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^pu_1}{du^p}, & \frac{d^pu_2}{du^p}, & \ldots & \frac{d^pu_p}{du^p} \end{vmatrix}$$

folgende Eigenschaften. Sie verschwindet nicht identisch, da $u_1, u_2, \ldots u_p$ linear unabhängig sind. Sie multiplicirt sich mit einer nicht verschwindenden Constanten, wenn $u_1, u_2, \ldots u_p$ durch irgend ein anderes System von p überall endlichen Integralen ersetzt werden. Endlich ist

$$(2) \qquad \Delta_u = \Delta_t \cdot \left(\frac{dt}{du}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}},$$

wenn t irgend eine andere Function des Ortes auf der Fläche F bezeichnet.

Wir wollen nun für u insbesondere ein überall endliches Integral wählen. Dann stellt die Determinante Δ_u eine eindeutige algebraische Function der Fläche F vor. Um diese näher zu untersuchen, betrachten wir eine Stelle P der Fläche und bezeichnen mit t eine Function des Ortes, welche in P von der ersten Ordnung verschwindet.

Die Gleichung (2) zeigt nun, dass Δ_u nur an den $2p-2$ Nullstellen von du unendlich wird und zwar an jeder von der Ordnung $\frac{p(p+1)}{2}$. Die Gesammtordnung des Unendlichwerdens beträgt also $(p-1)\,p(p+1)$ und ebenso gross ist also auch die Gesammtordnung des Verschwindens. Nun wird aber $\frac{dt}{du}$ an keiner Stelle Null; also folgt:

„ Es giebt stets eine endliche Zahl von Stellen P, an welchen die Determinante Δ_t verschwindet. Sind $P_1, P_2, \ldots P_r$ diese Stellen und $m_1, m_2, \ldots m_r$ die zugehörigen Ordnungszahlen des Verschwindens von Δ_t, so ist

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = (p-1)p(p+1). \tag{3}$$

Es handelt sich jetzt um eine nähere Untersuchung der Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_r$.

Zu dem Ende betrachten wir eine beliebige Stelle P der Fläche und wählen die überall endlichen Integrale so, dass ihre Entwicklungen an der Stelle P die Gestalt haben

$$\begin{aligned} u_1 &= t^{\varrho_1} + \cdots, \\ u_2 &= t^{\varrho_2} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_p &= t^{\varrho_p} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei die Exponenten der Anfangsglieder den Bedingungen

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p \tag{4}$$

genügen. Diese Wahl der Integrale ist, wie leicht zu sehen, stets und nur auf eine Weise möglich. Die Entwicklung von Δ_t beginnt dann an der Stelle P mit dem Gliede

$$c \cdot t^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_p-\frac{p(p+1)}{2}} = c \cdot t^m,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$m = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_p - \frac{p(p+1)}{2} \tag{5}$$

setzen. Die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ besitzen eine einfache Bedeutung. Man betrachte nämlich die eindeutigen algebraischen Functionen der Fläche, welche nur an der Stelle P unendlich werden. Jede dieser Functionen wird an der Stelle P von einer bestimmten Ordnung

unendlich. Nach einem Satze des Herrn Weierstrass kommen nun alle möglichen Ordnungen

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

wirklich vor mit Ausnahme von p Ordnungen. Diese p fehlenden Ordnungen sind nun gerade die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$.*)

Für jede Stelle P, welche nicht mit einer der Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$ zusammenfällt, ist $m = 0$ und folglich nach (4) und (5)

$$\varrho_1 = 1, \ \varrho_2 = 2, \ldots \varrho_p = p.$$

Die niedrigste Ordnung, welche dann auftritt, ist also $p + 1$. Umgekehrt, wenn $p + 1$ die niedrigste auftretende Ordnung ist, so wird nothwendig $m = 0$.

Die Stellen $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ (für welche m bez. die Werthe $m_1, m_2, \ldots m_r$ besitzt) sind also vollständig dadurch charakterisirt, dass für jede derselben eine Function existirt, welche nur in ihr und zwar von geringerer als der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird. Hieraus erhellt, dass diese Stellen sich bei jeder eindeutigen Transformation der Fläche in sich nur unter einander vertauschen können.**)

Wir müssen nun die Unregelmässigkeiten, welche die Zahlenreihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ darbieten kann, wenn P mit einer der Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$ zusammenfällt, näher untersuchen. Zunächst bemerken wir, dass ϱ_p stets kleiner als $2p$ ist, weil $\frac{du_p}{dt}$ höchstens von der Ordnung $2p-2$ an der Stelle P verschwinden kann. Es ist also

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_p \leqq 2p - 1. \tag{6}$$

Bezeichnen z_α und z_β zwei Functionen, welche nur bei P von den Ordnungen α, bez. β unendlich werden, so ist $z_\alpha z_\beta$ eine ähnliche Function mit der Ordnungszahl $\alpha + \beta$. Wenn daher α eine auftretende Ordnung, ϱ eine fehlende bezeichnet, so muss auch $\varrho - \alpha$ eine fehlende Ordnung sein. Denn würde $\varrho - \alpha$ auftreten, so würde auch $(\varrho - \alpha) + \alpha = \varrho$ auftreten, gegen die Annahme.

Dies vorausgeschickt, sei α die *kleinste* auftretende Ordnung. Es treten dann auch alle durch α theilbaren Ordnungen auf, woraus folgt, dass $\alpha \geqq 2$ ist.

Unter den Zahlen, welche $\equiv i \pmod{\alpha}$ sind, sei nun r_i die grösste, welche unter den fehlenden Ordnungen vorkommt. Dann sind

---

*) Ich übergehe hier den Beweis, welcher übrigens leicht geführt wird durch Aufstellung aller jener Functionen vermöge der Integrale 2. Gattung, welche bei P unstetig werden. Man vgl. wegen des Satzes auch die Abhandlung Nöther's: „Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn Weierstrass". Crelle's Journal, Bd. 97.

**) Das Gleiche folgt auch schon aus der zweiten oben angegebenen Eigenschaft der Determinante Δ_u.

alle fehlenden Ordnungen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ in folgender Tabelle enthalten:

$$(7)\qquad \begin{cases} 1, & 1+\alpha, & 1+2\alpha, \ldots r_1, \\ 2, & 2+\alpha, & 2+2\alpha, \ldots r_2, \\ \cdot & & \\ \vdots & & \\ \alpha-1, & (\alpha-1)+\alpha, & (\alpha-1)+2\alpha, \ldots r_{\alpha-1}, \end{cases}$$

wo in der ersten Horizontalreihe alle fehlenden Ordnungen stehen, welche $\equiv 1 \pmod{\alpha}$ sind u. s. w.*) Da die Anzahl der Zahlen (7) gleich p ist, so hat man

$$p = \left(1+\frac{r_1-1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{r_2-2}{\alpha}\right)+\cdots+\left(1+\frac{r_{\alpha-1}-(\alpha-1)}{\alpha}\right)$$

oder

$$(8)\qquad r_1+r_2+\cdots+r_{\alpha-1} = \alpha p - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.$$

Ferner ist die Summe der Zahlen (7) gleich

$$\frac{1}{2}(r_1+1)\frac{r_1+\alpha-1}{\alpha}+\frac{1}{2}(r_2+2)\frac{r_2+\alpha-2}{\alpha}+\cdots,$$

und daher

$$(9)\qquad m = \frac{1}{2\alpha}\sum_1^{\alpha-1}{}^{k}(r_k+k)(r_k+\alpha-k)-\frac{1}{2}p(p+1).$$

Dieser Ausdruck lässt nun mit Hülfe von (8) die merkwürdige Umformung zu:

$$(10)\qquad m = \frac{p(p-1)}{2}-\frac{1}{2\alpha}\sum_1^{\alpha-1}{}^{k} r_k(2p-1-r_k)-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}.$$

Ist jetzt $\alpha = 2$, so folgt aus (8) und (10)

$$m = \frac{p(p-1)}{2}.$$

D. h. „Ist die Fläche hyperelliptisch, so hat jeder der Punkte $P_1, \ldots P_r$ die Multiplicität $\frac{p(p-1)}{2}$ und es ist also $r = 2p+2$." Diese Punkte sind keine anderen, wie die Nullstellen zweiter Ordnung von ds, wo s die zweiwerthige Function der Fläche bedeutet.

---

*) Da $(r_i+\alpha)+(r_k+\alpha) = (r_i+r_k+\alpha)+\alpha$ eine auftretende Ordnung ist, so ist nothwendig $r_{i+k} \leqq r_i+r_k+\alpha$, wo die Indices (mod. α) zu reduciren sind. Diese Ungleichungen kommen jedoch nicht weiter in Betracht. Wegen der Aufstellung der fehlenden Ordnungen vgl. man übrigens „Schottky: „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" Crelle's Journal Bd. 83, pag. 308, 318, 319.

Wenn aber die Fläche nicht hyperelliptisch ist, so ist α nothwendig > 2 und die Gleichung (10) zeigt, dass

$$m < \frac{p(p-1)}{2};$$

denn $r_1, r_2, \ldots r_{\alpha-1}$ sind positiv und

$$2p-1-r_1,\ 2p-1-r_2, \ldots 2p-1-r_{\alpha-1},$$

nach (6) nicht negativ. Es sind also die Multiplicitäten $m_1, m_2, \ldots m_r$ sämmtlich kleiner als $\frac{p(p-1)}{2}$, daher ihre Summe

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = (p-1)p(p+1) < r \cdot \frac{p(p-1)}{2}$$

und also

$$r > 2p + 2.$$

Die Anzahl der Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$ übersteigt also auf jeder nicht hyperelliptischen Fläche stets die Zahl $2p+2$, womit auch die in Nr. 1 aufgestellte Behauptung gerechtfertigt ist.

Die untere Grenze für die Zahl r lässt sich durch eine eingehendere Discussion der Formel (10) noch erheblich vergrössern. Doch will ich hierauf nicht näher eingehen. Eine genaue Untersuchung würde übrigens nicht nur festzustellen haben, welche Werthe die Zahl r annehmen kann, sondern auch welche Zahlsysteme $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ für die einzelnen Stellen möglich sind. Bemerkt sei nur noch, dass im Falle $p = 3$ die untere Grenze der Zahl r gleich 12 ist, eine Thatsache, welche sich in folgender Weise aussprechen lässt:

„*Eine ebene Curve 4. Ordnung ohne vielfachen Punkt besitzt mindestens 12 getrennt liegende Wendepunkte.*“

Das Beispiel der Curve

$$f \equiv x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$$

zeigt, dass die untere Grenze 12 wirklich erreicht wird. Die Hesse'sche Form von f ist nämlich, abgesehen von einem Zahlenfactor, gleich $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ und die Curve hat also nur die 12 Schnittpunkte, welche auf den Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ liegen, zu Wendepunkten.

3.

Die in der vorigen Nummer untersuchten Punkte $P_1, \ldots P_r$ bilden das einfachste Beispiel einer „invarianten“ Punktgruppe einer Riemann'schen Fläche, d. h. einer solchen Punktgruppe, deren Definition von einer besondern Darstellungsform der Fläche unabhängig ist. Für den in Nr. 1 gegebenen Beweis ist jede solche Punktgruppe brauchbar, wenn sie nur mehr als $2p+2$ Punkte enthält.

Es liegt nun die Vermuthung nahe, dass es auf jeder Fläche, deren Geschlecht $p > 1$ ist, stets unendlich viele invariante Punktgruppen giebt, und dass man mit solchen Punktgruppen die ganze Fläche überdecken kann. Ist die Fläche hyperelliptisch, so ist es leicht die Vermuthung zu bestätigen. In der That sei $y^2 = f(z)$ die gewöhnlich benutzte Darstellungsform der Fläche, welcher die Einführung der zweiwerthigen Function z zu Grunde liegt. Dann bilden die Nullstellen jeder Covariante von $f(z)$ eine invariante Punktgruppe, und man erkennt ohne Schwierigkeit, dass mit derartigen Gruppen die ganze Fläche überzogen werden kann.

Ist die Fläche nicht hyperelliptisch, so stellen wir sie durch eine Curve $2p - 2^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $p - 1$ Dimensionen dar, indem wir die homogenen Coordinaten $\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$ proportional setzen den p Differentialen eines vollständigen Systems von Integralen 1. Gattung*) Jede covariante Fläche dieser Curve schneidet die letztere in einer invarianten Punktgruppe. Aber es tritt hier die Schwierigkeit auf, dass gewisse covariante Flächen nur existiren, wenn die $3p - 3$ Moduln nicht besonderen Gleichungen genügen. Um so bemerkenswerther ist es, dass man trotzdem unendlich viele invariante Punktgruppen angeben kann, welche stets, also unabhängig von den besonderen Werthen der $3p - 3$ Moduln, existiren. Ich will hierauf um so lieber eingehen, als die Bedeutung der oben betrachteten Punkte $P_1, P_2, \ldots P_r$ dabei klarer hervortritt.

Man suche auf der Curve $2p - 2^{\text{ter}}$ Ordnung diejenigen Punkte, in welchen eine Fläche k^{ter} Ordnung hyperosculirt. Ist $k = 1$, handelt es sich also um die hyperosculirenden Ebenen, so sind die gesuchten Punkte keine anderen, wie die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_r$ und die Zahl dieser Punkte beträgt, wenn jeder mit der zugehörigen Multiplicität gezählt wird, $(p-1)p(p+1)$. Ich behaupte nun, dass auch für jeden Werth von $k > 1$, die gesuchten Punkte stets in endlicher Anzahl vorhanden sind, wie es folgender Satz näher ausspricht:

„Die Anzahl der Punkte auf der Curve $2p - 2^{\text{ter}}$ Ordnung, in welchen dieselbe von einer Fläche k^{ter} Ordnung hyperosculirt wird, beträgt stets

$$(2k-1)^2 \cdot p(p-1)^2.“$$

Es wird vorausgesetzt, dass $k > 1$ sei und dass jeder Punkt mit der ihm zugehörigen, weiterhin näher zu bezeichnenden Multiplicität gezählt wird.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem wichtigen Satze aus

*) Vgl. Weber: „Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle“. Mathem. Ann. Bd. 13, Nöther: „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen“, ebenda, Bd. 17.

der Theorie der algebraischen Functionen, welchen Herr Nöther aufgestellt und bewiesen hat*)

Nach diesem Satz giebt es nämlich unter den Formen k^{ter} Ordnung der Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ genau $\varkappa = (2k-1)(p-1)$ linear unabhängige. Indem wir mit u ein beliebig gewähltes Integral 1. Gattung bezeichnen und $\varphi_1 = \frac{du_1}{du}$, $\varphi_2 = \frac{du_2}{du}$, $\cdots \varphi_p = \frac{du_p}{du}$ annehmen, gehen die $\varkappa$ linear unabhängigen Formen — sie seien

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\varkappa —$$

in Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche über. Die Punkte, in welchen eine Fläche k^{ter} Ordnung hyperosculirt, sind nun die Nullstellen der Determinante:

$$\Delta_\varkappa = \begin{vmatrix} \psi_1, & \psi_2, & \cdots & \psi_\varkappa \\ \frac{d\psi_1}{du}, & \frac{d\psi_2}{du}, & \cdots & \frac{d\psi_\varkappa}{du} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\varkappa-1}\psi_1}{du^{\varkappa-1}}, & \frac{d^{\varkappa-1}\psi_2}{du^{\varkappa-1}}, & \cdots & \frac{d^{\varkappa-1}\psi_\varkappa}{du^{\varkappa-1}} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet nicht identisch, weil $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\varkappa$ linear unabhängig sind. Sie stellt eine eindeutige algebraische Function des Ortes vor, welche an den $2p-2$ Nullstellen von du und zwar an jeder von der Ordnung $\frac{(2k-1+\varkappa)\varkappa}{2}$ unendlich wird. Folglich wird $\Delta_\varkappa$ im Ganzen

$$(2p-2)(2k-1+\varkappa)\tfrac{\varkappa}{2} = (2k-1)^2 p (p-1)^2\text{-Mal}$$

Null. Hiermit ist unser Satz bewiesen und es ist ersichtlich, dass die Multiplicität jedes einzelnen Punktes durch die Ordnung des Verschwindens von $\Delta_\varkappa$ angezeigt wird.

In dem einfachsten Falle $p = 3$ besagt unser Satz:

„Auf einer ebenen Curve 4. Ordnung giebt es 12 . $(2k-1)^2$ Punkte in welchen eine Curve k^{ter} Ordnung hyperosculirt".

Für den niedrigsten Werth von k, nämlich für $k = 2$, erhalten wir $12 \cdot 9 = 108$ Punkte, in welchen eine Curve 2. Ordnung hyperosculirt. Diese Punkte sind die 24 Wendepunkte und die 84 sextactischen Punkte.

Bezeichnen k, l, m, n vier ganze Zahlen, $\Delta_\varkappa$, Δ_λ, Δ_μ, Δ_ν die zugehörigen Determinanten, so überzeugt man sich leicht, dass die Function

$$\frac{\lambda\, d \lg \Delta_\lambda - \lambda\, d \lg \Delta_\varkappa}{\mu\, d \lg \Delta_\nu - \lambda\, d \lg \Delta_\mu}$$

*) Siehe das vorige Citat.

absolut invariant ist, dass also auch jede Punktgruppe, in welcher diese Function einen gegebenen Werth annimmt, eine invariante Gruppe ist. Mit solchen Gruppen lässt sich daher die Riemann'sche Fläche vollständig überdecken. Es bleibt freilich zu zeigen, dass k, l, m, n stets so wählbar sind, dass jener Quotient sich nicht auf eine Constante reducirt. Doch will ich diesen Nachweis hier nicht führen.

II. Abschnitt.

4.

Bei den weiteren Untersuchungen werde ich eine bestimmte canonische Zerschneidung der Riemann'schen Flächen zu Grunde legen, welche ich hier kurz besprechen will. Nach dem Vorgange Riemann's pflegt man die Zerschneidung durch p Schnittpaare und $p-1$ diese Paare verbindenden Schnitte auszuführen. Indessen ist es zweckmässiger die letzteren $p-1$ Schnitte vollständig zu beseitigen, da sie bei den meisten Untersuchungen eine ganz unnöthige Complication herbeiführen. Die $p-1$ Schnitte kommen in Fortfall, wenn wir folgende Zerschneidung wählen (welche übrigens auch durch einen Grenzübergang aus der Riemann'schen Zerschneidung abgeleitet werden kann*). Wir wählen auf der Fläche einen Punkt O beliebig und legen $2p$ knotenlose in O beginnende und endigende Schnitte $A_1, B_1, \ldots A_p, B_p$, durch welche die Fläche F in eine einfach zusammenhängende F' übergeht. Die Begrenzung von F' wird durch die $4p$ Ufer der Schnitte gebildet. Die Bezeichnung und Aufeinanderfolge der Schnitte sei so festgelegt, dass man ihnen bei einem positiven Umlaufe um O in der Folge

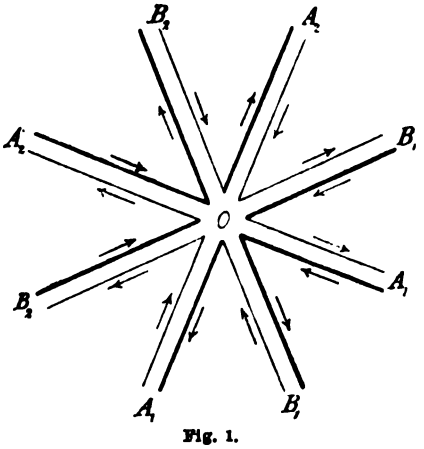


Fig. 1.

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \cdots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

begegnet. Dies soll bedeuten, dass man zuerst den Schnitt A_1 vom negativen zum positiven Ufer, sodann ebenso den Schnitt B_1, sodann

*) Vgl. F. Klein: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie". Mathem. Ann. Bd. 21, pag. 183ff. Man vergl. auch meine Arbeit: „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten". Mathem. Annalen Bd. 39, pag. 1ff.

wieder A_1 vom positiven zum negativen Ufer überschreitet u. s. w. Die Fläche bietet also nach der Zerschneidung beim Punkte O das durch Figur 1 (pag. 12) veranschaulichte Aussehen. Die Figur bezieht sich auf den Fall $p = 2$.

Es seien nun weiter $a_1, a_2, \ldots a_w$ irgend w Punkte der Fläche F'. Wir legen dann von O aus durch das Innere von F' knotenlose einander nicht treffende Schnitte $l_1, l_2, \ldots l_w$ nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_w$. Die hierdurch aus F' entstehende Fläche nennen wir F'' und wir nehmen die Aufeinanderfolge der Schnitte l und ihre

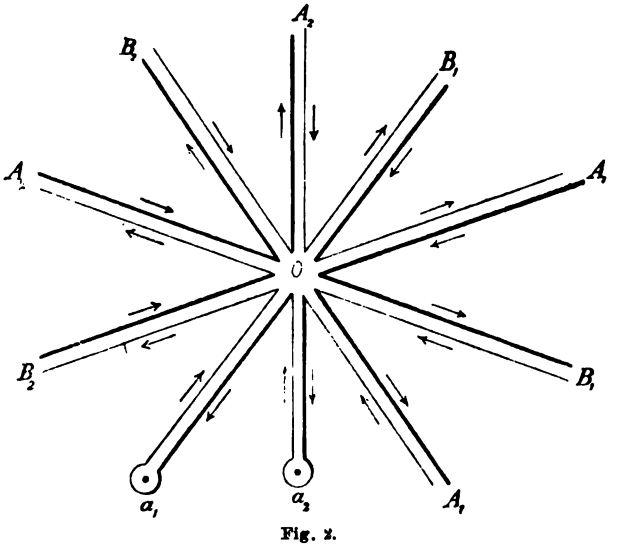


Fig. 2.

Lage gegen die Schnitte A, B so an, dass ein positiver Umlauf um O die Reihenfolge

$$l_1^+ l_2^+ \ldots l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

ergiebt. Man vergleiche Figur 2, welche den Fall $w = 2$, $p = 2$ veranschaulicht*).

5.

Man denke sich jetzt auf der Fläche F eine analytische Function Z des Ortes, welche keine natürlichen Grenzen und nur die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_w$ als Verzweigungspunkte besitzt. Der einzelne Zweig der Function Z ist dann auf der Fläche F'' eindeutig. Ist

*) In den Figuren habe ich, dem Vorgange C. Neumann's (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1884) folgend, die positiven Ufer durch stärker gezeichnete Linien kenntlich gemacht. Die Pfeile geben den positiven Durchlaufungssinn für die Begrenzung der zerschnittenen Fläche an.

insbesondere Z eine algebraische Function des Ortes, welche an der einzelnen Stelle der Fläche F n Werthe besitzt, so erscheint der ganze Werthevorrath der Function Z auf der Fläche F'' in n eindeutige Zweige zerlegt.

Wir nehmen dementsprechend n in einander liegende Exemplare der Fläche F'', auf welche wir die n Zweige der Function Z ausbreiten und verbinden nun die n Exemplare längs der Schnitte l, A, B zu einer einzigen geschlossenen Fläche F, auf welcher die Function Z eindeutig ausgebreitet ist. Welches ist das Geschlecht P der so entstehenden Fläche F? Wir wollen die n Exemplare F'' als die „Blätter" von F bezeichnen. Hängen dann an der Stelle a_i die Blätter in c_i Cyklen von je $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Blättern zusammen, so heisse

$$(\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) + \cdots = n - c_i,$$

wie üblich, die Multiplicität von a_i als Verzweigungspunkt, und

$$W = (n - c_1) + (n - c_2) + \cdots + (n - c_\omega)$$

die Gesammtzahl der Verzweigungen. Die aufgeworfene Frage wird dann durch nachstehende Gleichung beantwortet:

$$2P - 2 = W + n(2p - 2). \tag{1}$$

Ist $p = 0$, so geht diese Gleichung in die bekannte Formel über, welche das Geschlecht einer n-blättrig über der complexen Zahlenebene ausgebreiteten Fläche berechnen lehrt. Ist $p > 0$, so kann man die Gleichung folgendermassen beweisen. Es sei u ein überallendliches Integral der Fläche F, so ist u ein ebensolches Integral für die Fläche F. Es muss daher du auf der Fläche F genau $2P - 2$ Mal von der zweiten Ordnung verschwinden. Diese Nullstellen von du lassen sich aber sofort angeben. Es sind erstens die Verzweigungsstellen und zwar zählt die Verzweigungsstelle a_i für $n - c_i$ Nullstellen, so dass wir, diesen Stellen entsprechend, im Ganzen W Nullstellen erhalten. Sodann verschwindet zweitens du auf der Fläche F an $2p - 2$ Stellen von der zweiten Ordnung und diese Stellen ergeben auf F im Ganzen $n(2p - 2)$ Nullstellen, da jede Stelle von F sich in n Exemplaren auf der Fläche F wiederfindet. Es ist also $2P - 2 = W + n(2p - 2)$, w. z. b. w.*)

Ich will hier beiläufig aus der Gleichung (1) eine Folgerung ziehen. Es seien zwei Riemann'sche Flächen F_1 und F_2 vom Geschlecht p_1 bez. p_2 algebraisch so auf einander bezogen, dass jeder Stelle von F_1 n_1 Stellen von F_2 und umgekehrt jeder Stelle von F_2 n_2 Stellen von F_1 correspondiren. Diese Beziehung können wir dadurch zu einer

*) Ein anderer auf Betrachtungen der Analysis situs beruhender Beweis findet sich in meiner Arbeit „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten."

eindeutigen machen, dass wir die Fläche F_1 n_1-fach, die Fläche F_2 n_2-fach überdecken. Da die so entstehenden über F_1 und F_2 ausgebreiteten Flächen gleiches Geschlecht P haben müssen, so ist nach (1)

$$W_1 + n_1(2p_1 - 2) = W_2 + n_2(2p_2 - 2). \tag{2}$$

Hier bedeutet W_1 die Anzahl der Stellen P auf F_1, welchen zusammenfallende Stellen auf F_2 entsprechen, und zwar so, dass einem Umlauf um P eine Vertauschung der entsprechenden Stellen auf P_2 entspricht. Eine analoge Bedeutung besitzt W_2. Man erkennt in (2) die von Herrn Zeuthen gegebene Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier mehrdeutig auf einander bezogener algebraischen Gebilde.*) Unsere Ableitung der Relation zeigt zugleich unzweideutig, mit welchen Multiplicitäten diejenigen Punkte des einzelnen Gebildes zu zählen sind, denen auf dem anderen Gebilde zusammenfallende Punkte entsprechen.

6.

Ich wende mich jetzt zu unserem eigentlichen Gegenstande zurück. Es sei F eine Riemann'sche Fläche von beliebigem Geschlecht. (Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ werden also nicht ausgeschlossen.) Wir nehmen an, dass diese Fläche eine Gruppe von r eindeutigen Transformationen in sich besitze, die wir mit

$$S_1, S_2, \ldots S_r \tag{1}$$

bezeichnen. Die aus S_i und S_k zusammengesetzte Transformation $S_i S_k$ wollen wir auch mit S_{ik} bezeichnen, so dass ik wieder eine der Zahlen $1, 2, \ldots r$ bedeutet. S_1 sei die identische Transformation, also $S_{1i} = S_{i1} = S_i$. Die Stellen der Fläche ordnen sich nun in Gruppen zu je r an, wie

$$P_1, P_2, \ldots P_r, \tag{2}$$

welche dadurch erhalten werden, dass man eine willkürlich gewählte Stelle P_1 mit denjenigen Stellen zusammenfasst, welche aus ihr durch die Transformationen (1) hervorgehen. Die Gruppe (2) wird aus r getrennt liegenden Punkten bestehen, wenn P_1 bei keiner der Transformationen (1), ausser der Identität, festbleibt. Wenn jedoch P_1 bei k Transformationen (1) fest bleibt, so bilden diese für sich eine Gruppe und man erkennt hieraus leicht, dass in diesem Falle aus P_1 nur $\frac{r}{k}$ verschiedene Punkte hervorgehen, welche je k Punkte in sich vereinigen.

Wir betrachten nun die Classe der eindeutigen algebraischen Functionen der Fläche F. Ist z eine dieser Functionen und bedeuten

*) Mathem. Ann. Bd. 3, p. 150.

$s_1, s_2, \ldots s_r$ die Werthe von s an den Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$, so können wir die Summe

$$Z = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$$

als eine Function der Stelle P_1 ansehen. Als solche hat sie die Eigenschaften, erstens eine eindeutige algebraische Function auf F zu sein (also der betrachteten Classe anzugehören) und zweitens der Bedingung

$$Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_r$$

zu genügen, wo $Z_1, Z_2, \ldots Z_r$ die Werthe von Z in den Punkten irgend einer Gruppe bezeichnen. Da man noch über die Unendlichkeitspunkte von s verfügen kann, so leuchtet ein, dass es unendlich viele Functionen Z von diesen beiden Eigenschaften giebt. Die Gesammtheit der Functionen Z bildet wieder eine Classe von algebraischen Functionen, da Summe, Differenz, Product und Quotient zweier Functionen Z wieder eine ebensolche Function darstellt. Die Riemann'sche Fläche, auf welcher die Functionen Z die Gesammtheit der eindeutigen algebraischen Functionen des Ortes bilden, heisse Φ.*)

Die Fläche Φ ist nun derartig auf die Fläche F bezogen, dass jeder Stelle von F eine einzige Stelle von Φ, dagegen umgekehrt jeder Stelle von Φ r Stellen von F, nämlich die r Stellen einer Gruppe (2) entsprechen. Diejenigen Stellen der Fläche Φ, welchen Gruppen von weniger als r $\left(\text{also Gruppen von } \frac{r}{k}\right)$ Stellen auf der Fläche F entsprechen, wollen wir mit

$$a_1, a_2, \ldots a_w \tag{3}$$

bezeichnen. Wenn wir nun eine Stelle P, welche nicht zu den Stellen (3) gehört, sich auf der Fläche Φ in Bewegung setzen und einen die Stellen (3) vermeidenden geschlossenen Weg durchlaufen lassen, so werden die entsprechenden Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$ auf der Fläche F sich zugleich bewegen und es können sich schliesslich, wenn P die alte Lage wieder erreicht hat, $P_1, P_2, \ldots P_r$ nur untereinander vertauscht haben. Wenn hierbei P_1 in P_i übergeht, so geht P_k nothwendig in P_{ik} über. Denn um den Weg von P_k zu verfolgen, brauchen wir nur auf jeden Punkt des Weges von P_1 die Transformation S_k anzuwenden; durch diese Transformation geht aber P_i in P_{ik} über. Es erfahren also die Stellen $P_1, P_2, \ldots P_r$, wenn P einen geschlossenen Weg durchläuft, eine Vertauschung der Gestalt

$$\begin{pmatrix} P_1, & P_2, & \ldots & P_r \\ P_{i1}, & P_{i2}, & \ldots & P_{ir} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

*) Ist Z_0 eine bestimmte der Functionen Z, so kann man für Φ z. B. diejenige über der Z_0-Ebene ausgebreitete Fläche nehmen, welche die Verzweigung der Functionen Z in Bezug auf Z_0 darstellt.

Dies vorausgeschickt, möge jetzt Φ in der oben geschilderten Weise in die Fläche Φ'' zerschnitten werden. Ist π das Geschlecht von Φ, so geschieht die Zerschneidung durch $w + 2\pi$ Schnitte, welche wir (wie oben) mit

$$l_1, l_2, \ldots l_w, A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi \tag{5}$$

bezeichnen. Wir fixiren im Innern von Φ'' einen Punkt P', dem auf der Fläche F die Punkte $P_1', P_2', \ldots P_r'$ entsprechen mögen; ferner nehmen wir r übereinander liegende Exemplare (Blätter) Φ'' an, bezeichnen dieselben in irgend einer Reihenfolge mit denselben Buchstaben, wie die Transformationen (1), also mit

$$S_1, S_2, \ldots S_r$$

und ordnen dem Punkte P' des Blattes S_k den Punkt P_k' auf der Fläche F zu. Bewegt sich P' auf dem Blatte S_k nach P, so wird sich der Punkt P_k' auf F nach P_k bewegen und zwar wird die Endlage P_k dieselbe sein, auf welchem Wege auch P' nach P geführt wird. Für jede Stelle P erscheinen also die entsprechenden Punkte $P_1, P_2, \ldots P_r$ in bestimmter Weise den r Blättern $S_1, S_2, \ldots S_r$ zugeordnet. Wenn wir jetzt die Blätter $S_1, S_2, \ldots S_r$ längs der Schnitte (5) in geeigneter Weise verbinden, so erhalten wir eine über Φ r-blättrig ausgebreitete Fläche, welche eindeutig umkehrbar auf F bezogen ist und also mit F in dem Sinne identisch ist, als sie gerade so gut wie F als Träger der durch F dargestellten Classe von algebraischen Functionen angesehen werden kann. Was nun die Verbindung der Blätter angeht, so beachte man, dass bei einem von P beschriebenen geschlossenen Wege $P_1, P_2, \ldots P_r$ eine Vertauschung der Gestalt (4) erfahren. Es müssen also z. B. längs l_1 die Blätter so verbunden werden, dass man beim Uebertritt von dem negativen zum positiven Ufer von l_1 aus den Blättern

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots \quad S_r$$

bez. in die Blätter

$$S_i S_1, \; S_i S_2, \; \ldots \; S_i S_r$$

gelangt.

Jedem der Schnitte (5) ist also eine bestimmte Transformation S_i zugeordnet. Ist der Reihe nach für den Schnitt

$$\begin{matrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, & B_1, \ldots & A_\pi, & B_\pi, \\ S_i = T_1, & T_2, \ldots & T_w, & U_1, & V_1, \ldots & U_\pi, & V_\pi, \end{matrix}$$

wo also die T, U, V bestimmte der Transformationen (1) bezeichnen, so können wir die r-blättrig über Φ ausgebreitete Fläche F schematisch durch

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, & B_1, \ldots & A_\pi, & B_\pi \\ T_1, & T_2, \ldots & T_w, & U_1, & V_1, \ldots & U_\pi, & V_\pi \end{pmatrix} \tag{6}$$

charakterisiren. Die Transformationen T, U, V genügen den folgenden Bedingungen:

Erstens ist

$$(7)\quad T_1 T_2 \ldots T_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_\pi V_\pi U_\pi^{-1} V_\pi^{-1} = S_1 = 1.$$

Zweitens lässt sich die ganze Gruppe $S_1, S_2, \ldots S_r$ durch Combination der T, U, V erzeugen. Die erste Bedingung (7) sagt nichts Anderes aus, als dass der Punkt O, von welchem die Schnitte l, A, B auslaufen, kein Verzweigungspunkt ist. Die zweite Bedingung besagt, dass die r-blättrige Fläche F in sich zusammenhängt. Diese Betrachtung lehrt nun, dass man die allgemeinste Riemann'sche Fläche, welche eine Gruppe eindeutiger Transformationen in sich besitzt, auf folgendem Wege erhält:

Man bezeichne mit

$$S_1, S_2, \ldots S_r$$

irgend r Operationen, welche eine Gruppe bilden. Ferner seien

$$T_1, T_2, \ldots T_w, \quad U_1, V_1, \ldots U_\pi, V_\pi$$

irgend $w + 2\pi$ dieser Operationen, durch welche sich die ganze Gruppe erzeugen lässt und welche der Bedingung

$$T_1 T_2 \ldots T_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_\pi V_\pi U_\pi^{-1} V_\pi^{-1} = 1$$

genügen. Man nehme eine beliebige Riemann'sche Fläche Φ vom Geschlecht π, markire auf dieser irgend w Punkte $a_1, a_2, \ldots a_w$ und zerschneide dieselbe in der oben (Nr. 4) geschilderten Weise durch Schnitte $l_1, l_2, \ldots l_w$, $A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$ in eine einfach zusammenhängende Fläche Φ''. Endlich decke man r Exemplare der Fläche Φ'', welche man in irgend einer Reihenfolge mit

$$S_1, S_2, \ldots S_r$$

(also genau wie die gegebenen Operationen) bezeichnet, übereinander und verbinde dieselben längs der Schnitte l, A, B zu einer einzigen geschlossenen Fläche, wie es das Schema

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi \\ T_1, & T_2, \ldots & T_w, & U_1, V_1, \ldots U_\pi, V_\pi \end{pmatrix}$$

andeutet. Die auf diese Weise entstehenden Flächen umfassen alle Riemann'sche Flächen, welche eine Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzen.

Hierbei ist zu bemerken, dass das für F gegebene Schema folgende Bedeutung hat: An dem Schnitte l_1 sollen die r Blätter Φ'' so verbunden werden, dass man beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite des Schnittes aus den Blättern

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots \quad S_r$$

bez. in die Blätter

$$T_1 S_1, \; T_1 S_2, \; \ldots \; T_1 S_r$$

gelangt. Entsprechendes ist für die Schnitte $l_2, \ldots l_\omega, A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$ zu bemerken. Wenn nun feststeht, dass durch die obige Construction alle Flächen mit einer Gruppe von r eindeutigen Transformationen in sich erhalten werden, so erhebt sich jetzt umgekehrt die Frage, ob auch *jede* durch die Construction hergestellte Fläche eine Gruppe von r Transformationen in sich besitzt. Dass diese Frage zu bejahen ist, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Man fixire auf der r-blättrigen nach obiger Vorschrift hergestellten Fläche F irgend r übereinanderliegende Punkte und bezeichne sie wie die Blätter, in welchen sie liegen. Ordnet man nun den Punkten

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots \quad S_r$$

bez. die Punkte

$$S_1 S_i, \; S_2 S_i, \; \ldots \; S_r S_i$$

zu, wo S_i irgend eine der r Operationen bedeutet, so ist hierdurch eine eindeutige Transformation von F in sich bestimmt. Denn bei Fortsetzung dieser Zuordnung könnte eine Mehrdeutigkeit nur durch Ueberschreitung eines Schnittes entstehen. Eine solche Mehrdeutigkeit entsteht aber thatsächlich nicht, weil bei der Ueberschreitung von l_1 z. B. die ursprüngliche Zuordnung in

$$\begin{gathered} T_1 S_1, \quad T_1 S_2, \quad \ldots \quad T_1 S_r, \\ T_1 S_1 S_i, \; T_1 S_2 S_i, \; \ldots \; T_1 S_r S_i \end{gathered}$$

übergeht, welche ersichtlich mit der ursprünglichen identisch ist. Den r Operationen S_i entsprechend, besitzt also die Fläche r eindeutige Transformationen in sich. Da die Gruppe der r Operationen $S_1, S_2, \ldots S_r$ ebenso wie die Fläche Φ ganz willkürlich angenommen werden kann und die Operationen T, U, V dann noch in mannigfaltiger Weise gewählt werden können, so ergiebt sich beiläufig der Satz:

*Ist eine endliche Gruppe gegeben, so kann man auf mannigfaltige Weise eine Riemann'sche Fläche herstellen, welche eine zu der gegebenen Gruppe holoedrisch isomorphe Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzt.**)

Unsere Betrachtungen zeigen zugleich, wie man die allgemeinste derartige Fläche findet.

7.

Wir betrachten jetzt eine Riemann'sche Fläche F, welche nach den Angaben der vorigen Nummer r-blättrig über einer Fläche Φ

*) Die an die Untersuchungen von F. Klein (Math. Ann. Bde. 9—17) anknüpfenden Arbeiten von W. Dyck (Math. Ann, Bde. 17 und 20) über reguläre Riemann'sche Flächen bieten mannigfaltige Berührungspunkte mit den obigen Betrachtungen. Was den zuletzt angeführten Satz angeht, so vergleiche man den Satz von Dyck, Math. Ann. Bd. 20, p. 30.

vom Geschlecht π ausgebreitet ist. Wir wissen, dass F die allgemeinste Fläche mit einer Gruppe von r eindeutigen Transformationen in sich darstellt. Es sei unsere nächste Aufgabe, das Geschlecht von F zu berechnen. Bei einer Umkreisung des Punktes a_1 geht nun allgemein das Blatt S_i in das Blatt $T_1 S_i$ über. Ist daher k_1 die Ordnung der Transformation T_1, so hängen die Blätter bei a_1 in Cyklen von je k_1 Blättern zusammen, wie

$$(S_i,\ T_1 S_i,\ T_1^2 S_i,\ \ldots\ T_1^{k_1-1} S_i).$$

Der Punkt a_1 hat also als Verzweigungspunkt die Multiplicität

$$r - \frac{r}{k_1} = r\left(1 - \frac{1}{k_1}\right)$$

und ebenso haben $a_2, a_3, \ldots a_w$ bez. die Multiplicitäten

$$r\left(1 - \frac{1}{k_2}\right),\ r\left(1 - \frac{1}{k_3}\right),\ \ldots\ r\left(1 - \frac{1}{k_w}\right),$$

wenn $k_2, k_3, \ldots k_w$ die Ordnungen von $T_2, T_3, \ldots T_w$ bedeuten.

Nach Nr. 5 ist daher das Geschlecht p der Fläche F aus der Gleichung

$$(1)\quad \frac{2p-2}{r} = 2\pi - 2 + \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{k_w}\right)$$

zu berechnen. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Fläche F von einem Geschlecht $p > 1$ sei, und unter dieser Annahme die Gleichung (1) näher betrachten. Wir unterscheiden dabei drei Fälle, je nachdem $\pi \geqq 2$, $\pi = 1$, $\pi = 0$ ist.

Im ersten Falle $\pi \geqq 2$ lehrt die Gleichung (1), dass $\frac{2p-2}{r} \geqq 2$, also

$$(2)\qquad r \leqq p - 1$$

ist. Im zweiten Falle $\pi = 1$ kann w nicht $= 0$ sein, weil sonst nach Gleichung (1) auch $p = 1$ sein würde. Es ist daher

$$\frac{2p-2}{r} \geqq \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \geqq \frac{1}{2},$$

weil k_1 mindestens gleich 2 ist. Es kommt also jetzt

$$(3)\qquad r \leqq 4(p-1).$$

Im dritten Falle $\pi = 0$ haben wir nach (1)

$$(1')\quad \frac{2p-2}{r} = \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{k_w}\right) - 2$$

$$= w - 2 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \cdots - \frac{1}{k_w};$$

es muss daher w mindestens gleich 3 sein. Wir unterscheiden nun drei Unterfälle. Ist erstens $w \geqq 5$, so erhalten wir aus (1')

$$\frac{2p-2}{r} \geqq \frac{w}{2} - 2 \geqq \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2},$$

also

$$r \leqq 4(p-1). \tag{4}$$

Ist zweitens $w = 4$, also

$$\frac{2p-2}{r} = 2 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_4},$$

so haben wir, indem wir $k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \leqq k_4$ annehmen, folgende tabellarisch angeordnete Möglichkeiten:

(5)

k_1	k_2	k_3	k_4	$\frac{2p-2}{r}$	
>2	>2	>2	>2	$\geqq \frac{2}{3}$	$r \leqq 3(p-1)$
$=2$	>2	>2	>2	$\geqq \frac{1}{2}$	$r \leqq 4(p-1)$
$=2$	$=2$	>2	>2	$\geqq \frac{1}{3}$	$r \leqq 6(p-1)$
$=2$	$=2$	$=2$	>2	$\geqq \frac{1}{6}$	$r \leqq 12(p-1)$

Ist endlich drittens $w = 3$, also

$$\frac{2p-2}{r} = 1 - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3},$$

so haben wir, indem wir $k_1 \leqq k_2 \leqq k_3$ annehmen, folgende wiederum tabellarisch aufgeführte Möglichkeiten:

(6)

k_1	k_2	k_3	$\frac{2p-2}{r}$	
>3	>3	>3	$\geqq \frac{1}{4}$	$r \leqq 8(p-1)$
$=3$	>3	>3	$\geqq \frac{1}{6}$	$r \leqq 12(p-1)$
$=3$	3	>3	$\geqq \frac{1}{12}$	$r \leqq 24(p-1)$
$=2$	>4	>4	$\geqq \frac{1}{10}$	$r \leqq 20(p-1)$
$=2$	$=4$	>4	$\geqq \frac{1}{20}$	$r \leqq 40(p-1)$
$=2$	$=3$	>3	$\geqq \frac{1}{42}$	$r \leqq 84(p-1).$

Ein Blick auf die Ungleichungen (2), (3), (4), (5), (6) zeigt, dass r die Zahl $84(p-1)$ nicht übersteigen kann. Mit anderen Worten, es besteht der Satz:

„Die Anzahl der eindeutigen Transformationen in sich, welche eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ besitzen kann, beträgt im Maximum $84(p-1)$."

Zugleich lehrt unsere Discussion, dass das Maximum von $84(p-1)$ Transformationen nur für solche Flächen eintreten kann, welche über einer Fläche vom Geschlecht Null oder, was auf dasselbe hinauskommt, über der complexen Zahlenebene so ausgebreitet sind, dass die Blätter an einer Stelle zu je 2, an einer anderen Stelle zu je 3 und an einer dritten Stelle zu je 7 im Cyklus zusammenhängen. (Der letzte Fall der Tabelle (6)). Diese Flächen hängen ersichtlich auf's Engste mit der Theorie derjenigen Schwarz'schen s-Function zusammen, welche die Halbebene auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$, abbildet.*)

Für welche Werthe von p das Maximum $84(p-1)$ wirklich erreicht wird, habe ich nicht untersucht. Bemerkt sei nur noch, dass für $p = 3$ eine Fläche mit $84(p-1) = 168$ Transformationen in sich existirt; es ist die Fläche, welche zur Galois'schen Resolvente der Modulargleichung 7^{ter} Ordnung gehört, die zuerst von Herrn Klein betrachtet und ausführlich untersucht worden ist.**)

8.

Zur Erläuterung der in Nr. 6 gegebenen allgemeinen Construction der Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich mögen hier noch einige Beispiele folgen. Es sei zuerst

$$S_1, S_2, \ldots S_{60} \tag{1}$$

das System der geraden Vertauschungen von fünf Dingen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Greifen wir aus dem System (1) die folgenden Vertauschungen heraus

$$T_1 = (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad T_2 = (x_2 x_5 x_4), \quad T_3 = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5),$$

so lässt sich aus diesen die ganze Gruppe (1) erzeugen, und es ist

$$T_1 T_2 T_3 = 1.$$

Nehmen wir nun eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht Null, also am einfachsten die complexe Zahlenebene, in dieser drei beliebige Punkte a_1, a_2, a_3, die wir mit einem vierten Punkt O durch die Schnitte l_1, l_2, l_3 verbinden! Von der zerschnittenen Ebene decken wir 60 Exemplare, welche wir in irgend einer Reihenfolge mit

*) Vgl. Klein-Fricke: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" (Leipzig, 1890) die Figur pag. 109.

**) Mathematische Annalen Bd. 14, pag. 428. Siehe auch Capitel 6 des im vorigen Citat genannten Werkes.

$S_1, S_2, \ldots S_{60}$ bezeichnen, übereinander und verbinden dieselben zu der Fläche

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ T_1, & T_2, & T_3 \end{pmatrix}.$$

Die Verbindung geschieht nach der Massgabe, dass man beim Uebertritt vom negativen zum positiven Ufer der Linie l_i aus den Blättern

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots \quad S_{60}$$

bez. in die Blätter

$$T_i S_1, \; T_i S_2, \; \ldots \; T_i S_{60}$$

gelangen soll. Die so entstehende Fläche F besitzt eine Gruppe von 60 eindeutigen Transformationen in sich, welche zu der Gruppe (1) der geraden Vertauschungen holoedrisch-isomorph ist. Das Geschlecht p von F ergiebt sich aus Gleichung (1) in Nr. 7, indem man

$$r = 60, \quad \pi = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 5$$

setzt. Man erhält

$$\frac{2p-2}{60} = -2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = -\frac{1}{30},$$

also $p = 0$, ein Resultat, an welches sich die von Herrn Klein gegebene Theorie der Gleichungen fünften Grades anschliessen lässt.*)

Als ein anderes Beispiel nehmen wir das System

(2) $$S_1, S_2, \ldots S_{n!}$$

aller Vertauschungen von n Dingen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Wir wählen aus (2)

$$T_1 = (x_1 x_2), \quad T_2 = (x_n x_{n-1} \ldots x_2), \quad T_3 = (x_1 x_2 \ldots x_n),$$

welche die Bedingung $T_1 T_2 T_3 = 1$ erfüllen und ein System erzeugender Substitutionen bilden. Indem wir in der complexen Zahlenebene von einem Punkte O aus die Schnitte l_1, l_2, l_3 nach irgend drei Punkten a_1, a_2, a_3 legen, $n!$ Exemplare der zerschnittenen Ebene übereinanderdecken und endlich diese Exemplare zur Fläche

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}$$

vereinigen, erhalten wir eine Fläche mit $n!$ eindeutigen Transformationen in sich. Die letzteren bilden eine zur Gruppe der Vertauschungen von n Dingen isomorphe Gruppe. Für das Geschlecht p der Fläche F finden wir nach Nr. 7 (da $\pi = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = n-1$, $k_3 = n$ ist) den Werth

---

*) F. Klein: „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade." Leipzig 1884.

$$p = 1 + \frac{1}{4}(n-2)!\,(n^2 - 5n + 2) \tag{3}$$

also für $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$ der Reihe nach $p = 0, 0, 4, 49, \ldots$.

Die Fläche F gestattet eine sehr einfache analytische Darstellung. Man betrachte die Gleichung

$$s^n - \frac{n}{n-1} s^{n-1} = z. \tag{4}$$

Die Verzweigung von s in Bezug auf z wird durch eine n-blättrig über der z-Ebene ausgebreitete Fläche dargestellt. Die Blätter der Fläche hängen bei $z = \infty$ im Cyklus zusammen, bei $z = 0$ hängen $n-1$ Blätter im Cyklus zusammen, eines verläuft isolirt, endlich bei $z = \frac{-1}{n-1}$ findet eine einfache Verzweigung statt. Offenbar stellt daher $\left(\text{für } a_1 = -\frac{1}{n-1},\ a_2 = 0,\ a_3 = \infty\right)$ unsere Fläche F die Verzweigung der Galois'schen Resolvente von (4) dar, d. h. die Verzweigung der simultan betrachteten Wurzeln $s_1, s_2, \ldots s_n$ von (4) in Bezug auf z. Nun ist aber die einzelne Stelle P der Fläche F, wie man sich sofort überzeugt, schon durch die Verhältnisse der Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ festgelegt. Lassen wir daher P die Fläche F durchlaufen, so wird der Punkt

$$y_1 : y_2 : \cdots : y_n = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \cdots : \frac{1}{s_n}$$

eine eindeutig umkehrbar auf die Fläche F bezogene Curve beschreiben, wenn wir $y_1, y_2, \ldots y_n$ als homogene Coordinaten in einem Raume von $n-1$ Dimensionen deuten. Aus der Gestalt der Gleichung (4) folgt aber, dass diese Curve durch die folgenden $n-2$ Gleichungen definirt werden kann:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0, \\ y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{n-2} + y_2^{n-2} + \cdots + y_n^{n-2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Diese Gleichungen stellen also eine irreducible Curve dar, deren Geschlecht p durch die Gleichung (3) angegeben wird, und welche eine Gruppe von $n!$ eindeutigen Transformationen in sich besitzt, die zur Gruppe der Vertauschungen von n Dingen holoedrisch isomorph ist. Das letztere wird durch die Form der Gleichungen (5) bestätigt: die eindeutigen Transformationen der Curve sind keine anderen, wie die durch die Vertauschungen der $y_1, y_2, \ldots y_n$ definirten Collineationen des Raumes, in welchem unsere Curve liegt.

Das Beispiel der Curve (5) habe ich schon in dem letzten Paragraphen meiner Note über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, erwähnt. Ebenda habe ich als „Geschlecht" einer Gruppe das niedrigste Geschlecht bezeichnet,

bei welchem algebraische Gebilde mit einem zu der Gruppe holoedrisch isomorphen System von eindeutigen Transformationen existiren. Ich bemerke, dass die Betrachtungen der vorigen Nummern in jedem Falle das Geschlecht einer gegebenen Gruppe zu bestimmen gestatten. In der That, seien

$$S_1, S_2, \ldots S_r \tag{6}$$

die Operationen der gegebenen Gruppe, $T_1, T_2, \ldots T_{w-1}$ ein Theil derselben, welche zur Erzeugung der ganzen Gruppe ausreichen, endlich T_w die Operation, welche der Gleichung

$$T_1 T_2 \ldots T_{w-1} T_w = 1$$

genügt. Auf Grund der Operationen $T_1, T_2, \ldots T_w$ kann man nun über der complexen Zahlenebene eine r-blättrige Riemann'sche Fläche construiren, welche eine zu (6) holoedrisch isomorphe Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzt. Sei P das Geschlecht dieser Fläche. Um nun das Geschlecht der Gruppe (6) wirklich zu bestimmen, hat man alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\frac{2p-2}{r} = \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) + \cdots + (2\pi - 2), \tag{7}$$

welche den Bedingungen $p < P$, $k_1 \geqq 2$, $k_2 \geqq 2, \ldots, \pi \geqq 0$ genügen, aufzusuchen. Die Anzahl dieser Lösungen ist offenbar eine endliche. Jede einzelne Lösung ist weiter daraufhin zu untersuchen, ob ihr eine Fläche F entspricht, welche auf Grund der Operationen (6) nach den Vorschriften der Nr. 6 construirt ist. Wenn dies für keine Lösung der Fall ist, so ist P das Geschlecht der Gruppe. Im andern Falle giebt diejenige der Flächen F, welche das kleinste Geschlecht besitzt, zugleich das Geschlecht der Gruppe. Discutirt man in dieser Weise z. B. die Gruppe aller Vertauschungen bei fünf Dingen, so ergiebt sich für das Geschlecht dieser Gruppe der Werth $p = 4$.

III. Abschnitt.

9.

Besitzt eine Riemann'sche Fläche F, deren Geschlecht $p > 0$ ist, eine eindeutige Transformation S in sich, so entspricht derselben immer eine lineare Transformation der p überall endlichen Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$. Entspricht nämlich vermöge S der Stelle P die Stelle P' und bedeuten $u_1', u_2', \ldots u_p'$ die Werthe der überall endlichen Integrale an der Stelle P', so können wir diese Werthe auch als Functionen der Stelle P ansehen. Als solche sind sie überall endliche Functionen, welche sich bei einem geschlossenen Weg, den P durchläuft, um additive Constanten vermehren. Es stellen also $u_1', u_2', \ldots u_p'$ als Functionen

der Stelle P überall endliche Integrale vor. Es bestehen daher Gleichungen der Gestalt

$$(1)\quad u_i' = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \cdots + \alpha_{ip} u_p + \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \ldots p),$$

wo $u_1, u_2, \ldots u_p$ die Werthe der Integrale an der Stelle P und die Coefficienten α von der Stelle P unabhängige Grössen bedeuten. Es ist bequem, die Gleichungen (1) in differentieller Form zu schreiben:

$$(2)\quad du_i' = \alpha_{i1} du_1 + \alpha_{i2} du_2 + \cdots + \alpha_{ip} du_p, \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

und wir sagen dieser Schreibweise entsprechend:

„Jeder Transformation S der Fläche F in sich entspricht eine homogene lineare Transformation (2) der p Differentiale erster Gattung."

Eine Gruppe von r eindeutigen Transformationen der Fläche F in sich entspricht daher eine Gruppe von homogenen linearen Transformationen der p Differentiale erster Gattung. Und zwar sind beide Gruppen, sobald $p > 1$ ist, *holoedrisch* isomorph. Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Transformation

$$(3)\qquad du_i' = du_i \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

nur der identischen Transformation von F entsprechen kann. Ist nun S eine Transformation von F in sich, welcher die Transformation (3) der Differentiale 1. Gattung entspricht, so wird jedes Differential 1. Gattung, welches in P von der zweiten Ordnung verschwindet, zufolge (3) auch in P' von der zweiten Ordnung Null. Daher muss entweder P stets mit P' zusammenfallen, also S die identische Transformation sein, oder es muss die Fläche hyperelliptisch sein und S in der Zuordnung je zweier Punkte P, P' bestehen, in welchen die zweiwerthige Function der Fläche denselben Werth annimmt. Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, da bei dieser Zuordnung $du_i' = -du_i$ ist, während doch $du_i' = du_i$ sein soll.

Bei der Untersuchung einer Gruppe linearer Transformationen ist es eine erste fundamentale Aufgabe, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der einzelnen Transformation zu bestimmen. Wir wollen diese Aufgabe in dem hier vorliegenden Falle zu lösen versuchen. Es handelt sich also um folgende Frage:

„Gegeben ist eine (von der Identität verschiedene) eindeutige Transformation S der Riemann'schen Fläche F ($p > 1$) in sich. Welches sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für die entsprechende homogene lineare Transformation (2) der Differentiale 1. Gattung?" Diese Frage soll nun zunächst in eine andere für die Beantwortung bequemere Form gebracht werden. Bekanntlich lässt sich eine lineare homogene Transformation von endlicher Ordnung oder Periode n, indem man die ursprünglichen Variabeln durch geeignete lineare Verbindungen derselben ersetzt, immer auf eine solche Form

bringen, dass die Transformation in der Multiplication der Variabeln mit n^{ten} Einheitswurzeln besteht. Diese Einheitswurzeln sind dann die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Transformation. Wenn also S die Periode n besitzt, so können wir die p Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ so wählen, dass (2) die Gestalt

$$du_i' = \varepsilon_i du_i \quad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{4}$$

annimmt, wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ n^{te} Einheitswurzeln bedeuten. Unsere Frage lässt sich hiernach auch so formuliren:

Gegeben ist eine eindeutige Transformation S der Riemann'schen Fläche $F(p > 1)$ in sich, welche jedem Punkte P der Fläche F einen bestimmten anderen Punkt P' zuordnet und die Periode n besitzt. Gegeben ist ferner eine n^{te} Einheitswurzel ε. Wie viele linear unabhängige Integrale 1. Gattung u giebt es dann auf der Fläche F, welche der Bedingung

$$du' = \varepsilon du$$

genügen, wo u, u' die Werthe des Integrales in den Punkten P, P' bedeuten?

Die Zahl dieser linear unabhängigen Integrale giebt offenbar an, wie oft die Einheitswurzel ε als Wurzel der charakteristischen Gleichung der Transformation (2) auftritt.

10.

Wir betrachten die aus S entspringende Gruppe

$$S^0 = S_1, \quad S^1 = S_2, \quad S^2 = S_3, \ldots S^{n-1} = S_n \tag{1}$$

von eindeutigen Transformationen der Fläche F in sich. Vermöge der Transformationen (1) ordnen sich die Punkte von F in Gruppen zu je n

$$P_1, P_2, \ldots P_n \tag{2}$$

an derart, dass vermöge S jeder Punkt einer solchen Gruppe dem vorhergehenden, der erste Punkt dem letzten entspricht. Es finden nun hier ohne Weiteres die Betrachtungen der Nr. 6 Platz. Sei Φ die nach den Angaben jener Nummer hergestellte Fläche, welche $1 - n$-deutig auf F bezogen ist und zwar so, dass jedem Punkte von Φ die n Punkte einer bestimmten Gruppe (2) auf F entspricht. Seien ferner $a_1, a_2, \ldots a_w$ die Punkte auf Φ, deren zugehörige Gruppe (2) aus weniger als n (also aus $\frac{n}{k}$ je k-fach zu rechnenden) Punkten besteht, dann können wir die Fläche F n-blättrig über Φ ausbreiten und unter Beibehaltung der früheren Abkürzungen mit

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, & B_1, \ldots & A_\pi, & B_\pi \\ T_1, & T_2, \ldots & T_w, & U_1, & V_1, \ldots & U_\pi, & V_\pi \end{pmatrix} \tag{3}$$

bezeichnen. Hier sind die T, U, V sämmtlich Potenzen von S, etwa

$$(4)\quad T_1 = S^{\mu_1}, \ldots T_w = S^{\mu_w}, \quad U_1 = S^{\nu_1}, \quad V_1 = S^{\varrho_1}, \ldots U_\pi = S^{\nu_\pi}, \quad V_\pi = S^{\varrho_\pi}.$$

Die Relation (7) in Nr. 6 geht über in

$$T_1 T_2 \ldots T_w = 1,$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(5)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_w \equiv 0 \pmod{n}.$$

Untersuchen wir jetzt die zu bestimmenden überall endlichen Integrale u, indem wir sie als Function der Stelle auf der Fläche Φ auffassen! Offenbar ist u auf der Fläche Φ'' (welche durch die Schnitte l, A, B aus Φ entsteht) eindeutig und es erhält du beim Uebertritt von der negativen zur positiven Seite der Schnitte

$$l_1, l_2, \ldots l_w, \quad A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$$

bezüglich die Factoren

$$\varepsilon^{\mu_1}, \varepsilon^{\mu_2}, \ldots \varepsilon^{\mu_w}, \varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\varrho_1}, \ldots \varepsilon^{\nu_\pi}, \varepsilon^{\varrho_\pi}.^*)$$

Da diese Eigenschaften für u vollständig charakteristisch sind, so erkennen wir, dass sich unsere Frage auf die folgende reducirt:

Gegeben ist eine Riemann'sche Fläche Φ, welche durch die Schnitte l, A, B in eine einfach zusammenhängende Fläche Φ'' zerschnitten ist. Wie viele linear unabhängige überall endliche Functionen u giebt es, welche auf Φ'' eindeutig sind und die Eigenschaft besitzen, dass das Differential du beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite der Schnitte

$$l_1, l_2, \ldots l_w, \quad A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$$

bezüglich die gegebenen Factoren

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w, \quad \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_\pi, \beta_\pi$$

erhalten?

Die gegebenen Factoren sind n^{te} Einheitswurzeln, zwischen welchen (nach 5) die Beziehung

$$(6)\qquad \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_w = 1$$

besteht.

---

*) D. h. Sind u^+ und u^- die Werthe, welche die auf Φ'' eindeutig ausgebreitete Function u in gegenüberliegenden Punkten des Schnittes l_1 besitzt, so ist längs des ganzen Schnittes l_1

$$u^+ = \varepsilon^{\mu_1} \cdot u^- + \text{const.}$$

Entsprechend für die anderen Schnitte.

11.

Unsere Frage führt also auf die Bestimmung solcher Functionen des Ortes einer Riemann'schen Fläche Φ, welche sich bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges bis auf eine multiplicative Constante reproduciren. Die Theorie dieser Functionen und ihrer Integrale bildet eine Verallgemeinerung der Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, welch' letztere dem Fall entspricht, in welchem die multiplicativen Constanten sämmtlich gleich 1 sind. Eine eingehende Untersuchung der in Rede stehenden Functionen gedenke ich demnächst zu veröffentlichen. Hier beschränke ich mich darauf, diejenigen Sätze anzugeben, welche für den vorliegenden Zweck erforderlich sind. Zuvor bemerke ich noch, dass der specielle Fall, in welchem die zu untersuchenden Functionen auf der Fläche Φ unverzweigt sind, schon mehrfach behandelt ist. Bereits Riemann hat solche Functionen in Nr. 26 seiner „Theorie der Abel'schen Functionen" betrachtet.*) (Die dort eingeführte Beschränkung, dass die multiplicativen Constanten Einheitswurzeln seien, ist unwesentlich.) Sodann hat Herr Prym im 70. Bande von Crelle's Journal einige Sätze über die Bestimmung dieser Functionen aus ihren Periodicitätseigenschaften ohne Beweis mitgetheilt. Endlich ist die Preisarbeit „Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques" (Acta mathematica, Bd. 13) von Herrn Appell zu erwähnen, deren erster und zweiter Theil sich auf dieselben Functionen beziehen.**) Ich will nun zunächst die zu betrachtenden Functionen genau definiren. Es sei Φ eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht π, ferner

$$a_1, a_2, \ldots a_w$$

willkürlich auf Φ angenommene Punkte. Wir zerschneiden Φ durch die Schnitte

$$l_1, l_2, \ldots l_w, \quad A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$$

in die einfach zusammenhängende Fläche Φ''. Die Functionen f des Ortes auf Φ, welche wir betrachten wollen, sind dann durch folgende Eigenschaften charakterisirt:

1) Verzweigungspunkte von f finden sich nur unter den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_w$, so dass die einzelnen Zweige von f auf der zerschnittenen Fläche Φ'' eindeutig sind.

*) Man sehe auch die interessante (klein gedruckte) Bemerkung auf pag. 364 der gesammelten Werke von Riemann.

**) Die Untersuchungen Appell's lassen sich durch Einführung des oben gewählten Schnittsystems vereinfachen. Es kommen dann nämlich alle auf die Schnitte c bezüglichen Betrachtungen in Wegfall.

2) Die Function f besitzt, abgesehen von den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_w$, keine anderen singulären Punkte als Pole.

3) In der Umgebung des Punktes a_i bleibt

$$t^{-\delta_i} \cdot f$$

endlich, eindeutig und von Null verschieden, wenn t eine im Punkte a_i von der ersten Ordnung verschwindende Function und δ_i eine passend gewählte Constante bedeutet.

4) Jeder auf Φ'' eindeutig ausgebreitete Zweig der Function f erhält beim Uebertritt von der negativen zur positiven Seite eines der Schnitte

$$l_1, l_2, \ldots l_w, \quad A_1, B_1, \ldots A_\pi, B_\pi$$

bezüglich die gegebenen Factoren

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w, \quad \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_\pi, \beta_\pi.$$

Das System aller Functionen f, welches diesen Bedingungen genügt, bezeichnen wir in Riemann'scher Weise mit

$$f = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots & A_\pi, & B_\pi \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots & \gamma_w, & \alpha_1, & \beta_1, & \ldots & \alpha_\pi, & \beta_\pi \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Da in der Umgebung des Punktes a_i die Entwicklung von f die Gestalt

$$f = t^{\delta_i}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) \tag{2}$$

besitzen soll, so ist klar, dass

$$\gamma_1 = e^{2\pi i \delta_1}, \quad \gamma_2 = e^{2\pi i \delta_2}, \quad \ldots \quad \gamma_w = e^{2\pi i \delta_w} \tag{3}$$

sein muss. Betrachten wir nun das in positivem Sinne durch die Begrenzung von Φ'' erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \lg f,$$

so ist dasselbe gleich $N - U$, wo N die Zahl der Null-, U die Zahl der Unendlichkeitsstellen von f bedeutet. Andererseits reducirt sich jenes Integral auf diejenigen Theilintegrale, welche um die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_w$ in negativem Sinne herumführen. Die letzteren Theilintegrale besitzen nach (2) die Werthe $-\delta_1, -\delta_2, \ldots, -\delta_w$. Es ist also

$$U = N + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_w. \tag{4}$$

Hieraus geht hervor, dass $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_w$ nothwendig eine ganze Zahl und folglich

$$\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_w = 1 \tag{5}$$

ist.*) Die Factoren γ, α, β dürfen also nicht vollkommen willkürlich

*) Dasselbe folgt auch durch Betrachtung eines Umlaufs um den Punkt O, von welchem die Schnitte l, A, B ausgehen.

gewählt werden, sondern müssen der Bedingung (5) genügen. Ausserdem darf natürlich keiner der Factoren gleich Null sein. Es findet aber keine weitere Bedingung für diese Factoren statt. In der That besteht der Satz:

Zu jedem Factorensystem

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_w, \quad \alpha_1, \beta_1, \dots \alpha_\pi, \beta_\pi,$$

welches den Bedingungen $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_w = 1$ *und* $\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_\pi\beta_\pi \neq 0$ *genügt, übrigens aber ganz beliebig gewählt ist, gehört stets ein System von Functionen*

$$f = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots & l_w, & A_1, B_1, & \dots & A_\pi, B_\pi \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \dots & \gamma_w, & \alpha_1, \beta_1, & \dots & \alpha_\pi, \beta_\pi \end{pmatrix}.$$

Man kann nämlich stets auf mannigfaltige Weise eine Summe Σ von Abel'schen Integralen dritter Gattung bilden, so dass

$$f = e^{\Sigma} \tag{6}$$

eine alle erforderlichen Eigenschaften besitzende Function darstellt. Man erkennt auch leicht, dass durch den Ausdruck (6) die allgemeinste Function des Systems dargestellt wird.*)

12.

Zu jedem Functionensystem

$$\begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots & l_w, & A_1, B_1, & \dots & A_\pi, B_\pi \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \dots & \gamma_w, & \alpha_1, \beta_1, & \dots & \alpha_\pi, \beta_\pi \end{pmatrix} \tag{1}$$

gehört ein System von Integralfunctionen, welches durch die Integrale

$$\int f\, dz$$

gebildet wird. Dabei bedeutet f irgend eine Function des Systems (1) und z eine eindeutige algebraische Function oder ein Abel'sches Integral der Fläche Φ.

Ich will hier nur die überall endlichen unter diesen Integralfunctionen näher betrachten. Es handelt sich vor Allem darum (vgl. Nr. 10), die Zahl der linear unabhängigen dieser Functionen zu bestimmen. Hierbei werde ich die Multiplicatoren je in folgende Form setzen:

---

*) Ich bemerke hier ausdrücklich, dass das Geschlecht π der Fläche Φ beliebig angenommen wird. Es ist also der Fall $\pi = 0$ nicht ausgeschlossen. In diesem Falle kommen nur die Schnitte A, B in Fortfall. Die Zahl w darf man stets positiv voraussetzen, da man immer beliebig viele Schnitte l aufnehmen kann, denen man den Factor $\gamma = 1$ zuordnet, ohne dadurch das Functionssystem f zu ändern.

$$(2) \qquad \gamma_1 = e^{-2\pi i x_1}, \ \gamma_2 = e^{-2\pi i x_2}, \ \ldots \gamma_w = e^{-2\pi i x_w},$$

wo die Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_w$ durch die Festsetzung unzweideutig bestimmt sind, dass ihre reellen Bestandtheile zwischen 0 und 1 liegen sollen, die obere Grenze 1 ausgeschlossen. Es sei nun v eine der überallendlichen Integralfunctionen, ferner P eine Stelle der Fläche Φ und t eine in P von der ersten Ordnung verschwindende Function. Gehört nun P nicht zu den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_w$, so lautet die Entwicklung von v an der Stelle P

$$(3) \qquad v = c + c' t^r + c'' t^{r+1} + \cdots \quad (c' \neq 0).$$

Wir sagen dann (genau wie für die eindeutigen algebraischen Functionen und ihre Integrale), dass die Stelle P eine $(r-1)$-fach zu rechnende Nullstelle von dv sei.

Fällt aber P mit a_i zusammen, so haben wir eine Entwicklung der Gestalt

$$(4) \qquad v = c + t^{-x_i+r}(c' + c'' + \cdots) \quad (c' \neq 0)$$

und wir wollen dann a_i als eine $(r-1)$-fache Nullstelle von dv rechnen. Die Zahlen r in (3) und (4) sind positive ganze Zahlen, weil v überall endlich sein soll. Dies festgesetzt, beweisen wir zunächst den Satz:

„Die Gesammtzahl der Nullstellen des Differentials dv beträgt

$$2\pi - 2 + x_1 + x_2 + \cdots + x_w".$$

In der That, sei s eine eindeutige algebraische Function auf Φ, welche m Mal unendlich wird. Dann ist $\frac{dv}{ds}$ eine Function f, auf die wir die Gleichung (4) von Nr. 1 anwenden können. Nun wird $\frac{dv}{ds}$ unendlich nur an den Nullstellen von ds, deren es bekanntlich $2m+2\pi-2$ giebt. Ferner wird $\frac{dv}{ds}$ an den m Unendlichkeitsstellen von s je von der zweiten Ordnung Null und an jeder von den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_w$ verschiedenen Nullstelle von dv so oft Null, als dieselbe nach unserer Festsetzung zu rechnen ist.

An der Stelle a_i lautet die Entwicklung von $\frac{dv}{ds}$

$$\frac{dv}{ds} = t^{-x_i+(r-1)}(c_0' + \cdots),$$

wenn wir annehmen, was offenbar gestattet ist, dass die Stellen a_i nicht zu den Nullstellen von ds und ebenso wenig zu den Unendlichkeitsstellen von s gehören.

Daher giebt die Gleichung (4) von Nr. 11

$$2m + 2\pi - 2 = 2m + \sum(r-1) - x_1 - x_2 - \cdots - x_w,$$

woraus die Richtigkeit unseres Satzes hervorgeht. Wir ziehen aus

diesem Satze noch eine Folgerung. Da die Anzahl der Nullstellen von dv nicht negativ werden kann, so zeigt unser Satz, dass in den Fällen

$$\pi = 0,\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 0$$

und

$$\pi = 0,\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 1$$

keine überall endliche Integralfunction v existiren kann.

Wir wollen nunmehr zeigen, wie man alle Integralfunctionen v bestimmen kann unter der Voraussetzung, dass man eine dieser Functionen kennt.

Es sei v_0 diese eine Integralfunction, welche wir als bekannt voraussetzen. Ist dann v eine beliebige der Integralfunctionen, so wird offenbar

$$\frac{dv}{dv_0} = Z \tag{5}$$

eine eindeutige algebraische Function der Fläche sein, welche nur an den $2\pi - 2 + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w$ Nullstellen von dv_0 unendlich werden kann. Ist umgekehrt Z eine derartige Function, so wird

$$v = \int Z\, dv_0 \tag{6}$$

eine Integralfunction sein. Nun giebt es aber nach dem Riemann-Roch'schen Satze genau

$$2\pi - 2 + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w - \pi + 1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w + \pi - 1$$

linear unabhängige Functionen Z, wenn wir von einem sogleich näher zu betrachtenden Ausnahmefall absehen. Es muss also ebenso viele linear unabhängige Integralfunctionen v geben, welche sämmtlich nach Formel (6) aus der einen v_0 abgeleitet werden können.

Der erwähnte Ausnahmefall tritt ein, wenn die Nullstellen von dv_0 zugleich die Nullstellen eines Differentials erster Gattung du sind. Dies kann nur dann stattfinden, wenn

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 0,$$

also auch die reellen Bestandtheile von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_w$ sämmtlich Null und daher die Factoren $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w$ sämmtlich reell sind. Die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung, welche in den Nullstellen von dv_0 verschwinden, kann nur gleich 1 sein, weil die Anzahl dieser Stellen $2\pi - 2$ beträgt. Die oben angegebene Zahl ist dann also zu ersetzen durch

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w + \pi = \pi.$$

Um diesen Ausnahmefall noch näher zu charakterisiren, betrachten wir die Function $\frac{dv_0}{du}$. Dieselbe gehört zu dem Functionssysteme f; sie wird nirgends Null oder unendlich, ausgenommen etwa an den Stellen $a_1, \ldots a_w$, wo ihr Verhalten durch die Entwicklung

$$\frac{dv_0}{du} = t^{-\varkappa_i}(c_1 + \cdots) \quad \text{(an der Stelle } a_i\text{)},$$

angezeigt wird. Wir schliessen hieraus, dass $\log \frac{dv_0}{du}$ ein Integral 3. Gattung ist, welches an der Stelle a_i wie $-\varkappa_i \log t$ unstetig wird. Bezeichnen wir daher mit Π_{a,a_i} ein Integral 3. Gattung, welches an der willkürlich gewählten Stelle a wie $\log t$, an der Stelle a_i wie $-\log t$ unstetig wird, so ist

$$\log \frac{dv_0}{du} - \varkappa_1 \Pi_{a,a_1} - \varkappa_2 \Pi_{a,a_2} - \cdots - \varkappa_w \Pi_{a,a_w} = u_1$$

ein Integral erster Gattung (wenn wir eine Constante unter den Begriff eines Integrals 1. Gattung einschliessen). Daher kommt

$$\frac{dv_0}{du} = \mathrm{E}, \tag{7}$$

unter E den Ausdruck

$$\mathrm{E} = e^{\varkappa_1 \Pi_{a,a_1} + \varkappa_2 \Pi_{a,a_2} + \cdots + \varkappa_w \Pi_{a,a_w} + u_1} \tag{8}$$

verstanden. Da umgekehrt die π in der Form $\int \mathrm{E}\, du$ enthaltenen linear unabhängigen Integralfunctionen überall endlich sind, so können wir folgenden Satz aussprechen:

„Der Ausnahmefall tritt stets und nur dann ein, wenn das Factorensystem γ, α, β übereinstimmt mit den Factoren, welche ein Ausdruck E *der Gestalt* (8) *besitzt, in welchem $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_w$ rein imaginäre Grössen bedeuten.“*

13.

Es erübrigt noch zu untersuchen, in welchen Fällen mindestens eine überall endliche Integralfunction v existirt. Sei f irgend eine Function des Systems (1) (Nr. 12), z eine eindeutige algebraische Function der Fläche Φ. Unter der Annahme, dass v eine überall endliche Integralfunction sei, betrachten wir den Quotienten

$$\frac{dv}{f\,dz} = Z. \tag{1}$$

Derselbe stellt eine eindeutige algebraische Function der Fläche Φ vor, welche, abgesehen von den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_w$, nur unstetig werden kann

1) an den N Nullstellen von f,

2) an den $2m + 2\pi - 2$ Nullstellen von dz.

An der Stelle a_i ist

$$f = t^{\delta_i}(c_0 + c_1 t + \cdots),$$

und wir dürfen voraussetzen, dass die ganzen Zahlen $\delta_i + \varkappa_i$ positiv

sind, da wir andernfalls f mit einer an den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_w$ verschwindenden eindeutigen algebraischen Function z_1 multipliciren, also $z_1 \cdot f$ an Stelle von f setzen können.

Es wird dann Z

3) an der Stelle a_i unendlich höchstens von der Ordnung $\delta_i + \varkappa_i$. Ausserdem verschwindet Z

4) an den m Unendlichkeitsstellen von z je von der zweiten Ordnung, und an den U Unendlichkeitsstellen von f.

Umgekehrt: Ist Z eine eindeutige algebraische Function, welche den Bedingungen 1), 2), 3), 4) genügt, so wird

$$v = \int Z f \, dz$$

eine überall endliche Integralfunction v darstellen.

Nun enthalten die Functionen Z, welche den Bedingungen 1), 2), 3) genügen, nach dem Riemann-Roch'schen Satze

$N + 2m + 2\pi - 2 + (\delta_1 + \varkappa_1) + (\delta_2 + \varkappa_2) + \cdots + (\delta_w + \varkappa_w) - \pi + 1$

willkürliche Constante linear und homogen. Für diese Constante liefern die Bedingungen 4) $2m + U$ lineare homogene Bedingungsgleichungen.

Daher enthält die allgemeinste Function Z, welche allen Bedingungen 1)—4) genügt, mindestens noch

$N + 2m + 2\pi - 2 + (\delta_1 + \varkappa_1) + \cdots + (\delta_w + \varkappa_w) - \pi + 1 - (2m + U)$

willkürliche Constante linear und homogen. Diese Zahl reducirt sich aber nach Gleichung (4) in Nr. 11 auf

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w + \pi - 1 \tag{2}$$

und ebenso viele überall endliche Integralfunctionen v giebt es also *mindestens*. Sobald nun die Zahl (2) grösser als Null ist, treten die Betrachtungen der vorigen Nummer in Kraft. Die einzigen Fälle, in welchen jene Zahl nicht grösser als Null ist, sind

$$\pi = 1, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 0,$$
$$\pi = 0, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 1,$$
$$\pi = 0, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_w = 0.$$

Der erste dieser Fälle subsumirt sich unter den pag. 435 besprochenen Ausnahmefall. In den beiden letzten Fällen giebt es keine überall endliche Integralfunction v, wie wir schon oben bemerkt haben. Indem wir dieses berücksichtigen, gelangen wir zu folgendem allgemein gültigen Satze, welcher in allen Fällen die Anzahl der überall endlichen Integralfunctionen, welche zu einem Functionensysteme

$$f = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, & B_1, \ldots & A_\pi, & B_\pi \\ \gamma_1, & \gamma_2, \ldots & \gamma_w, & \alpha_1, & \beta_1, \ldots & \alpha_\pi, & \beta_\pi \end{pmatrix}$$

gehören, bestimmen lehrt:

Man setze

$$\gamma_1 = e^{-2\pi i x_1},\ \gamma_2 = e^{-2\pi i x_2},\ \ldots\ \gamma_w = e^{-2\pi i x_w}, \tag{3}$$

wo die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_w$ *durch die Forderung eindeutig bestimmt sind, dass ihre reellen Bestandtheile kleiner als* 1 *und nicht negativ sein sollen**).

Dann beträgt die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Integralfunctionen v

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_w + \pi - 1. \tag{4}$$

Ausgenommen ist nur der eine Fall, in welchem die Multiplicatoren γ *sämmtlich reell, also* $x_1, x_2, \ldots x_w$ *rein imaginär und*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_w = 0$$

ist, und zugleich die Factoren α, β, γ *übereinstimmen mit den Factoren eines Ausdrucks der Gestalt*

$$E = e^{x_1 \Pi_{a,a_1} + x_2 \Pi_{a,a_2} + \cdots + x_w \Pi_{a,a_w} + u}.$$

In diesem Falle ist die Anzahl (4) *zu ersetzen durch die Anzahl*

$$\pi. \tag{5}$$

Ich bemerke noch, dass Π_{a,a_1} ein Integral dritter Gattung bedeutet, welches bei a unstetig wird wie $\log t$, bei a_1 unstetig wie $-\log t$. Wenn Φ das Geschlecht $\pi = 0$ besitzt und s diejenige (bis auf eine lineare Substitution bestimmte) Function bezeichnet, welche jeden Werth nur an einer Stelle annimmt, wird also $\Pi_{a,a_1} = \log \frac{s - s_a}{s - s_{a_1}} + \text{const.}$ sein, wo s_a, s_{a_1} die Werthe von s an den Stellen a und a_1 bedeuten. Die im Exponenten von e auftretende Grösse u bezeichnet ein überall endliches Integral, wobei indessen auch eine Constante als ein solches anzusehen ist. Im Falle $\pi = 0$ wird u stets eine Constante sein.

Für den speciellen Fall, in welchem die Factoren γ sämmtlich gleich 1 sind, in welchem es sich also um das Functionensystem

$$f = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots & A_\pi, & B_\pi \\ \alpha_1, & \beta_1, & \ldots & \alpha_\pi, & \beta_\pi \end{pmatrix}$$

handelt, ergiebt unser Satz ein von Herrn Appell (l. c. pag. 25, 26) gefundenes Resultat.

14.

Wir haben jetzt alle Mittel, um die in Nr. 10 aufgeworfene Frage zu beantworten. Es handelte sich dort um die Bestimmung der Anzahl

*) Es kann wohl kein Missverständniss herbeiführen, dass in den Formeln (3) π die Ludolph'sche Zahl bedeutet, während andererseits in den Formeln (4) und (5) wie überall in diesen Betrachtungen π das Geschlecht der Riemann'schen Fläche Φ bezeichnet.

der linear unabhängigen überall endlichen Integralfunctionen des Systemes

$$f = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots & l_w, & A_1, & B_1, & \dots & A_\pi, & B_\pi \\ \varepsilon^{\mu_1}, & \varepsilon^{\mu_2}, & \dots & \varepsilon^{\mu_w}, & \varepsilon^{\nu_1}, & \varepsilon^{\varrho_1}, & \dots & \varepsilon^{\nu_\pi}, & \varepsilon^{\varrho_\pi} \end{pmatrix},$$

wobei ε eine n^{te} Einheitswurzel bezeichnet. Wir setzen

$$\varepsilon = e^{-2\pi i \cdot \frac{k}{n}}. \tag{1}$$

wo k eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \dots n-1$ bedeutet. Dann wird

$$\gamma_1 = e^{-2i\pi\frac{k\mu_1}{n}}, \quad \gamma_2 = e^{-2i\pi\frac{k\mu_2}{n}}, \dots \gamma_w = e^{-2i\pi\frac{k\mu_w}{n}}$$

und daher kommt,

$$\varkappa_1 = \frac{[k\mu_1]}{n}, \ \varkappa_2 = \frac{[k\mu_2]}{n}, \dots \varkappa_w = \frac{[k\mu_w]}{n},$$

wenn allgemein mit $[k\mu_i]$ der kleinste nicht negative Rest von $k\mu_i (\mathrm{mod.}\, n)$ bezeichnet wird. Die Anzahl der linear unabhängigen Integralfunctionen beträgt also

$$A_k = \frac{[k\mu_1] + [k\mu_2] + \cdots + [k\mu_w]}{n} + \pi - 1, \tag{2}$$

wenn wir zunächst von dem Ausnahmefall absehen.

Der Ausnahmefall tritt nur ein, wenn

1) die reellen Bestandtheile von $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_w$ verschwinden, also da $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_w$ hier reelle Zahlen sind, wenn $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \cdots = \varkappa_w = 0$, folglich $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_w = 1$ ist,

und wenn

2) die Factoren γ, α, β übereinstimmen mit den Factoren eines Ausdrucks e^u, wo u ein überall endliches Integral der Fläche Φ bezeichnet. Da aber γ, α, β n^{te} Einheitswurzeln sind, kann dies nur stattfinden, wenn u eine Constante ist. Denn e^{nu} ist eine überall endliche eindeutige algebraische Function der Fläche Φ. Ist aber e^u eine Constante, so sind die Factoren, welche e^u beim Ueberschreiten eines Querschnitts annimmt, sämmtlich gleich 1. Folglich tritt der Ausnahmefall nur ein, wenn die Factoren γ, α, β sämmtlich gleich 1 sind, wenn es sich also um die überall endlichen Integrale der Fläche Φ handelt.

Für diese Integrale ist die Einheitswurzel $\varepsilon = 1$, folglich $k = 0$ und die Formel (2) erleidet also nur im Falle $k = 0$ eine Abänderung. Sie ist dann zu ersetzen durch

$$A_0 = \pi. \tag{3}$$

15.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung der Fläche F zurück, bezeichnen wie in Nr. 10 mit S die eindeutige Transformation von der Periode n, welche die Fläche F zulässt, und mit

$$P_1, P_2, \ldots P_n \tag{1}$$

die Gruppe von n Punkten, welche aus einem willkürlich gewählten Punkt P_1 der Fläche F vermöge der Transformation S hervorgehen.

Die Punktgruppen (1) sind auf die Stellen der Fläche Φ eindeutig umkehrbar bezogen und die Fläche F war dem entsprechend darstellbar in Gestalt einer n-blättrig über Φ ausgebreiteten Fläche:

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, \ldots & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots A_\pi, & B_\pi \\ T_1, & T_2, \ldots & T_w, & U_1, & V_1, & \ldots U_\pi, & V_\pi \end{pmatrix}.$$

Der Punkt a_i der Fläche Φ, nach welchem der Schnitt l_i läuft, ist einer derjenigen Punkte, denen auf der Fläche F eine Gruppe (1) von $\frac{n}{k_i}$ je k_i-fach zu zählenden Punkten entspricht. Der Substitution $T_i = S^{\mu_i}$ entsprechend, hängen nun die mit $S_1, S_2, \ldots S_n$ bezeichneten Blätter der Fläche F an der Stelle a_i so zusammen, dass bei einem Umlauf um a_i allgemein S_k in $S_{k+\mu_i}$ übergeht, wo die Indices (mod. n) zu nehmen sind. Bestimmt man hiernach die Zahl der Blätter, welche bei a_i, je im Cyklus zusammenhängen — eine Zahl, die offenbar mit k_i identisch ist — so erhält man den Satz:

„Die Zahl k_i ist die kleinste positive Lösung der Congruenz

$$k_i \mu_i \equiv 0 \text{ (mod. } n).“$$

Die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Integrale u der Fläche F, welche der Bedingung

$$du' = \varepsilon\, du$$

genügen, wo u, u' die Werthe des Integrals an den Stellen P_1, P_2 und

$$\varepsilon = e^{-2i\pi\frac{k}{n}}$$

eine gegebene n^{te} Einheitswurzel bedeuten, beträgt nun nach der vorigen Nummer

$$\mathrm{A}_k = \frac{[k\mu_1] + [k\mu_2] + \cdots + [k\mu_w]}{n} + \pi - 1, \tag{2}$$

wenn k einen der Werthe $1, 2, \ldots n-1$ besitzt, dagegen

$$\mathrm{A}_0 = \pi, \tag{3}$$

wenn $k = 0$, also $\varepsilon = 1$ ist.

Die Gesammtzahl der Integrale

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}$$

muss gleich p sein und wir wollen zum Schluss zeigen, dass diese Thatsache mit den für die Zahlen A gefundenen Werthen (2) und (3) im Einklang steht.

Das Zeichen $[r]$, welches in (2) auftritt, bedeutete den kleinsten nicht negativen Rest der Zahl r nach dem Modul n. Hieraus geht unmittelbar hervor, dass

(4) $[r] = [r']$, für $r \equiv r' \pmod{n}$,

(5) $[r] = n - [r']$, für $r \equiv -r' \pmod{n}$, wenn zugleich r nicht $\equiv 0 \pmod{n}$.

Ist $r \equiv 0 \pmod{n}$, so wird nach Definition $[r] = 0$.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die Summe

$$(6) \qquad A_k + A_{n-k} = 2(\pi - 1) + \frac{[k\mu_1] + \cdots + [k\mu_w]}{n} + \frac{[(n-k)\mu_1] + \cdots + [(n-k)\mu_w]}{n},$$

wo k eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ bedeutet. Der Theil

$$\frac{[k\mu_1] + [(n-k)\mu_1]}{n}$$

dieser Summe ist nach (5) gleich 1, ausgenommen den Fall, wo $k\mu$ durch n theilbar ist, in welchem jener Theil gleich Null ist. Nun ist aber

$$k\mu_1 \equiv 0 \pmod{n}$$

dann und nur dann, wenn k durch k_1 theilbar ist, denn nach dem oben Bemerkten ist k_1 die kleinste positive Lösung der Congruenz $k_1\mu_1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Indem man die entsprechende Ueberlegung für $\frac{[k\mu_i] + [(n-k)\mu_i]}{n}$. anstellt, erkennt man, dass

$$(7) \qquad A_k + A_{n-k} = 2(\pi - 1) + w - D_k$$

ist, wo D_k angiebt, wie viele der Zahlen

$$k_1, k_2, \ldots k_w$$

in die Zahl k aufgehen.*)

*) Ist n eine Primzahl, so sind die Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_w$ sämmtlich gleich n, daher $D_k = 0$ und die Formel (7) geht über in $A_k + A_{n-k} = 2(\pi - 1) + w$. Die letztere Gleichung habe ich auf ganz anderem Wege in der Arbeit „über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen" (Nr. 6) erhalten.

Nun ist

$$(8)\quad A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}=A_0+\frac{1}{2}\sum_1^{n-1}{}^k(A_k+A_{n-k})$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\sum_1^{n-1}{}^k[(2\pi-2)+w-D_k]$$

$$=\pi+(n-1)(\pi-1)+\frac{1}{2}(n-1)w-\frac{1}{2}\sum_1^{n-1}{}^kD_k.$$

Gemäss der Bedeutung von D_k finden wir den Werth von $\sum D_k$, wenn wir der Reihe nach die Anzahl der Glieder in der Zahlenreihe

$$(9)\qquad 1, 2, 3, \ldots n-1$$

bestimmen, welche durch k_1, bez. k_2 ... bez. k_w theilbar sind, und alle diese Anzahlen addiren. In der Reihe (9) giebt es aber $\frac{n}{k_i}-1$ Zahlen, welche durch k_i theilbar sind, nämlich die Zahlen

$$k_i,\ 2k_i,\ \ldots\left(\frac{n}{k_i}-1\right)k_i.$$

Folglich ist

$$\sum_1^{n-1}{}^kD_k=\frac{n}{k_1}+\frac{n}{k_2}+\cdots+\frac{n}{k_w}-w.$$

Tragen wir diesen Werth in (8) ein, so ergiebt sich nach leichter Umformung

$$(10)\qquad A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}$$

$$=1+n(\pi-1)+\frac{1}{2}\left[n\left(1-\frac{1}{k_1}\right)+n\left(1-\frac{1}{k_2}\right)+\cdots+n\left(1-\frac{1}{k_w}\right)\right],$$

und dieser Ausdruck erweist sich nach Formel (1) in Nr. 7 in der That gleich dem Geschlecht p der Fläche F.

Königsberg i. Pr. 10. Februar 1892.

Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen.

Von

Robert Fricke in Kiel.

Es sind nunmehr zwanzig Jahre verflossen, seit Hr. Schwarz bei seinen Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe durch den zielbewussten Gebrauch der „Kreisbogendreiecke" in einer überraschend einfachen Weise Aufschluss geben konnte über die functionentheoretische Eigenart der durch die genannte Reihe dargestellten Grössen. Aber es war das nur der Anfang für diese von Riemann's Geiste getragene Methode geometrisch-functionentheoretischer Forschung, und man weiss, was seither in diesem Gebiete durch die Arbeiten Klein's und Poincaré's an neuen Erfolgen errungen ist. Man weiss zugleich, in welch' inniger Beziehung die Wendung, welche die moderne Functionentheorie nach dieser Richtung hin genommen hat, zu der Theorie der linearen Differentialgleichungen steht, wie sie gleichfalls im Anschluss an Riemann durch Hrn. Fuchs und seine Schüler entwickelt worden ist.

Aber bei allen Beziehungsreichthum, welcher ein anerkannter Vorzug der modernen Riemann'schen Functionentheorie ist, waltet kein Zweifel, dass für den Zusammenschluss der letzteren mit den übrigen mathematischen Disciplinen auch heute noch ein weites Gebiet künftiger Forschung unerschlossen geblieben ist. In der That ist bei der genannten Entwicklung die *Arithmetik* bis nun fast leer ausgegangen; und doch begegnet man, seit einmal der Begriff der Gruppe zum herrschenden wurde, bei functionentheoretischen Untersuchungen der gedachten Richtung auf Schritt und Tritt Problemen, die nur mit den schärferen Begriffsbestimmungen der Arithmetik einer befriedigenden Lösung fähig sind.

Alle analytischen Fortsetzungen, welche man bei einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von einem „Fundamentalsystem" von Integralen aus erhalten kann, gehen aus einander durch lineare Substitutionen hervor, die in ihrer Gesammtheit eine für jene Differentialgleichung charakteristische *Gruppe* bilden. Eine „η-Function" auf

einer Riemann'schen Fläche beliebigen Geschlechtes wird sich bei Periodenwegen oder auch nur bei geschlossenen Wegen linear substituiren, und diese linearen Substitutionen bilden wieder in ihrer Gesammtheit eine für Function und Fläche charakteristische *Gruppe*. Endlich eine reguläre Ebenentheilung, wie sie aus einem Kreisbogenpolygon mit gewissen Winkeln nach dem „Symmetrieprincip" entsteht, geht in sich über durch die linearen Substitutionen einer gewissen *Gruppe*, welche letztere in jener Ebenentheilung ihr unmittelbares Gegenbild findet.

Dass im Einzelfalle immer eine Gruppe entstehen *muss*, sieht man ja mittelbar sofort ein. Aber eine unmittelbare Kenntniss vom Zustandekommen der Gruppe können wir nur dadurch gewinnen, dass wir die *arithmetische Natur der Substitutionscoefficienten* aufweisen, kraft deren eben zwei Substitutionen der Gruppe, combinirt, wieder eine Substitution der gleichen Gruppe erzeugen. Man könnte sogar zum Kern aller hier in einander greifender Fragestellungen diese erheben, dass man alle Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen η arithmetisch definiren soll. Hinterher mag man dann für die einzelne Gruppe in der η-Ebene einen Fundamentalbereich construiren*), diesen zu einer Riemann'schen Fläche zusammenbiegen oder endlich die Vermittlung zwischen diesen beiden geometrischen Gebilden in einer zugehörigen Differentialgleichung erblicken.

Was die in der bezeichneten arithmetischen Richtung bisher erhaltenen Resultate anlangt, so ist nur daran zu erinnern, dass Hr. Poincaré gewissermassen zufällig von arithmetischer Seite ein Princip entdeckte, gewisse unendliche Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen η arithmetisch zu definiren. Diese Gruppen wurden alsdann von Stouff (Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1891) und Bianchi (Rendiconti de l'accademia dei lincei, 1890, 91), sowie in meinen eigenen Arbeiten in den Mathem. Annalen Bd. 38 und 39 näher in Betracht gezogen.

Um allgemeinere Ansätze zu gewinnen, habe ich neuerdings die Dreiecksfunctionen $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}; x\right)$, welche in der Theorie der Modulfunctionen eine bekannte wichtige Rolle spielen, näher untersucht. Dabei bin ich zu einem ganz allgemeinen Definitionsprincip für Gruppen unserer Art gelangt, *wobei im Einzelfalle die ganzen Zahlen eines endlichen Zahlkörpers***) *unter Adjunction der Quadratwurzel aus einer oder einigen dieser ganzen Zahlen die entscheidende Rolle spielen.*

*) Wenn anders sie einen *endlichen* Fundamentalbereich in der η-Ebene wirklich besitzt.

**) Ich bediene mich hier und in der Folge derjenigen Terminologie, wie sie in der von Hrn. Dedekind geschaffenen allgemeinen Zahlentheorie gebräuch-

Nimmt man in einfachster Weise den Grad n des Körpers gleich 1, so wird man zu jenen aus Poincaré's Princip hervorgegangenen Gruppen zurückgeführt; die Modulgruppe steht dabei als einfachste voran, insofern hier dem Körper der rationalen Zahlen nur $\sqrt{1}$, d. i. überhaupt keine Irrationalität hinzugefügt wird. Die zu $n = 1$ gehörenden Gruppen will ich weiterhin kurz als *die Poincaré'schen Gruppen* bezeichnen. Für $n = 2$ habe ich einen ersten Ansatz in einer der Göttinger Societät vorgelegten Note entwickelt, worüber man die Sitzungsberichte vom 5. März 1892 vergleichen wolle.

Die durch binomische Gleichungen definirten Zahlkörper geben wohl nicht immer die einfachsten Kreisbogenpolygone; vielmehr gilt letzteres, wie es scheint, vor allem von den in der Theorie der Kreistheilung auftretenden reellen Zahlkörpern. In diesem Sinne beschäftigt sich die vorliegende Arbeit, die nur erst ein Beispiel für künftige allgemeinere Entwicklungen bringen soll, mit demjenigen cubischen Körper, welcher durch die Resolvente für die zweigliedrigen Perioden aus 7^{ten} Einheitswurzeln definirt ist; dabei tritt die eine Quadratwurzel $\sqrt{\mu - 1}$ hinzu, unter μ die grösste unter den drei Wurzeln jener Gleichung verstanden. Die zu definirende Gruppe wird in unmittelbarer Beziehung zu den Gruppen jener beiden Dreiecksfunctionen stehen, die in der Ueberschrift namhaft gemacht sind. — Für die Arithmetiker mag es Interesse haben, eine Reihe ihrer abstracten Begriffsbildungen als wirksame Glieder inmitten einer durchaus geometrischen Denkweise wieder zu erkennen. —

§ 1.

Einführung zweier Zahlkörper K und L, sowie einer zugehörigen Gruppe Γ.

Die in der Folge häufig zu nennende Irrationalität j soll die positiv genommene Wurzel:

$$j = \sqrt{e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{-\frac{2i\pi}{7}} - 1} \tag{1}$$

sein; sie genügt der irreducibelen Gleichung sechsten Grades:

$$j^6 + 4j^4 + 3j^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

welche letztere durch die Substitution $j^2 + 1 = \mu$ in die bekannte Gestalt der cubischen Resolvente der Kreistheilungsgleichung für den 7^{ten} Theilungsgrad übergeht.

Fasst man (2) als cubische Gleichung für j^2 auf, so definirt sie einen Zahlkörper dritten Grades, für welchen $[1, j^2, j^4]$ eine Basis von

lich ist; man sehe Supplement XI zu Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, bearbeitet von Dedekind.

kleinster Discriminante ist*); dieser cubische Körper soll weiterhin K genannt werden. Die mit j^2 conjugirten Zahlen heissen j_1^2, j_2^2; sie stellen sich in j wie folgt dar:

$$(3) \qquad j_1^2 = j^4 + 2j^2 - 2, \quad j_2^2 = -j^4 - 3j^2 - 2.$$

Es kommt hiermit der Umstand zum Ausdruck, dass die drei mit K conjugirten Körper (dieser selbst mitgerechnet) unter einander identisch sind, was ja sehr bekannt ist. Als numerische Werthe hat man:

$$(4) \quad j^2 = +0,24\ldots, \quad j_1^2 = -1,44\ldots, \quad j_2^2 = -2,80\ldots;$$

dieselben werden bei Gelegenheit zu benutzen sein.

Setzt man zu K noch die Irrationalität j hinzu, so entspringt ein reeller Zahlkörper sechsten Grades, den ich L nenne. Er ist einer der sechs durch (2) definirten Körper, welch' letztere übrigens zu Paaren identisch sind. Dabei werden wir im Anschluss an (3) die beiden mit L conjugirten Körper L_1 und L_2 nennen; L_1 und L_2 sind imaginär, und zwar ist jeder der Körper sich selber conjugirt imaginär. Diese Angaben sind, wie man weiss, für die in K und L existirenden Einheiten von grundlegender Bedeutung.

Unter A, B, C, D verstehe ich in der Folge stets *ganze* Zahlen des Körpers K. Da $[1, j^2, j^4]$ eine Basis von kleinster Discriminante ist, so sind jene ganzen Zahlen stets in der Gestalt:

$$(5) \qquad \begin{cases} A = a_0 + a_1 j^2 + a_2 j^4, \\ B = b_0 + b_1 j^2 + b_2 j^4, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

darstellbar, wo die $a_0, a_1, \ldots d_2$ durchgängig *ganze* rationale Zahlen sind. Zwei ganze Zahlen des Körpers L von der Gestalt $A + jB$ und $A - jB$ wird man als „innerhalb L conjugirt" zu bezeichnen haben.

Nach diesen Vorbemerkungen führe ich die nachfolgenden *linearen Substitutionen der Variabelen* η:

$$(6) \qquad \eta' = \frac{(A+jB)\eta + (C+jD)}{(-C+jD)\eta + (A-jB)}$$

von der Determinante 1:

$$(7) \qquad A^2 + C^2 - j^2(B^2 + D^2) = 1$$

ein und benenne diese Substitutionen generell durch V. Es soll also das charakteristische Bildungsgesetz für die Substitutionen V dieses sein, *dass jeweils der erste und vierte Coefficient ein Paar ganzer innerhalb L conjugirter Zahlen von L darstellen, und dass ein Gleiches vom zweiten und negativ genommenen dritten Coefficienten gilt.* Die kürzeste Rechnung bestätigt den Satz, *dass die so definirten Substitutionen in*

*) Cf. Dedekind l. c. pag. 584.

ihrer Gesammtheit eine Gruppe bilden; ich benenne diese Gruppe hinfort durch Γ.

Die Gruppe Γ lässt sich durch Spiegelung an der imaginären Axe auf eine *erweiterte Gruppe* $\bar{\Gamma}$ bringen*). Diese letztere besitzt dann neben der einzelnen in (6) gegebenen Substitution V immer noch die Substitution zweiter Art $\overline{V}$:

$$\eta' = \frac{(A+jB)\bar{\eta} - (C+jD)}{(-C+jD)\bar{\eta} - (A-jB)}, \tag{8}$$

wobei unter $\bar{\eta}$ der zu η conjugirt complexe Werth verstanden ist.

Die Substitutionen V und $\overline{V}$ haben durchgängig *reelle* Coefficienten der in (7) gegebenen *positiven* Determinante 1. Es soll daraufhin unsere erste Aufgabe sein, zu untersuchen, ob $\bar{\Gamma}$ in der positiven η-Halbebene einen endlichen Fundamentalbereich besitzt, und wie eventuell derselbe gestaltet sein mag.

§ 2.

Die zur $\bar{\Gamma}$ gehörende Eintheilung der η-Halbebene in reguläre Siebenecke mit lauter rechten Winkeln.

Die in der Gruppe Γ enthaltenen *elliptischen* Substitutionen, welche wir zuvörderst in die Discussion ziehen wollen, sind nach bekannten Regeln dadurch charakterisirt, *dass bei ihnen die Zahl A absolut genommen kleiner als 1 ist.* Nennt man aber die mit $A, B, \ldots$ conjugirten Zahlen $A_1, A_2, B_1, B_2, \ldots$, so ergiebt sich aus der Irreducibilität der Gleichung (2) § 1, dass mit (7) § 1 immer auch die beiden weiteren Gleichungen:

$$C_i^2 - j_i^2(B_i^2 + D_i^2) = 1 - A_i^2 \tag{1}$$

für $i = 1, 2$ erfüllt sind. Da j_1^2 und j_2^2 negative Zahlen sind, während doch K reell ist, so kann die linke Seite der Gleichung (1) nicht negativ werden, und also folgt für das einzelne elliptische V:

$$-1 < A, A_1, A_2 < +1. \tag{2}$$

Man schreibe nun ausführlich:

$$\begin{cases} A = a_0 + a_1 j^2 + a_2 j^4, \\ A_1 = a_0 + a_1 j_1^2 + a_2 j_1^4, \\ A_2 = a_0 + a_1 j_2^2 + a_2 j_2^4, \end{cases} \tag{3}$$

trage die Näherungswerthe (4) § 1 ein und löse nach den Coordinaten a_0, a_1, a_2 auf; so ergiebt sich:

*) Vergl. über die hier gemeinte Gruppenerweiterung die „*Vorlesungen über die Theorie der Modulfunctionen*“ z. B. pag. 223 ff.

$$a_0 = A \cdot 0,8 \cdots + A_1 \cdot 0,3 \cdots - A_2 \cdot 0,1 \cdots,$$
$$a_1 = A \cdot 0,8 \cdots - A_1 \cdot 1,1 \cdots + A_2 \cdot 0,3 \cdots,$$
$$a_2 = A \cdot 0,2 \cdots - A_1 \cdot 0,4 \cdots + A_2 \cdot 0,2 \cdots.$$

Hieraus folgert man mit Rücksicht auf (2) für die Coordinaten der Zahl A sofort die nothwendigen Bedingungen:

$$(4) \qquad -1 \leqq a_0 \leqq 1, \quad -2 \leqq a_1 \leqq 2, \quad a_2 = 0.$$

Aber dieselben sind noch nicht hinreichend; indem man vielmehr die wenigen, durch die Ungleichungen (4) noch übrig gelassenen, Combinationen a_0, a_1, a_2 einzeln in (3) einsetzt und die Zahlen A, A_1, A_2 dann jedesmal auf die Bedingungen (2) untersucht, ergiebt sich, dass $A = 0$ die einzige mit den Ungleichungen (2) vereinbare ganze Zahl von K ist. $A = 0$ aber zeigt eine elliptische Substitution der Periode *zwei* an. *Es kommen demnach in* Γ *an elliptischen Substitutionen nur solche der Periode zwei vor.* Es ist hierbei die Deduction gleich so gefasst, dass sie auch auf die analogen, in § 5 und 8 auftretenden Fragestellungen passt; gegenwärtig hätte im Anschluss an (2) auch eine weit kürzere Schlussweise zum Ziele geführt.

Unter den Operationen zweiter Art (8) § 1 ziehen wir in erster Linie die *Spiegelungen* heran; dieselben sind durch $B = 0$ charakterisirt, und die zugehörigen Symmetriekreise sind gegeben durch die Gleichung:

$$(5) \qquad (C - jD)(x^2 + y^2) + 2Ax - (C + jD) = 0.$$

Wir denken Gleichung (5) für alle Darstellungen der 1 in der Gestalt:

$$(6) \qquad 1 = A^2 + C^2 - j^2 D^2$$

vermöge ganzer Zahlen A, C, D des Körpers K gebildet und tragen die entsprechenden Halbkreise in die η-Halbebene ein. Insbesondere stellen sich dabei der Einheitskreis der η-Halbebene (nämlich für $A = D = 0$) sowie die imaginäre η-Axe (für $C = D = 0$) ein.

Man hat betreffs des Diagramms der Symmetriekreise (5) die beiden folgenden, sofort evidenten Sätze: *Die in Rede stehenden Symmetriekreise können sich nur (zu Paaren) unter rechtem Winkel überkreuzen;* in der That, wo sich immer zwei Symmetriekreise überkreuzen, da findet sich der Fixpunkt für eine elliptische Substitution der Gruppe Γ, deren Periode durch den Winkel jener beiden Kreise gegeben ist u. s. w. Andrerseits aber: *Findet sich auf einem Symmetriekreise irgendwo ein Fixpunkt einer in* Γ *enthaltenen elliptischen Substitution, so wird jener Symmetriekreis dort von einem zweiten Kreise* (5) *orthogonal gekreuzt.* Es wird nämlich die aus der elliptischen Substitution entspringende Gruppe G_2 durch Zusatz jener ersten Spiegelung auf eine erweiterte Gruppe $\overline{G_4}$ gebracht, die dann immer noch eine zweite Spiegelung aufweist.

Wir müssen nun die Aufmerksamkeit auf eine wichtige *Trans-*

formation der Gruppe $\bar{\Gamma}$ *in sich selbst* lenken, die wir etwa in der folgenden Weise einführen: es ist:

$$e = 2 + j^2 + j(3 + 4j^2 + j^4) \tag{7}$$

eine *Einheit* des Körpers L, welche die einfache Eigenschaft hat, dass sie, mit der innerhalb L conjugirten Zahl $\bar{e}$ multiplicirt, direct das Product $e \cdot \bar{e} = 1$ liefert. Zudem trifft sich, dass $2e$ im Körper L ein reines Quadrat ist; ich nenne dasselbe σ^2 und finde:

$$\sigma = \sqrt{2e}, \quad \sigma = 1 + 3j^2 + j^4 + j(2 + j^2). \tag{8}$$

Indem ich endlich unter $\bar{\sigma}$ die zu σ innerhalb L conjugirte Zahl verstehe, bilde ich die Substitution:

$$S(\eta) = \frac{\sigma\eta + \sigma}{-\bar{\sigma}\eta + \bar{\sigma}} = e \cdot \frac{1 + \eta}{1 - \eta}; \tag{9}$$

dieselbe hat durchaus die Gestalt einer Substitution V, *nur dass sie von der Determinante* $2\sigma\bar{\sigma} = 4$ *ist.* Diese Substitution S besitzt in der positiven Halbebene den Fixpunkt:

$$\eta_0 = \frac{-j(2 + j^2) + i\sqrt{1 - j^2}}{\bar{\sigma}} = -1,62\cdots + i \cdot 1,28\cdots, \tag{10}$$

der, wie leicht bewiesen, auf dem Kreise:

$$(x + 1)^2 + y^2 - 2 = 0 \tag{11}$$

gelegen ist; andrerseits bestimmt sich die Periode von S aus

$$\left(\frac{1 + 3j^2 + j^4 + i\sqrt{1 - j^2}}{2}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{7}}$$

sofort zu 7: *Es ist hiernach* S *eine elliptische Substitution der Periode sieben.*

Durch S transformire man nun die Gruppe $\bar{\Gamma}$. Dabei geht die Substitution erster Art (6) § 1 über in:

$$\eta' = \frac{+(A + jD)\eta + e(C - jB)}{-\bar{e}(C + jB)\eta + A - jD},$$

die Substitution zweiter Art (8) § 1 aber in:

$$\eta' = \frac{(C + jB)\bar{\eta} + e(A + jD)}{\bar{e}(A - jD)\bar{\eta} - (C - jB)},$$

unter e die in (7) gegebene Einheit des Körpers L verstanden. *Es ist damit evident, dass die Gruppe* $\bar{\Gamma}$ *durch die Substitution* S *in sich selbst transformirt wird;* insbesondere wird also das System der Symmetriekreise (5) durch S in sich übergeführt.

Diese Symmetriekreise mögen jetzt generell durch k bezeichnet werden und in der Benennung des näheren durch obere oder untere Indices am k unterschieden werden. Man wolle dann den Einheitskreis k_0 vermöge S transformiren und bemerkt, dass er in die *zu* k_0

orthogonale imaginäre Axe k_1 übergeht. Indem wir fortfahren durch S zu transformiren, reihen sich an k_1 die Kreise $k_2, \ldots, k_6$; es ist evident, *dass dieselben ein Kreisbogensiebeneck mit lauter rechten Winkeln und mit dem in* (10) *gegebenen Centrum* η_0 *bilden.*

Und nun sehen wir durch eine elementare geometrische Ueberlegung ein, dass das gewonnene Siebeneck ein Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}$ ist. Man gehe in der That zu einer kreisverwandten Figur über, bei welcher die reelle η-Axe einen eigentlichen Kreis — den Hauptkreis — bildet, dessen Mittelpunkt dem Fixpunkt η_0 von S entspreche. Die sieben Kreise $k_0, \ldots, k_6$ des fraglichen Siebenecks werden dann einfach congruent, wie Fig. 1 hierneben zeigt. Sollte nun aber noch ein Symmetriekreis k_0' mit *grösserem* Radius als k_0 das Siebeneck durchziehen, so wolle man doch wieder die Kette der sieben Kreise $k_0', \ldots, k_6'$ bilden und sieht, dass sie ein Siebeneck mit lauter *stumpfen* Winkeln bilden, die doch, wie wir schon fanden, nicht vorkommen können. Aber unter allen mit k_0 *congruenten* Kreisen, die zum Hauptkreis orthogonal verlaufen, werden eben nur die zwei, k_1 und k_6, den Kreis k_0 unter rechtem Winkel kreuzen. Und endlich: wird k_0 von dem *kleineren* Symmetriekreise k_0'' orthogonal geschnitten, so kann dies nur ausserhalb des Siebenecks geschehen. Also das Resultat: *Unser Siebeneck wird von keinem weiteren Symmetriekreise der Gruppe* $\bar{\Gamma}$ *durchsogen.*

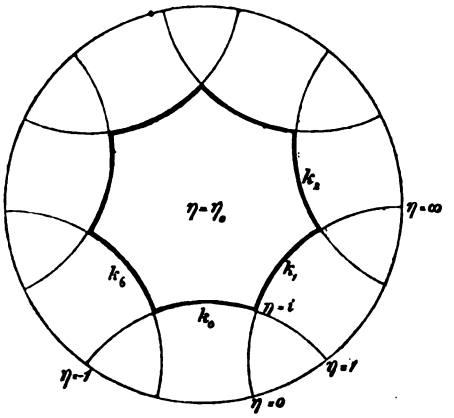


Fig. 1.

Man bemerke endlich, dass unser reguläres Siebeneck *nur* durch 14 lineare Substitutionen in sich übergeht: es sind das die sieben Potenzen $S^0, S^1, \ldots, S^6$ von S und die Spiegelungen an den sieben Symmetrielinien des Siebenecks. *Keine* dieser Operationen, die Identität allein ausgenommen, gehört $\bar{\Gamma}$ an, da sich S in dieser Gruppe nicht findet. Indem man aber durch Vervielfältigung des ersten Siebenecks nach dem Symmetrieprincip offenbar das gesammte, gegenüber $\bar{\Gamma}$ invariante, System der Symmetrielinien (5) gewinnt, wird das Ausgangssiebeneck durch eine von der Identität *verschiedene* Substitution der Gruppe $\bar{\Gamma}$ *stets* in ein anderes Siebeneck der gewonnenen Eintheilung transformirt: *Das Ausgangssiebeneck der* η*-Halbebene ist somit ein Fundamentalbereich für die erweiterte Gruppe* $\bar{\Gamma}$.

§ 3.

Arithmetische und functionentheoretische Folgerungen.

Es ist eine Fülle interessanter Resultate, welche aus der Construction des Fundamentalbereichs der Gruppe $\bar{\Gamma}$ unmittelbar sich ergeben, und von denen wir einige hier anführen wollen. Erstlich für die *Arithmetik* wiederhole ich noch einmal kurz, dass den gesammten Darstellungen der Einheit 1 in der ternären Form:

$$1 = A^2 + C^2 - j^2 D^2 \tag{1}$$

vermöge ganzer Zahlen A, C, D des Körpers K jene Symmetriekreise:

$$(C - jD)(x^2 + y^2) + 2Ax - (C + jD) = 0 \tag{2}$$

entsprechen, welche die η-Halbebene mit der gewonnenen Siebeneck-theilung versehen.

Alle die Gitterpunkte dieser Eintheilung, in den sich irgend zwei Kreise (2) überkreuzen, liefern uns dann das Gesammtschema der Fixpunkte für die in Γ enthaltenen elliptischen Substitutionen. Auch dieses Punktsystem werden wir sofort geschlossen arithmetisch definiren können: *es sind eben die Punkte:*

$$\eta = \frac{jB + i}{-C + jD}, \tag{3}$$

zu bilden für alle Darstellungen der Eins in der ternären Form:

$$1 = C^2 - j^2 B^2 - j^2 D^2 \tag{4}$$

durch ganze Zahlen B, C, D unseres Körpers K.

Auf jeder Symmetrielinie liegen unendlich viele Fixpunkte (3), und es ist besonders interessant, dies für die imaginäre η-Axe noch ein wenig weiter zu verfolgen. Auf den Punkt $\eta = i$ folgt hier in der Richtung wachsender η der Fixpunkt:

$$\eta = S(i) = ie,$$

unter e die schon öfter genannte Einheit:

$$e = 2 + j^2 + j(3 + 4j^2 + j^4) \tag{5}$$

des Körpers L verstanden. Die zugehörige elliptische Substitution:

$$\eta' = \frac{-e}{\bar{e}\eta}, \quad \text{mit} \quad \eta' = \frac{-1}{\eta}$$

combinirt, *ergiebt in* $U(\eta) = \frac{e\eta}{\bar{e}}$ *die erzeugende Substitution für jene in Γ enthaltene cyklische Untergruppe hyperbolischer Substitutionen, welche die imaginäre η-Axe in sich überführen;* es ist dies geometrisch sofort evident. Da folgt nun gleich weiter: Jede Substitution:

$$\eta' = \frac{A + jB}{A - jB}\eta, \quad A^2 - j^2 B^2 = 1 \tag{6}$$

mit ganzen Zahlen A, B des Körpers K ist eine ganze Potenz von U; *und also ist jede Einheit des Körpers* L, *welche mit ihrer innerhalb* L *conjugirten Einheit das Product* 1 *liefert, eine ganze Potenz von* e. Es finden also für die unter (6) angegebene Pell'sche Gleichung eben jene Verhältnisse statt, die uns aus der rationalen Zahlentheorie bekannt sind.

Dieses Ergebniss ist in Uebereinstimmung mit den Regeln der Dirichlet'schen Einheitentheorie*). Nach der letzteren giebt es zufolge der oben über die conjugirten Körper K und L angegebenen Sätze in K *zwei* unabhängige Einheiten, welchen sich beim Fortgang zu L nur *eine einzige* dritte unabhängige Einheit anschliesst. Eben aus letzterem Umstande leitet man leicht die Existenz einer „kleinsten positiven Lösung" der Pell'schen Gleichung (6) ab, in der sich alle übrigen Lösungen in der bekannten Weise darstellen. Dass aber diese kleinste Lösung in e wirklich vorliegt, möchte man vielleicht rein arithmetisch nur erst mit Hülfe einiger weiteren Rechnungen zeigen können.

Unter allen Einheiten $A+jB$ mit $A, B > 0$ ist übrigens e keineswegs die kleinste. Es ist z. B. auch $e_0 = 1 + 2j$ eine Einheit, die dann aber mit $\bar{e}_0$ multiplicirt noch nicht 1, sondern erst eine von 1 verschiedene Einheit des Körpers K liefert. Dann aber muss der Quotient von $1 + 2j$ und $1 - 2j$ nothwendig eine ganze Potenz von e sein, und ich finde aus den numerischen Beträgen dieser Zahlen, dass es nur e^4 sein kann. Da

$$e^2 = (1+2j)\,(7+8j^2+2j^4)$$

ist, so müssen demgemäss die Gleichungen bestehen:

$$\frac{1+2j}{1-2j} = (1+2j)^2\,(7+8j^2+2j^4)^2,$$
$$(1-4j^2)\,(7+8j^2+2j^4)^2 = 1,$$

deren letztere man in der That sofort bestätigt. —

Nicht minder interessant sind die *functionentheoretischen* Ergebnisse. Durch die neuere Ausbildung der Riemann'schen Functionentheorie ist, wie man weiss, der endgültige Beweis für die Existenz einer Function $\tau(\eta)$ gegeben, welche in unserem Falle das einzelne Kreisbogensiebeneck der η-Halbebene conform auf das Innere eines Kreises abbildet: Man wird etwa diesen Kreis als Einheitskreis der τ-Ebene fixiren, dessen Mittelpunkt, $\tau = 0$, dem in (10) § 2 gegebenen Mittelpunkte η_0 des Siebenecks entspreche; in den Ecken des letzteren möge dann τ die Werthe $1, e^{\frac{2i\pi}{7}}, \cdots, e^{\frac{12i\pi}{7}}$ annehmen, wodurch τ bekanntermassen eindeutig bestimmt ist.

*) Cf. Dedekind l. c. pag. 555.

Das Ausgangssiebeneck der η-Halbebene wird, mit seinem Spiegelbild an der imaginären Axe vereint, einen *Fundamentalbereich der Gruppe* Γ liefern, welch' letztere sich damit als eine Gruppe des Geschlechtes Null erweist: Die Function $\tau(\eta)$ ist direct die zugehörige Hauptfunction, und alle übrigen automorphen Functionen der Gruppe Γ sind rationale Functionen von τ.

Für die explicite Darstellung dieser zur Gruppe Γ gehörenden automorphen Functionen in η schreiben wir unter Einführung der *homogenen Variabelen* η_1, η_2:

$$(7)\quad \Theta(\eta_1, \eta_2) = \sum H\left(\frac{(A+jB)\eta + C + jD}{(-C+jD)\eta + A - jB}\right) \cdot \frac{1}{[(-C+jD)\eta_1 + (A-jB)\eta_2]^{2\varrho}},$$

summirt über alle Darstellungen der Einheit 1 *in der quaternären Form:*

$$1 = A^2 + C^2 - j^2B^2 - j^2D^2$$

vermöge ganzer Zahlen A, B, C, D *des cubischen Körpers* K. Hierbei ist $H(\eta)$ eine rationale Function ihres Argumentes, und es muss die ganze Zahl $\varrho \geqq 2$ sein, damit in (7) Convergenz vorliegt; eine Reihe von der Bauart (7) benennen wir zu Ehren ihres genialen Entdeckers als eine Poincaré'sche*). In den völlig endgültig fixirten Reihen (7) haben wir direct *automorphe Formen des rechtwinkligen regulären Kreisbogensiebenecks in abgeschlossener Gestalt* vor Augen.

Uebrigens liefern uns die Poincaré'schen Reihen keineswegs alle automorphen Formen der Gruppe Γ, und insbesondere lassen sich jene einfachsten Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, welche aus $\tau(\eta)$ durch einen bekannten Differentiationsprocess gewonnen werden können, in der Gestalt (7) nicht darstellen. —

§ 4.

Eintheilung des Siebenecks in sieben gleichschenklige Dreiecke und zugehörige Gruppe $\Gamma_{(7)}$.

Die Substitution S der Periode sieben transformirte die Gruppe Γ in sich. Wenn man demnach mit den Substitutionen $1, V_1, V_2, \ldots$ der Gruppe Γ noch die weiteren sechs Classen von Substitutionen:

$$S^\nu,\ V_1S^\nu,\ V_2S^\nu, \ldots, \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, 6$$

zusammenthut, so hat man wieder die gesammten Substitutionen einer Gruppe, die wir $\Gamma_{(7)}$ nennen mögen, insofern in ihr Γ eine ausgezeich-

*) Ich schliesse mich in dieser Hinsicht dem Vorschlage des Hrn. E. Ritter an, der auf Grund bezüglicher neuerer Vorlesungen von Hrn. Prof. Klein eine ausführliche Untersuchung über die Poincaré'schen Reihen angestellt hat; vergl. die Abhandlung Ritter's „*Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze*", welche demnächst in diesen Annalen (Bd. 41, p. 1 ff.) erscheinen wird, sowie eine vorläufige Mittheilung desselben in den Göttinger Nachrichten vom 5. März 1892.

nete Untergruppe des Index 7 ist. Die Substitutionen dieser Gruppe, diejenigen mit $v = 0$ nicht ausgeschlossen, benennen wir fortan allgemein durch v. Natürlich ist $\tau^7(\eta)$ eine Hauptfunction dieser Gruppe, und die Ebene derselben erscheint in der η-Halbebene conform übertragen auf ein *Kreisbogenviereck mit zwei rechten Winkeln und zwei Winkeln* $\frac{2\pi}{7}$, welche letztere ihre Scheitel in den Centren zweier neben einander liegender Siebenecke haben.

Doch soll es vor allen Dingen unser Ziel sein, den arithmetischen Charakter unserer neuen Gruppe $\Gamma_{(7)}$ erschöpfend aufzuweisen. Und in diesem Betracht behaupte ich: *Die Gruppe* $\Gamma_{(7)}$ *besteht aus allen denjenigen Substitutionen:*

$$v(\eta) = \frac{(A+jB)\eta + (C+jD)}{(-C+jD)\eta + (A-jB)} \tag{1}$$

der Determinante vier:

$$A^2 + C^2 - j^2B^2 - j^2D^2 = 4, \tag{2}$$

für welche die Congruenzen:

$$A \equiv C, \quad B \equiv D, \pmod 2 \tag{3}$$

erfüllt sind. Natürlich sollen die A, B, C, D nach wie vor ganze Zahlen des Körpers K sein.

Zum Beleg dieser Behauptung vorab die Bemerkung, *dass die* 2 *im Körper* K *den Charakter einer Primzahl hat*, im Gegensatz übrigens zu den Verhältnissen, wie wir sie im Körper L antreffen. Indem ich nämlich die ganzen Zahlen A etc. in sofort verständlicher Abkürzung durch (a_0, a_1, a_2) benenne, wird unter den acht mod. 2 incongruenten Zahlen $P = (0, 1, 0) = j^2$ den Charakter einer Primitivwurzel haben, insofern erst $P^7 \equiv 1 \pmod 2$ wird. Aus

$$A \equiv (a_0, a_1, a_2), \quad AP \equiv (a_2, a_0+a_2, a_1), \pmod 2$$

folgt aber, dass $A \cdot P$ nur dann durch 2 theilbar ist, wenn dies schon von A gilt. Ist also überhaupt das Product zweier ganzen Zahlen von K durch 2 theilbar, so gilt das Gleiche wenigstens vom einen Factor.

Jetzt bemerke man erstlich, *dass jede der Congruenzen* (3) *unter Rücksicht auf* (2) *eine Folge der anderen ist.* Nimmt man z. B. $B \equiv D \pmod 2$ an, so folgt aus (2):

$$A^2 - C^2 \equiv (A+C)(A-C) \equiv 0 \pmod 2,$$

so dass mit Rücksicht auf die Primzahleigenschaft von 2 sofort die erste Congruenz (3) sich ergiebt.

Um die Gruppeneigenschaft der Operationen (1) direct zu untersuchen, combiniren wir v mit v' und heben die rechte Seite der entspringenden Substitution durch 2, um bei der Substitution vv' wieder

zur Determinante 4 zurückzukommen. Die vier Zahlen A'', B'', C'', D'' von $v'' = vv'$ berechnen sich daraufhin aus:

$$(4)\qquad \begin{cases} 2A'' = AA' - CC' + j^2(BB' + DD'), \\ 2B'' = AB' + A'B + CD' - C'D, \\ 2C'' = AC' + A'C + j^2(BD' - B'D), \\ 2D'' = AD' + A'D + BC' - B'C, \end{cases}$$

und nun ist offenbar zu zeigen:

1) dass A'', B'', C'', D'' wirklich *ganze* Zahlen von K sind,
2) dass für A'', B'', C'', D'' die Congruenzen (3) gelten.

Der erste Punkt erledigt sich ohne weiteres; denn vermöge (3) folgt:

$$2A'' \equiv 0,\ 2B'' \equiv 0,\ 2C'' \equiv 0,\ 2D'' \equiv 0 \pmod 2.$$

Weiter aber hat man:

$$(5)\qquad \begin{aligned} 2(B'' + D'') = {} & (A + C)(B' + D') + (A' + C')(B + D) \\ & - 2(B'C + C'D), \end{aligned}$$

und hier sind alle drei Glieder rechter Hand durch 4 theilbar. Für die beiden ersten Glieder folgt dies unmittelbar aus (3), für das letzte Glied beachte man folgende Congruenzen (mod. 2):

$$\begin{aligned} B'C + C'D &\equiv AB' + A'B, \\ (B'C + C'D)^2 &\equiv A^2B'^2 + A'^2B^2, \\ (B'C + C'D)^2 &\equiv 2j^2B^2B'^2 \equiv 0, \end{aligned}$$

deren letzte sich mit Rücksicht auf die aus (2) und (3) entspringenden Congruenzen:

$$A^2 \equiv j^2B^2,\quad A'^2 \equiv j^2B'^2,\quad \pmod 2$$

ergiebt. Da also das Quadrat von $(B'C + C'D)$ durch 2 theilbar ist, so gilt dies von dieser Zahl selbst. Es ist sonach $B'' \equiv D''$ (mod. 2), womit die Gruppeneigenschaft der Substitutionen v dargethan ist.

Jetzt aber ist weiter zu zeigen, dass die Gruppe aller Substitutionen (1) wirklich mit $\Gamma_{(7)}$ identisch ist. Sicher ist die $\Gamma_{(7)}$ in der Gruppe der Substitutionen (1) enthalten; denn letztere umfasst die Gruppe Γ und enthält ausserdem die Substitution S, welche zufolge ihrer Gestalt (9) § 2 sich unter den Ansatz (1) subsumirt.

Andrerseits aber lässt sich die Gruppe aller Operationen (1) durch Spiegelung an der imaginären Axe erweitern, wodurch sie um die Substitutionen zweiter Art:

$$(6)\qquad \bar{v}(\eta) = \frac{(A + jB)\bar{\eta} - (C + jD)}{(-C + jD)\bar{\eta} - (A - jB)}$$

bereichert wird. Soll insbesondere eine Spiegelung vorliegen, so muss $B = 0$ und also $D \equiv 0$ (mod. 2) sein; dann aber folgt aus (2):

$$(7) \qquad \begin{aligned} A^2 + C^2 &\equiv 2A^2 \equiv 0 \pmod 4, \\ A^2 &\equiv 0, \quad A \equiv C \equiv 0 \pmod 2, \end{aligned}$$

so dass man zu einer Operation $\overline{V}$ der Gruppe $\bar{\Gamma}$ zurückgeführt ist. *Die Siebenecktheilung der η-Halbebene ist demnach gegenüber der Gruppe der Substitutionen* (1) *und* (6) *invariant.* Aber das einzelne Siebeneck wird *nur* durch die sieben Substitutionen *erster* Art $1, S, \ldots S^6$ unserer Gruppe in sich transformirt, da die 7 weiteren Transformationen des Siebenecks in sich als Spiegelungen zufolge (7) unter den $\bar{v}$ *nicht* vorkommen. *Ein durch zwei grösste Radien des Siebenecks ausgeschnittenes gleichschenkliges Dreieck der Winkel* $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{7}$ *ist sonach Fundamentalbereich der Gruppe* (1), (6), *und damit hat sich in der That die Gruppe der Substitutionen* (1) *als mit* $\Gamma_{(7)}$ *identisch erwiesen.*

§ 5.

Die Gruppe der Dreiecksfunction (2, 4, 7).

Die Gruppen $\Gamma_{(7)}$ und $\bar{\Gamma}_{(7)}$ des vorigen Paragraphen stehen in unmittelbarsten Zusammenhange mit der Gruppe der zur Verzweigung (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunction, oder, wie wir kurz sagen wollen, der Dreiecksfunction (2, 4, 7). In der That wird ja das Ausgangssiebeneck ausser durch die sieben Substitutionen $1, S, \ldots, S^6$ auch noch durch die sieben Spiegelungen an seinen Symmetrielinien in sich übergeführt. *Die umfassendste Gruppe, in welcher die Siebeneck-Gruppe* $\bar{\Gamma}$ *ausgezeichnet ist, wird also diejenige* $\bar{\Gamma}_{(14)}$ *sein, welche den* 14^{ten} *Theil des Siebenecks, d. i. ein Kreisbogendreieck der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{7}$ *zum Fundamentalraum hat.*

Doch handeln wir zuvörderst von der noch nicht erweiterten Gruppe $\Gamma_{(14)}$ der Dreiecksfunction (2, 4, 7). Diese $\Gamma_{(14)}$ werden wir offenbar aus der $\Gamma_{(7)}$ der Substitutionen v durch Zusatz der einzelnen Substitution der Periode vier:

$$(1) \qquad w_0(\eta) = \frac{\eta + 1}{-\eta + 1}$$

herstellen können. Dass in der That die $\Gamma_{(7)}$ durch w in sich transformirt wird, ergiebt sich sofort aus:

$$(2) \qquad w_0^{-1} v w_0(\eta) = \frac{(A - jD)\eta + (C + jB)}{(-C + jB)\eta + (A + jD)};$$

die Transformation durch w_0 wirkt also auf die einzelne Substitution v derart, dass die Zahlen B und D unter Zeichenwechsel des D permutirt werden. *Der arithmetische Gesammtcharakter der Gruppe* $\Gamma_{(14)}$ *aber ist der, dass diese Gruppe neben den Operationen v auch noch die gesammten Substitutionen:*

$$(3) \qquad w(\eta) = \frac{(A+jB)\,\eta + (C+jD)}{(-C+jD)\,\eta + A - jB}$$

der Determinante zwei:

$$(4) \qquad A^2 + C^2 - j^2B^2 - j^2D^2 = 2$$

umfasst.

In der That verbinde man erstlich eine Substitution v mit (1) zu:

$$v w_0 = \begin{pmatrix} A - C + j(B - D), & A + C + j(B + D) \\ -A - C + j(B + D), & A - C - j(B - D) \end{pmatrix}.$$

Hier kann man zufolge der Congruenzen (3) § 4 vier *ganze*, der Bedingung (4) genügende Zahlen A', B', C', D' durch

$$2A' = A - C, \quad 2B' = B - D, \quad 2C' = A + C, \quad 2D' = B + D$$

definiren und erkennt daraufhin in $v w_0$ eine Substitution (3). Auf der anderen Seite giebt eine beliebige Substitution w mit w_0^{-1} in:

$$w w_0^{-1} = \begin{pmatrix} A + C + j(B + D), & -(A - C) - j(B - D) \\ A - C - j(B - D), & A + C - j(B + D) \end{pmatrix}$$

offenbar ein v. Insbesondere liegt eine Substitution V der ursprünglichen Siebeneckgruppe Γ vor, falls $A \equiv C$, $B \equiv D$ (mod. 2) ist. *Nennen wir die dieser Bedingung genügenden w speciell W, so bilden W, V diejenige Gruppe $\Gamma_{(2)}$, welche geometrisch durch Hälftung des Ausgangssiebenecks vermöge der Symmetrielinie* (11) § 2 *eingeführt ist.*

Die erweiterte Gruppe $\bar{\Gamma}_{(14)}$ enthält neben den ursprünglichen Spiegelungen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ eine Reihe weiterer; in der That kommen ja jene Symmetriekreise hinzu, welche sich aus den Symmetrielinien jedes einzelnen Siebenecks zusammensetzen. Analytisch sind diese neuen Kreise gegeben durch:

$$(5) \qquad (C - jD)(x^2 + y^2) + 2Ax - (C + jD) = 0,$$

wenn wir diese Gleichung bilden wollen für alle Darstellungen der 2 *in der ternären Form:*

$$(6) \qquad 2 = A^2 + C^2 - j^2D^2$$

vermöge ganzer Zahlen A, C, D des Körpers K.

Infolge der grösseren Zahl der Symmetrielinien ist auch das System der in $\Gamma_{(14)}$ enthaltenen *elliptischen* Substitutionen weit mannigfaltiger geworden. Die zu den Siebeneckcentren gehörenden Substitutionen der Periode 7 sind freilich bereits in der $\Gamma_{(7)}$ enthalten; hingegen kommen neu hinzu: *einmal Substitutionen der Periode vier, deren Fixpunkte die Gitterpunkte der Siebeneckstheilung sind, und Substitutionen der Periode zwei, deren Fixpunkte die Seitenhalbirungspunkte der Siebenecke sind.* Indem wir die Betrachtung der Siebeneckcentren hinausschieben, müssen wir zu den beiden andern Arten elliptischer

Substitutionen auch durch directe Betrachtung der Substitutionen (3), (4) geführt werden.

Aber damit (3) eine elliptische Substitution vorstellt, ist nothwendig und hinreichend, dass $A^2 < 2$ ist. Durch den gleichen Gedankengang, wie zu Anfang des § 2, kann man zeigen, dass dann für die drei conjugirten Zahlen A, A_1, A_2 zugleich die Ungleichungen $-\sqrt{2} < A, A_1, A_2 < \sqrt{2}$ bestehen müssen. Die einzigen ganzen Zahlen A, welche dieser Forderung genügen, sind $A = 0$ und $A = 1$; und hier liefert $A = 0$ die elliptischen Substitutionen der Periode *zwei*, $A = 1$ aber diejenigen der Periode *vier*. Als neues Resultat merken wir uns noch an: *Die Seitenhalbirungspunkte der Siebenecke sind die Punkte:*

$$\eta = \frac{jB + i\sqrt{2}}{-C + jD}, \tag{7}$$

zu bilden für alle üblichen Darstellungen der Zahl 2 in der Form:

$$2 = C^2 - j^2 B^2 - j^2 D^2. \tag{8}$$

§ 6.

Die beiden Eintheilungen des Siebenecks in 63 Kreisbogendreiecke vom Typus (2, 3, 7). Angaben über die zugehörigen Gruppen.

Es ist gewiss eine der interessantesten Thatsachen, denen wir im Laufe unserer Ueberlegung begegnen, *dass sich das rechtwinklige reguläre Kreisbogensiebeneck auf zweierlei Art in jedesmal* 63 *äquivalente Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ *zerlegen lässt.* Die hierneben abgedruckte Figur 2 giebt die eine dieser beiden Eintheilungen an. Dieselbe ist augenscheinlich unsymmetrisch, und indem wir das Siebeneck an einer seiner Symmetrielinien umlegen, werden wir zur anderen Eintheilung geführt. Dass aber die 63 Dreiecke in der That äquivalent sind, sieht man wohl so am kürzesten, dass man umgekehrt das Siebeneck aus einem einzelnen Dreieck (2, 3, 7) nach dem Symmetrieprincip herstellt.*)

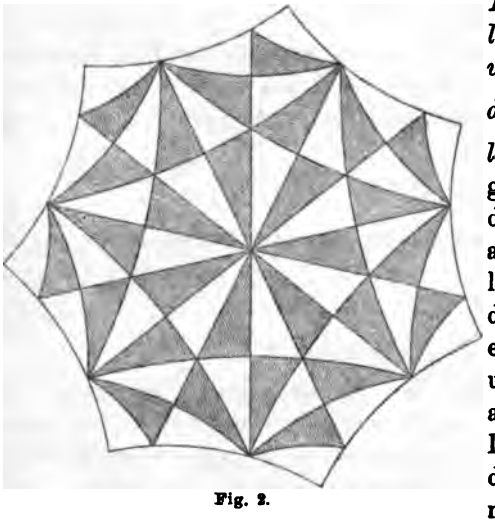


Fig. 2.

*) Wenn es sich um Zeichnung von Figuren handelt, so ist es immer zweckmässig, die natürliche Grenze als eigentlichen Kreis zu wählen, dessen Centrum

Den beiden gleichberechtigten Eintheilungen entsprechen zwei Gruppen $\bar{\Gamma}_{(63)}$ und $\bar{\Gamma}'_{(63)}$, in denen nun aber keineswegs mehr die ursprüngliche Siebeneckgruppe $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnet ist: *Vielmehr ist* $\bar{\Gamma}$ *in der einzelnen Gruppe* $\bar{\Gamma}_{(63)}$ *eine unter neun gleichberechtigten Untergruppen des Index* 63. Uebrigens bemerkt man sofort, *dass die Gruppe* $\bar{\Gamma}_{(7)}$ *des vorletzten Paragraphen die umfassendste gemeinsame Untergruppe von* $\bar{\Gamma}_{(63)}$ *und* $\bar{\Gamma}'_{(63)}$ *ist, und dass die ursprüngliche Gruppe* $\Gamma_{(7)}$ *in der gleichen Beziehung zu den Gruppen* $\Gamma_{(63)}$ *und* $\Gamma'_{(63)}$ *steht.* Es folgt hieraus als Nebenresultat, dass die Gleichung:

$$\eta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; y\right) = \eta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{7}; x\right)$$

die *algebraische* Lösung $f(x, y) = 0$ besitzt, und zwar wird in dieser algebraischen Relation $f = 0$ die Variabele x bis auf den 9^{ten} Grad ansteigen, y dagegen bis auf den 2^{ten} Grad. Es hat auch gar keine Schwierigkeit, den fertigen Ausdruck dieser algebraischen Gleichung des Geschlechtes Null durch Vermittlung der Hauptfunction der Gruppe $\Gamma_{(7)}$ aus den in Betracht kommenden Verzweigungen abzuleiten; indessen halte ich mich dabei nicht weiter auf.

Insofern die Gruppen $\Gamma_{(63)}$ und $\Gamma'_{(63)}$ *zwei besondere Gestalten für die Gruppe der Dreiecksfunction* (2, 3, 7) darstellen, so müssen diese beiden Gruppen in einander transformirbar sein. Dies ist auch geometrisch leicht zur Evidenz zu bringen: Es möge in der That $\Gamma'_{(63)}$ diejenige Gruppe sein, bei welcher das Ausgangssiebeneck der η-Halbebene*) die Eintheilung der Fig. 2 trägt; alsdann wird $\Gamma'_{(63)}$ in $\Gamma_{(63)}$ durch Spiegelung am Kreise (11) § 2 hervorgehen, welch' letzterer den Winkel zwischen Einheitskreis und imaginärer η-Axe halbirt. Wir dürfen aber diese Spiegelung auch vorab mit derjenigen an der imaginären Axe (welche $\Gamma'_{(63)}$ in sich transformirt) zur Substitution w_0 combiniren, die schon unter (1) § 5 genannt wurde, *und haben dann die Gleichung:*

$$\Gamma_{(63)} = w_0^{-1}\,\Gamma'_{(63)}\,w_0. \tag{1}$$

Die Operationen der $\Gamma_{(14)}$ werden also, soweit sie nicht der $\Gamma_{(7)}$ angehören, unsere beiden neuen Gruppen in einander transformiren.

Die zu den Gruppen $\Gamma_{(63)}$, $\Gamma'_{(63)}$ gehörenden Eintheilungen der η-Halbebene in Kreisbogendreiecke (2, 3, 7) sind hiernach so zu charakterisiren: Die imaginäre η-Axe ist beide Male Symmetrielinie

insbesondere ein elliptischer Fixpunkt sein mag, wie in Fig. 2 des Textes. Die arithmetische Gestalt der Substitutionen wird indessen durch jede Transformation, die wir mit der bisher gebrauchten η-Halbebene vornehmen mögen, eine complicirtere.

*) Also dasjenige Siebeneck, welches *links* von der imaginären η-Axe und *ausserhalb* des Einheitskreises an den Punkt $\eta = i$ heranragt.

und auf ihr ist $\eta = i$ Fixpunkt einer elliptischen Substitution der Periode zwei; aber bei $\Gamma_{(63)}$ ist auf der imaginären Axe der Punkt $\eta = i$ von zwei Fixpunkten elliptischer Substitutionen der Periode *sieben* umgeben, bei $\Gamma'_{(63)}$ folgen auf $\eta = i$ beiderseits zuvörderst zwei Fixpunkte von Substitutionen der Periode *drei* auf der imaginären η-Axe.

§ 7.

Der arithmetische Charakter der beiden Gruppen $\Gamma_{(63)}$ und $\Gamma'_{(63)}$.

Unsere Hauptaufgabe ist natürlich, den arithmetischen Charakter der beiden Gruppen $\Gamma_{(63)}$ und $\Gamma'_{(63)}$ klarzustellen, und hier liegen die Gesetze ein wenig tiefer. Ich stelle zunächst die Resultate zusammen, die dann im Weiteren zu belegen sein werden. Alle Substitutionen unserer Gruppe zeigen die Bauart, wie wir sie in § 4 bereits für die $\Gamma_{(7)}$ kennen lernten, nur dass jetzt die beschränkenden Bedingungen (3) § 4 zum Fortfall kommen. Indem wir also wieder ein besonderes Zeichen für die jetzt in Betracht kommenden Substitutionen einführen, setzen wir etwa:

$$(1) \qquad U(\eta) = \frac{(A + jB)\,\eta + C + jD}{(-C + jD)\,\eta + A - jB}$$

mit der Determinante vier:

$$(2) \qquad A^2 + C^2 - j^2B^2 - j^2D^2 = 4.$$

Es gelten dann folgende Gesetze: *Irgend eine Substitution U (mit ganzen Zahlen A, B, C, D) genügt entweder den Congruenzen:*

$$(I) \qquad \left.\begin{aligned} A &\equiv B + (1 + j^2 + j^4)\,D \\ C &\equiv (1 + j^2 + j^4)\,B + D \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

oder aber den beiden anderen:

$$(II) \qquad \left.\begin{aligned} A &\equiv (1 + j^2 + j^4)\,B + D \\ C &\equiv B + (1 + j^2 + j^4)\,D \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

sofern sie nicht gar (I) *und* (II) *zugleich befriedigt. Die Substitutionen U, welche* (I) *befriedigen, bilden die Gruppe $\Gamma_{(63)}$, diejenigen, welche* (II) *befriedigen, liefern $\Gamma'_{(63)}$.*

Beim Beweise bemerke man etwa zuvörderst, dass das Zusammenbestehen von (I) und (II) thatsächlich zur Gruppe $\Gamma_{(7)}$ zurückführt. Es ergiebt sich nämlich zuerst $A \equiv C \pmod 2$ und damit $B \equiv D \pmod 2$. Umgekehrt folgt aus letzteren beiden Congruenzen wegen:

$$(3) \qquad (j^2 + j^4)^2 \equiv j^2 \pmod 2$$

mit Rücksicht auf die Congruenz (2):

$$[A - (j^2 + j^4)\,B]\,[A + (j^2 + j^4)\,B] \equiv 0 \pmod 2,$$

so dass von allen Substitutionen v der $\Gamma_{(7)}$ auch wirklich die Congruenzen (I), (II) einzeln befriedigt werden. Doch wenden wir uns nun zum Beweise der Behauptung, dass jede Substitution U entweder (I) oder (II) befriedigt.

Man reducire die Gleichung (2) modulo 4 zu:

$$A^2 + C^2 \equiv j^2 (B^2 + D^2) \pmod 4 \tag{4}$$

und bemerke nun zunächst, *dass mit der Angabe des Werthes der Summe* $A^2 + C^2$ *modulo* 4 *die Zahlen* A, C *selbst mod.* 2 *bis auf die Reihenfolge bestimmt sind.* Ist nämlich:

$$A^2 + C^2 \equiv A'^2 + C'^2 \pmod 4, \tag{5}$$

so ergiebt sich zunächst durch Reduction mod. 2 nach leichter Rechnung:

$$A + C \equiv A' + C' \pmod 2,$$

sowie daraufhin weiter:

$$\begin{aligned} (A + C)^2 &\equiv (A' + C')^2 \pmod 4, \\ AC &\equiv A'C' \pmod 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Soll nun eine der beiden Zahlen A, C durch 2 theilbar sein, so gilt dies auch von einer der Zahlen A', C'; die Congruenz der beiden übrig bleibenden Zahlen mod. 2 folgt dann aus (5), so dass in diesem Falle unsere Behauptung bewiesen ist. Sind aber A und C zugleich prim gegen 2, so setze man $A' = \varkappa A \pmod 2$ und hat dann (immer in Folge der Primzahleigenschaft von 2 im Körper K) $C' \equiv \varkappa^{-1} C \pmod 2$. Indem man diese Werthe von A', C' in (5) einträgt, entspringt für die ganze Zahl $\varkappa$ die Congruenz:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^4 A^2 + \varkappa^2 (A^2 + C^2) + C^2 &\equiv 0 \\ (\varkappa^2 - 1)(\varkappa^2 A^2 - C^2) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod 2;$$

man hat also nur die beiden Möglichkeiten $\varkappa \equiv 1$ und $\varkappa \equiv A^{-1} C$, so dass die Zahlen A', C' bis auf die Reihenfolge mit A, C mod. 2 übereinstimmen.

Modulo 2 congruente Zahlen des Körpers K liefern modulo 4 congruente Quadrate. Wählt man demnach das Zahlenpaar B, D mod. 2 unter den 64 Möglichkeiten in einer Weise aus, so sind damit die Zahlen A, C als Wurzeln der Congruenz (4) mod. 2 bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. *Hier sind es nun gerade die Congruenzen* (I) *oder die aus ihnen durch Permutation von* A *und* C *entspringenden Congruenzen* (II), *welche die gefundene eindeutige Abhängigkeit der* A *und* C *von* B *und* D *zum Ausdruck bringen.* Das bestätigt sich nun einfach dadurch, dass man die aus (I) entspringenden Ausdrücke für A und C in (4) einsetzt und zeigt, dass dadurch die Congruenz (4) identisch, d. i. unabhängig von B und D erfüllt ist.

Nachdem dieser Punkt erledigt ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass alle Substitutionen U mit der Bedingung (I) die Gruppe $\Gamma_{(63)}$ bilden. Nach (2) § 5 ist dann ohne Weiteres selbstverständlich, dass die Substitutionen U mit der Bedingung (II) die Gruppe $\Gamma'_{(63)} = w_0^{-1}\,\Gamma\,w_0$ bilden.

Der nächste Schritt ist nun zu zeigen, dass die Substitutionen U vom Typus (I) überhaupt eine Gruppe bilden. Combiniren wir also zwei Substitutionen U, U', welche den Bedingungen:

$$(7)\quad \begin{aligned} A &\equiv B + (1+j^2+j^4)\,D, & A' &\equiv B' + (1+j^2+j^4)\,D',\\ C &\equiv (1+j^2+j^4)\,B + D, & C' &\equiv (1+j^2+j^4)\,B' + D' \end{aligned}$$

modulo 2 genügen, zu einer Substitution U'', so werden wieder die vier Gleichungen (4) § 4 zur Anwendung gelangen.

Setzen wir nun in der ersten dieser Gleichungen für A' und C' ihre Werthe (7) ein, so kommt als eine mod. 2 gültige Congruenz:

$$\begin{aligned} 2A'' \equiv B'[&A + j^2B + (1+j^2+j^4)\,C]\\ &+ D'[(1+j^2+j^4)\,A + C + j^2D]. \end{aligned}$$

Hier sind nun beide rechts stehende Klammern auf Grund der Formeln (7) durch 2 theilbar, so dass A'' eine *ganze* Zahl ist. Nicht anders ist der Beweis, dass auch B'', C'', D'' ganze Zahlen sind, und damit haben wir als erstes Resultat dieses, *dass U'' in der That wieder eine Substitution U ist.*

Es bleibt übrig zu zeigen, dass für U'' auch wieder die Congruenzen (I) in Geltung sind. Zu diesem Ende führe ich die Bezeichnungen ein:

$$(8)\quad \begin{cases} 2\mathsf{A} = +A' + B' + (1+j^2+j^4)\,D',\\ 2\mathsf{B} = +A' + j^2B' + (1+j^2+j^4)\,C',\\ 2\Gamma = +C' - D' + (1+j^2+j^4)\,B',\\ 2\Delta = -C' + j^2D' + (1+j^2+j^4)\,A', \end{cases}$$

wobei auf Grund von (7) die $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ *ganze* Zahlen des Körpers K sind. Jetzt berechnet man aus (4) § 4 folgende Congruenz mod. 4:

$$2[A'' + B'' + (1+j^2+j^4)\,D''] \equiv 2A\mathsf{A} + 2B\mathsf{B} + 2C\Gamma + 2D\Delta.$$

Indem wir durch 2 heben, A und C aber auf Grund von (7) durch B und D ausdrücken, folgt weiter mod. 2:

$$\begin{aligned} (9)\quad A'' + B'' + (1+j^2+j^4)\,D'' \equiv{}& B(\mathsf{A} + \mathsf{B} + (1+j^2+j^4)\,\Gamma]\\ &+ D[(1+j^2+j^4)\,\mathsf{A} + \Gamma + \Delta]. \end{aligned}$$

Aber aus (8) ergiebt sich mit Rücksicht auf (7) mod. 4 das Folgende:

$$2[\mathsf{A} + \mathsf{B} + (1+j^2+j^4)\,\Gamma] \equiv 2[A' + j^2B' + (1+j^2+j^4)\,C'] \equiv 0,$$

$$2[(1+j^2+j^4)\mathsf{A} + \Gamma + \Delta] \equiv 2(1+j^2+j^4)[A' + B' + (1+j^2+j^4)\,D'] \equiv 0.$$

Die Congruenz (9) liefert daraufhin $A'' \equiv B'' + (1 + j^2 + j^4) D'' \pmod 2$, welches die erste Congruenz (I) ist. Hiernach ist aber die zweite Congruenz (I) von selbst mit erfüllt: *Die Substitutionen U vom Typus (I) bilden demnach wirklich eine Gruppe.*

§ 8.

Fortsetzung: Beweis für die Identität der Gruppe der Substitutionen U vom Typus (I) mit der $\Gamma_{(63)}$ der Function (2, 3, 7).

Es soll jetzt weiter gezeigt werden, dass die Gruppe der Dreiecksfunction (2, 3, 7) in der Gestalt $\Gamma_{(63)}$ jedenfalls in der Gruppe der Substitutionen U vom Typus (I) enthalten ist. Zu dem Zwecke berechnen wir ein System zweier erzeugenden Substitutionen s und t für die $\Gamma_{(63)}$. Dabei soll als elementares Ausgangsdreieck der Eintheilung (2, 3, 7) dasjenige gelten, welches innerhalb des oben fixirten Ausgangssiebenecks am Eckpunkt $\eta = i$ gelegen ist; mit seinem Spiegelbilde an der imaginären Axe vereinen wir dieses Dreieck zum Fundamentalbereich der Gruppe $\Gamma_{(63)}$. Dann sei s diejenige Substitution der Periode 7, welche die linke Seite des Doppeldreiecks in die rechte überführt, während t einfach die bekannte Gestalt $\eta' = \frac{-1}{\eta}$ gewinnt.

Um die Substitution $s = \left(\begin{smallmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{smallmatrix}\right)$ explicite darzustellen, bemerken wir, dass die Fixpunkte von s auf der imaginären Axe liegen werden; dieserhalb ist $\alpha = \delta$. Nehmen wir sogleich die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 4$, so wird s dieselbe Summe des ersten und vierten Coefficienten aufweisen müssen, wie die in (9) § 2 gegebene Substitution S; denn beide Substitutionen S und s drehen die η-Ebene um ihre Fixpunkte herum durch den Winkel $\frac{2\pi}{7}$. Es ist also:

$$\alpha = \delta = 1 + 3j^2 + j^4.$$

Endlich soll st die Periode *drei* aufweisen, und dieserhalb ist $\beta - \gamma = \pm 2$, worauf sich aus $\alpha\delta - \beta\gamma = 4$ noch $-\beta\gamma = 1 - j^2$ ergiebt. Die Substitution s hat daraufhin in der That die Gestalt einer Substitution U, indem:

$$A = 1 + 3j^2 + j^4, \quad B = 0, \quad C = \pm 1, \quad D = \pm 1$$

ist; und zugleich ist evident, *dass der Typus (I) vorliegt.* Durch die doppelten Vorzeichen bei C und D werden uns aber zugleich die Substitutionen s, s^{-1}, tst, $ts^{-1}t$ geliefert, und wir treffen das Richtige, indem wir:

$$(1) \qquad s(\eta) = \frac{(1 + 3j^2 + j^4)\,\eta + (1 + j)}{(-1 + j)\,\eta + (1 + 3j^2 + j^4)}, \quad t(\eta) = \frac{-1}{\eta}$$

schreiben.

Man frage jetzt zweitens nach der Gesammtheit der *elliptischen* Substitutionen U. Dieselben sind durch die Forderung $-2 < A < 2$ charakterisirt, und wir finden analog wie in § 1, dass unter den für uns in Betracht kommenden Zahlen A nur die zwei rationalen:

$$A = 0, \quad A = 1 \tag{2}$$

sowie die drei conjugirten Zahlen:

$$A = 1 + 3j^2 + j^4, \quad A = 1 + j^2, \quad A = 1 - 2j^2 - j^4 \tag{3}$$

jener Forderung genügen können. Die beiden Werthe (2) liefern elliptische Substitutionen der Perioden *zwei* und *drei*, die drei Werthe (3) aber solche der Periode sieben. Diese drei conjugirten Zahlen (3) vertheilen sich dabei so, dass z. B. im Falle der Substitution s die erste Zahl $(1 + 3j^2 + j^4)$ für s und s^{-1} zur Geltung kommt, die zweite, $1 + j^2$, für s^2 und s^{-2}, endlich $1 - 2j^2 - j^4$ für s^{+3}, s^{-3}. Merken wir vor allen Dingen an: *In der Gruppe der Substitutionen U kommen an elliptischen Substitutionen nur solche der Perioden* 2, 3 *und* 7 *vor.*

Demnächst erweitere man in gewohnter Art die Gruppe der U vom Typus (I) durch die Spiegelung an der imaginären Axe. Die damit entspringende Gruppe wird die Gruppe $\bar{\Gamma}_{(63)}$ als Untergruppe enthalten. Indem man also das Diagramm der Symmetriekreise für die Spiegelungen $\overline{U}$ in der η-Halbebene entwirft, wird jedenfalls die gesammte Eintheilung (2, 3, 7) der $\bar{\Gamma}_{(63)}$ mitgezeichnet sein. Aber nun ist wieder geometrisch sehr leicht zur Evidenz zu bringen, dass das einzelne Kreisbogendreieck (2, 3, 7) nicht noch von einem weiteren zur reellen η-Axe orthogonalen Kreise durchzogen sein kann, der die Seiten jenes Dreiecks ausschliesslich unter Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{2\nu\pi}{3}, \frac{2\nu\pi}{7}$ träfe*). Gerade wie auch bei den früheren analogen Gelegenheiten basiert die Ueberlegung auch jetzt wieder auf dem Umstande, dass beim System der Symmetriekreise der Spiegelungen $\overline{U}$ immer nur Kreuzungspunkte zu je *zwei*, *drei* bez. *sieben* Kreisen auftreten können.

Es ist solchergestalt der Nachweis geführt, dass das Diagramm der Symmetriekreise der Spiegelungen $\overline{U}$ vom Typus (I) gerade die Dreieckstheilung (2, 3, 7) der η-Halbebene ausmacht. Wir haben dann nur noch in gewohnter Art darauf hinzudeuten, dass das Kreisbogendreieck (2, 3, 7) *nur* durch die identische Substitution in sich transformirt werden kann; *damit ist dann die genaue Identität der Gruppe der Substitutionen U, $\overline{U}$ vom Typus (I) mit der Gruppe* $\bar{\Gamma}_{(63)}$

*) Man wolle hierbei Fig. 2 heranziehen, wo der Hauptkreis leicht hinzuconstruirt wird; noch zweckmässiger ist der Gebrauch der Fig. 33, welche im ersten Bande der „*Vorles. über die Modulfunctionen*" p. 109 mitgetheilt ist.

der s-Function (2, 3, 7) *zum Nachweis gebracht.* Die arithmetische Formulirung der unterschiedenen hier in Betracht kommenden Arten von Fixpunkten ect. wird man jetzt mühelos nachtragen. —

§ 9.

Vom Princip der Congruenz-Untergruppen.

In meiner dritten Arbeit über die Poincaré'schen Gruppen*) habe ich zwei Anwendungen dieser Gruppen ausführlich erörtert, einmal auf die Theorie gewisser binärer quadratischer Formen, denen hier die Formen:

$$(1) \qquad (A + jB)\, x^2 + 2Cxy - (A - jB)\, y^2$$

entsprechen würden, sodann aber auf die zur einzelnen Poincaré'schen Gruppe gehörende Transformationstheorie. Beide Male galten als Prototyp die Verhältnisse der Modulgruppe, wo auf der einen Seite die Gauss'sche Zahlentheorie, auf der anderen aber die Transformationstheorie der elliptischen Functionen zur Geltung kam. Die Theorie der Formen (1) gestaltet sich nun wenigstens in ihrem elementaren Theile genau so, wie die Theorie der binären quadratischen Formen mit *rationalen* ganzen Coefficienten. Aehnliches gilt wohl auch von der anderen Anwendung; dabei nimmt die Betrachtung der zu den Gruppen Γ, $\Gamma_{(7)}$, $\Gamma_{(14)}$, $\Gamma_{(63)}$ gehörenden Transformationstheorie eine für die Theorie der Modulfunctionen interessante Wendung, und eben dieserhalb verweile ich bei dem fraglichen Gegenstande noch einen Augenblick.

Indem ich gar nicht eine erschöpfende Beschreibung der in Betracht kommenden Verhältnisse anstrebe, wende ich mich sogleich zu der besonderen Gruppe $\Gamma_{(63)}$ der Dreiecksfunction (2, 3, 7) und verstehe jetzt unter n eine ungerade positive rationale ganze Zahl. Man betrachte dann die Congruenz:

$$(2) \qquad j^6 + 4j^4 + 3j^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

und hat in Betreff der Reducibilität derselben mehrere Fallunterscheidungen zu machen.

Voran steht offenbar der Fall, dass die Congruenz (2) durch eine ganze Zahl befriedigt werden kann. Indem wir n so gewählt annehmen und, falls mehrere Wurzeln von (2) existiren, eine einzelne nach Belieben auswählen, können wir offenbar durch Einsetzung dieser Wurzel die durch 2 dividirten Coefficienten der einzelnen Substitution U (vom Typus I**)) mit vier ganzen rationalen Zahlen α, β, γ, δ der Determinante 1 mod. n congruent setzen:

*) Bd. 39 der vorliegenden Annalen p. 62.

**) Ich füge diesen Zusatz weiterhin nicht immer auf's Neue hinzu.

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{A+jB}{2} &\equiv \alpha, & \frac{C+jD}{2} &\equiv \beta \\ \frac{-C+jD}{2} &\equiv \gamma, & \frac{A-jB}{2} &\equiv \delta \end{aligned}\right\} \text{(mod. } n\text{)}.$$

Hierdurch ist, wie man sofort überblickt, eine homomorphe) Beziehung der Gruppe $\Gamma_{(63)}$ auf die Gruppe der mod. n incongruenten Substitutionen mit rationalen ganzen Coefficienten der Determinante* 1 *begründet.* Diese letztere Gruppe will ich $G_{\mu(n)}$ nennen; ihre Ordnung ist bekanntlich:

$$\mu(n) = \frac{n^3}{2}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_2^2}\right)\cdots,$$

wo $q, q_1, \ldots$ die Primfactoren von n sind.

Die Beziehung beider Gruppen ist dabei eine derartige, dass einer einzelnen Substitution U *eine* Substitution der G_μ entspricht, während umgekehrt einer Operation der G_μ immer *unendlich viele* U zugeordnet sind. Indessen hätte man doch hierbei noch den Nachweis zu führen, dass auch Substitutionen aller Typen mod. n in $\Gamma_{(63)}$ enthalten sind; im Falle einer Primzahl $n = q$ möchte dieser Nachweis deshalb gar keine Schwierigkeit machen, weil wir da eine abgeschlossene Kenntniss von der Structur der G_μ besitzen.

Ist q eine beliebige unter den in n aufgehenden Primzahlen, so hat die Congruenz (2) selbstverständlich auch mod. q eine Lösung. In der $G_{\mu(q)}$ müssen sich also cyklische Untergruppen der Ordnung *sieben* finden; denn eine solche wird schon durch die Substitution s geliefert. Es folgt, dass q entweder gleich 7 oder mod. 7 mit ± 1 congruent sein muss: *Nur für diejenigen n können die vorstehend skizzirten Verhältnisse eintreten, welche ausser einer etwaigen Potenz von* 7 *nur Primfactoren der Gestalt $q = 7h+1$ und $q = 7h-1$ aufweisen.*

Der identischen Operation der Gruppe G_μ entspricht innerhalb der $\Gamma_{(63)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index $\mu(n)$, welche als *Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe* zu bezeichnen ist. Die zugehörige Fläche $F_{\mu(n)}$ trägt eine regulär-symmetrische Eintheilung in $2\mu(n)$ Dreiecke, die sich um ihre Ecken zu zwei, drei und *sieben* schaaren. Diese Fläche steht offenbar in engster Beziehung zu der bei der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen an gleicher Stelle auftretenden Fläche $F_{\mu(n)}$. Beide Male ist die Anzahl der Bereiche der regulär-symmetrischen Eintheilung die gleiche, und die beider-

*) Im Anschluss an einen von Hrn. Klein bei seinen neueren Vorlesungen eingeführten Brauch schreibe ich an Stelle der bisherigen Bezeichnung „meroedrischer Isomorphismus" die sinngemässere „Homomorphismus". „Isomorphismus" schlechthin wird dann, was man sonst „holoedrischen Isomorphismus" nannte.

seitigen Gruppen der Transformationen der Flächen in sich sind genau isomorph. Aber die eine Eintheilung trägt den Typus (2, 3, 7), die andere (2, 3, n), und dies hat insbesondere die Folge, *dass unter beiden Flächen die von der* $\Gamma_{(63)}$ *gelieferte das geringere Geschlecht aufweist.*

Dass die innerhalb der Modulgruppe ausgezeichnete Hauptcongruenzgruppe 7ter Stufe Γ_{168} die Gruppe des gleichen Charakters innerhalb $\Gamma_{(63)}$ liefert, liegt sehr nahe. Wir bestätigen dies direct, indem wir für $n = 7$ als Wurzel von (2) insbesondere $j \equiv 1$ auswählen. Dann wird nämlich:

$$s \equiv \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad t \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad s^{-\nu}(s^3 t)^4 s^{\nu} \equiv 1 \pmod 7,$$

wobei in der letzten Congruenz $\nu = 0, 1, \ldots, 6$ genommen werden soll; diese sieben Substitutionen $s^{-\nu}(s^3 t)^4 s^{\nu}$ aber bilden ein System von Erzeugenden für die in Rede stehende Untergruppe von Γ_{168}*). Die nächste Ordnung n, auf welche unsere Betrachtungen Anwendung finden, ist $n = 13$, wo $j \equiv 3$ eine brauchbare Wurzel ist; weiter folgt $n = 29$ mit $j \equiv 8$, und es giebt überhaupt unendlich viele Ordnungen n, welche den beschriebenen einfachsten Charakter zeigen.

In der Theorie der Modulfunctionen hatten wir nun für die gesammten Untergruppen der Modulgruppe eine Classeneintheilung vorgeschlagen nach einem Principe, welches man l. c. pag. 360 ff. nachlesen wolle. Die Sachlage ist, dass uns jetzt von den Untergruppen der $\Gamma_{(63)}$ gerade die gesammten Untergruppen 7ter Classe der Modulgruppe geliefert werden. Indem wir also gleich die Wendung auf die vorbestimmten Congruenzgruppen innerhalb $\Gamma_{(63)}$ nehmen und da insbesondere die niedersten Resolventen heranziehen, entspringt das Resultat: *Bereits im Gebiete der Modulfunctionen siebenter Classe giebt es für unendlich viele Ordnungen n Resolventen* $f(J', J) = 0$, *welche mit den bezüglichen in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen auftretenden Modulargleichungen in Grad, Vertauschbarkeit der Argumente und Monodromiegruppe volle Uebereinstimmung zeigen.* Anders dagegen ist Geschlecht und Verzweigung, die wir beiderseits antreffen, und hier sind beim einzelnen n die von $\Gamma_{(63)}$ gelieferten Resolventen dadurch ausgezeichnet, *dass ihre Galois'schen Resolventen das denkbar geringste Geschlecht aufweisen, welches wir überhaupt bei stehendem Werthe n innerhalb des Bereichs der Modulfunctionen antreffen können.*

Verschieden vor allen Dingen gestaltet sich beiderseits der gesammte *arithmetische* Charakter unserer beiden Arten von Resolventen

*) Hierbei mag bemerkt werden, dass man natürlich auch von $\Gamma_{(14)}$ aus eine Fläche mit der bekannten Gruppe G_{168} aber mit einer regulär-symmetrischen Eintheilung vom Typus (2, 4, 7) gewinnen kann.

der Modulgleichung. Werden schon die eigentlichen Galois'schen Gruppen durchaus verschieden sein, so bekommt ja eine Resolvente siebenter *Classe* erst dadurch den Charakter einer „Transformationsgleichung", dass man J als automorphe Function in Abhängigkeit von η betrachtet. Da treten dann an Stelle der Classenanzahlen, der singulären Moduln ect. der gewöhnlichen Theorie die gleichen Begriffe, gebildet für eine Theorie der quadratischen Formen von der unter (1) § 9 gegebenen Gestalt. — Es wäre gewiss interessant, diese Ergebnisse am Beispiele $n = 13$ des näheren zu erläutern; aber ich muss darauf wohl ein ander Mal zurückkommen.

Braunschweig, am 10. März 1892.

On the Covariants of a System of Quantics.

By

W. E. Story of Worcester, Mass., U. S. A.

In a far-reaching and invaluable contribution to the Theory of Algebraic Forms (this journal, vol 36, pp. 473—534) Mr. Hilbert has given a proof of the finiteness of the complete system of fundamental covariants and invariants of a system of quantics involving any number of variables (Gordan's Theorem). The proof proceeds by three steps:

1) the linear expression of any invariant in terms of a finite number of determinate invariants;

2) the replacement of the coefficients in this expression by invariants;

3) the repeated application of the first two steps to the coefficients until the invariant is expressed rationally in terms only of the finite number of invariants.

The first step of the proof rests upon a fundamental theorem for infinite systems of forms (Theorem *A* of this paper, Theorem *I* of Hilbert's), and the third step presents no difficulty as soon as the first two have been taken.

For binary quantics the second part of Hilbert's proof depends on the theorem:

„Jede homogene und isobare Function der Coefficienten einer binären Form

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

vom Grade r in den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und vom Gewichte $p = \frac{nr}{2}$ geht nach Anwendung des Differentiationsprocesses

$$[\,] = 1 - \frac{\Delta D}{1!\,2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!\,3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!\,4!} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{D\Delta}{1!\,2!} + \frac{D^2\Delta^2}{2!\,3!} - \frac{D^3\Delta^3}{3!\,4!} + \cdots$$

worin

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots,$$

$$\Delta = n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots$$

zu setzen ist, in eine Invariante jener Grundform über."

No more elegant proof could be imagined than that derived by Hilbert from this theorem. But when he comes to the case of more than two variables he says.

„Wenn es sich nun um Grundformen von mehreren Veränderlichen handelt, so kann dieser zweite Schritt nicht genau in der nämlichen Weise wie vorhin ausgeführt werden, weil diejenigen Sätze noch nicht bekannt sind, welche in der Invariantentheorie der Formen mit mehr Veränderlichen dem vorhin für das binäre Formengebiet ausgesprochenen Satze entsprechen. Aber in jenem allgemeineren Falle leistet den gleichen Dienst ein Satz, welcher im wesentlichen mit einem von P. Gordan und F. Mertens bewiesenen Satze übereinstimmt und für ternäre Formen, wie folgt, lautet: . . ."

While the method employed in these more general cases is perfectly satisfactory, it seems desirable that the more elegant method by which the result is obtained for binary quantics should be extended to quantics of any number of variables. This extension I make in the present paper. It seems not impossible that this generation of all the covariants and invariants of systems of quantics may lead to the solution of other questions relating covariants and invariants. I may say here that my method gives by one and the same process covariants and invariants, as indeed could Hilbert's method for quantics of more than two variables (and for binary quantics if the terms $-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ and $-x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ respectively were added to his operators D and Δ); but Hilbert does not so employ it, regarding covariants of the system as invariants of the system augmented by as many linear quantics as there are sets of variables.

The extended operator is found in section 3, to which section 2 is preparatory. The point of view from which covariants in general are considered is that of Professor Cayley's early "Memoirs upon Quantics" (Phil. Trans.); namely, they are regarded as special cases of what Professor Sylvester calls "differentiants" or "semi-invariants".

Partly for the sake of greater completeness, and partly to exhibit the elementary character of the proof, I have reproduced, in section 1, Hilbert's demonstration of the fundamental theorem for infinite systems of forms with modifications that I believe will be found to have some advantages.

Finally, in section 4, I apply the operator determined in the

preceding section to the proof of Gordan's Theorem for any system of quantics. Other proofs of the theorem for binary quantics have been given by Gordan (Vorlesungen über Invariantentheorie, vol. II, p. 231, and elsewhere), Mertens (Crelle's Journal, vol. 100, p. 223), and by Hilbert (Math. Ann. vol. 33, p. 223), but I have made no use of them in this paper.

I have not thought it necessary to refer explicitly to all the writings of Cayley and Sylvester that bear more or less directly on the method of treatment in section 2; indeed, it would be difficult to tell which of the numerous articles on this subject published by one or other of the two great English mathematicians during the last forty-seven years do not stand in close connection with it.

§ 1.

Systems of Forms.

By an "algebraic form" we mean a holomorphic polynomial in any number of variables (whose coefficients are not all 0). By the introduction of an additional variable non-homogeneous forms can be made homogeneous, and in this paper we consider only homogeneous forms in n variables $x, y, z, \ldots$. Forms that have a common definition or are subject to the same analytic conditions may be called *homonomous*. A *homonomous system* of forms is a system of homonomous forms. The aggregate of the conditions to which the forms are subject is the *law* of the homonomous system.

Theorem A (*Hilbert's Theorem*): *the forms of any homonomous system involving a finite number of variables, even if infinite in number, can be expressed linearly in terms of a finite number of forms of the system.*

The coefficients in these linear expressions are forms in the given variables but not generally forms of the homonomous system. Thus, if the forms of the homonomous system are $F_1, F_2, F_3, \ldots$, we can express any form F_s of the system by

$$\text{(a)} \qquad F_s \equiv A_{s1}F_1 + A_{s2}F_2 + A_{s3}F_3 + \cdots + F_{s\mu}F_\mu,$$

where $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ are definite forms of the system, whose number is finite, and $A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, \ldots, A_{s\mu}$ are forms in the same variables that differ for different values of s and are not generally forms of the given homonomous system. The only necessary limitations to be put upon the system are that it shall contain forms of finite orders in the variables and that the number of variables shall be finite.

For convenience we suppose the terms of each form of the system to be arranged according to descending powers of one of the variables, say v. If $f(x, y, z, \ldots, u, v)$ is a form of order r in which the

coefficient of v^r is 0, we can introduce new variables $x', y', z', \ldots, u', v'$ by a linear transformation whose determinant does not vanish so that the coefficient of v'^r in the transformed form shall not vanish. Namely, if $a, b, c, \ldots, d, e$ are the coefficients of v' in the expressions of $x, y, z, \ldots, u, v$, respectively, in terms of $x', y', z', \ldots, u', v'$, the coefficient of v'^r in the form derived from $f(x, y, z, \ldots, u, v)$ by the transformation is $f(a, b, c, \ldots, d, e)$, and $a, b, c, \ldots, d, e$ can be taken in an infinite number of ways so that $f(a, b, c, \ldots, d, e)$ shall not vanish. When $a, b, c, \ldots, d, e$ have been so taken (and they cannot then all be 0), we can evidently take the remaining coefficients of substitution in an infinite number of ways so that the determinant of substitution shall not vanish. Suppose that this substitution transforms $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_s, \ldots$ into $F_1', F_2', F_3', \ldots, F_s', \ldots$; if Theorem A is true for the transformed system, so that

$$F_s' \equiv A_{s1}' F_1' + A_{s2}' F_2' + A_{s3}' F_3' + \cdots + A_{s\mu}' F_\mu'$$

for every value of s, the inverse of the transformation in question when applied to this identity gives the identity (a), and the theorem is true for the given system.

We may therefore assume, for the purpose of proving the theorem, that in a certain form F_1 of finite order r (preferably a form of as low an order as any form in the system) v^r actually occurs with a coefficient different from 0. It is evidently possible to carry on the division of every form F_s in the system by this form F_1 until the remainder has no term containing a power of v whose exponent exceeds $r - 1$. That is, we shall have

$$\text{(b)} \qquad F_s \equiv B_{s1} F_1 + G_s v^{r-1} + H_s,$$

where G_s is a form in $x, y, z, \ldots, t$ (without v) and H_s has no term in which v occurs to a power whose exponend exceeds $r - 2$. Now G_s is evidently completely determined by F_s and F_1, so that the forms G_s for all values of s constitute a homonomous system in the variables $x, y, z, \ldots, u$. We assume that Theorem A is true for any homonomous system of forms in any number of variables less than the number of variables in the given system; i. e. we assume that it is true for the system of forms G_s.

Suppose that we have proved it to be possible to put

$$\text{(c)} \quad F_s \equiv B_{s1} F_1 + B_{s2} F_2 + B_{s3} F_3 + \cdots + B_{s\alpha} F_\alpha + M_s v^k + N_s$$

for every value of s, where $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\alpha$ are forms of the given system, M_s and N_s are determinate forms of which M_s does not contain v and N_s has no term containing v to a power whose exponent exceeds $k - 1$. The forms M_s then constitute a homonomous system, for which the theorem is true, by assumption, and therefore

(d) $M_s \equiv C_{s,\alpha+1} M_{\alpha+1} + C_{s,\alpha+2} M_{\alpha+2} + C_{s,\alpha+3} M_{\alpha+3} + \cdots + C_{s,\beta} M_\beta,$

where $M_{\alpha+1}, M_{\alpha+2}, M_{\alpha+3}, \ldots, M_\beta$ are the coefficients of v^k in a finite number of forms $F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, F_{\alpha+3}, \ldots, F_\beta$ expressed as in (c), and $C_{s,\alpha+1}, C_{s,\alpha+2}, C_{s,\alpha+3}, \ldots, C_{s,\beta}$ are forms in the variables $x, y, z, \ldots, u$ (without v, since v does not occur in M_s). It is evidently not necessary that the forms $F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, F_{\alpha+3}, \ldots, F_\beta$ shall be all different from the forms $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\alpha$. From (c) we have

(e)
$$\begin{cases} M_{\alpha+1}v^k \equiv F_{\alpha+1} - B_{\alpha+1,1}F_1 - B_{\alpha+1,2}B_2 - B_{\alpha+1,3}F_3 - \cdots - B_{\alpha+1,\alpha}F_\alpha - N_{\alpha+1}, \\ M_{\alpha+2}v^k \equiv F_{\alpha+2} - B_{\alpha+2,1}F_1 - B_{\alpha+2,2}F_2 - B_{\alpha+2,3}F_3 - \cdots - B_{\alpha+2,\alpha}F - N_{\alpha+2}, \\ M_{\alpha+3}v^k \equiv F_{\alpha+3} - B_{\alpha+3,1}F_1 - B_{\alpha+3,2}F_2 - B_{\alpha+3,3}F_3 - \cdots - B_{\alpha+3,\alpha}F_\alpha - N_{\alpha+3}, \\ \quad \text{etc.} \\ M_\beta v^k \equiv F_\beta - B_{\beta,1}F_1 - B_{\beta,2}F_2 - B_{\beta,3}F_3 - \cdots - B_{\beta,\alpha}F_\alpha - N_\beta, \end{cases}$$

and therefore

(f)
$$\begin{cases} M_s v^k \equiv C_{s,\alpha+1}F_{\alpha+1} + C_{s,\alpha+2}F_{\alpha+2} + C_{s,\alpha+3}F_{\alpha+3} + \cdots + C_{s,\beta}F_\beta \\ \quad - (C_{s,\alpha+1}B_{\alpha+1,1} + C_{s,\alpha+2}B_{\alpha+2,1} + C_{s,\alpha+3}B_{\alpha+3,1} + \cdots + C_{s,\beta}B_{\beta,1})F_1 \\ \quad - (C_{s,\alpha+1}B_{\alpha+1,2} + C_{s,\alpha+2}B_{\alpha+2,2} + C_{s,\alpha+3}B_{\alpha+3,2} + \cdots + C_{s,\beta}B_{\beta,2})F_2 \\ \quad - (C_{s,\alpha+1}B_{\alpha+1,3} + C_{s,\alpha+2}B_{\alpha+2,3} + C_{s,\alpha+3}B_{\alpha+3,3} + \cdots + C_{s,\beta}B_{\beta,3})F_3 \\ \quad - \text{etc.} \\ \quad - (C_{s,\alpha+1}B_{\alpha+1,\alpha} + C_{s,\alpha+2}B_{\alpha+2,\alpha} + C_{s,\alpha+3}B_{\alpha+3,\alpha} + \cdots + C_{s,\beta}B_{\beta,\alpha})F_\alpha \\ \quad - (C_{s,\alpha+1}N_{\alpha+1} + C_{s,\alpha+2}N_{\alpha+2} + C_{s,\alpha+3}N_{\alpha+3} + \cdots + C_{s,\beta}N_\beta). \end{cases}$$

The substitution of this expression for $M_s v^k$ in (c) gives F_s linearly in terms of a finite number of forms $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\alpha, F_{\alpha+1}, F_{\alpha+2}, F_{\alpha+3}, \ldots, F_\beta$ plus an expression linear in $N_s, N_{\alpha+1}, N_{\alpha+2}, N_{\alpha+3}, \ldots, N_\beta$ whose coefficients do not contain v, i. e. plus an expression having no term that contains v to a power whose exponent exceeds $k-1$. Therefore, if F_s can be expressed as in (c) for a given value of k, it can also be expressed in a similar manner for a value of k less by 1 than the given value, and thus for any smaller value of k. For $k=0$, we may assume $M_s v^0 + N_s \equiv M_s$, which can be expressed as $M_s v^k$ is in (f); but in this expression the terms corresponding to those that contain $N_{\alpha+1}, N_{\alpha+2}, N_{\alpha+3}, \ldots, N_\beta$ no longer occur, so that F_s is finally expressed linearly as in (a). But (b) is an expression of F_s similar to (c) for $k=r$; therefore Theorem *A* is true for systems whose forms involve a given number of variables if it holds for all systems involving fewer variables.

Now all the forms of any system involving only one variable are (to numerical factors près) powers of that variable and therefore multiples (with variable coefficients, in general) of that one of them that is of lowest order (or of any one of the forms of lowest order, if

there are several such). Therefore Theorem A is true for two, three, etc., and for any number of variables.

Evidently, this method of proof is applicable to cases in which the variables constitute any number of distinct groups such that each form of the system is homogeneous in the variables of each group. But in such cases it will generally be necessary to regard all the variables as forming one set in making the linear transformation by which a given form is made to have a term containing one variable to a power whose exponent is the aggregate order of the form in all the variables. Thus the covariants of a binary quantic of order m are homogeneous in the two variables proper and homogeneous in the $m + 1$ coefficients of the quantic, and these variables and coefficients must be regarded as constituting one set of $m + 3$ variables in making the transformation in question.

A system that contains all the forms that satisfy given conditions (whether analytic or not) is said to be "complete" relatively to those conditions. Thus we speak of the "complete system of covariants", the "complete system of linearly independent covariants", and the "complete system of fundamental covariants (*groundforms*, Grundformen)" of a quantic or system of quantics. Theorem A as above proved holds for *any part* of a complete homonomous system.

If the system in question contains no numerical constants (forms of order 0), the coefficients $A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, \ldots, A_{s\mu}$ in (a) are evidently of lower orders than F_s. If these coefficients are forms of the system, or rational functions of such forms (in particular, linear functions), for all values of s, they can be linearly expressed in terms of $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$; the coefficients in their expressions are forms of the system (or rational functions of such forms) of still lower orders and similarly expressible; and thus we can continue to express the coefficients until we reach such as are linear functions of $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ or numerical constants. On substituting these final coefficients in the preceding ones, and these again in the preceding, and so on until the expression of F_s is reached, we obtain a rational expression of F_s in terms of $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$. If numerical constants occur in the system, they may be omitted in expressing other forms as in (a). Therefore

Theorem B: *if the coefficients of the expressions of all forms of a homonomous system linearly in terms of a finite number of forms of the system are themselves forms of the system (or rational functions of such forms), all forms of the system are expressible as rational functions of a finite number of forms of the system.*

§ 2.

The Analytic Conditions for Covariants and Invariants.

We consider a system of quantics (homogeneous forms) finite in number and of orders $m, m', m'', \ldots$, respectively, in a finite number of variables $x, y, z, \ldots$, which we suppose to be expressed thus:

$$\sum \frac{m!}{g!\,h!\,i!\ldots} a_{g,h,i,\ldots} x^g y^h z^i \ldots \qquad (g+h+i+\cdots=m),$$

$$\sum \frac{m'!}{g!\,h!\,i!\ldots} b_{g,h,i,\ldots} x^g y^h z^i \ldots \qquad (g+h+i+\cdots=m'),$$

$$\sum \frac{m''!}{g!\,h!\,i!\ldots} c_{g,h,i,\ldots} x^g y^h z^i \ldots \qquad (g+h+i+\cdots=m''),$$

etc.

(without excluding the case of a single quantic). For convenience, we speak of $a_{g,h,i,\ldots}$, $b_{g,h,i,\ldots}$, $c_{g,h,i,\ldots}$, etc. freed from the corresponding polynomial coefficients as *the coefficients* of the several quantics; they are assumed to be arbitrary, i. e. having no *determined* numerical values.

By the *weight of any coefficient* relatively to either variable we mean the sum of all the suffices of that coefficient excepting the suffix that corresponds to the variable in question. Thus the weight of $a_{g,h,i,\ldots}$ relatively to x is $h + i + \cdots = m - g$, its weight relatively to y is $g + i + \cdots = m - h$, etc. The *weight of any variable* is 1 relatively to itself and 0 relatively to any other variable. The weight of any product of powers of coefficients and variables relatively to either variable is the aggregate weight of all the factors of that product relatively to the variable in question, the weight of each different factor being taken, in forming this aggregate, as many times as there are units in the exponent of the power to which that factor occurs.

In the present investigation we have to do with holomorphic polynomials in the coefficients of the given quantics and in the variables involved in those quantics, that are homogeneous in the coefficients of each quantic and homogeneous in the variables. We speak of the *degrees* (generally represented by $j, j', j'', \ldots$) of such a polynomial in the coefficients of the several quantics and of its *order* (generally represented by ϑ) in the variables (whose number is generally represented by n). In what follows it is always to be understood that we mean such a polynomical when we speak of a *homogeneous function* of coefficients and variables (which may be of order 0, and then does not involve the variables). If the terms of a homogeneous function

are of the same weight relatively to *each* of the variables (not necessarily of the same weight relatively to the *several* variables), we call it *isobaric*. The degrees, order, and weights of a homogeneous isobaric function characterize the *type* of the function.

When the variables are subjected to a linear transformation, the n original (or "old") variables $x, y, z, \ldots$ are expressed as linear functions of n "new" variables $x', y', z', \ldots$, which are taken to correspond severally to the old variables in this order; these expressions being substituted for the old variables in the given quantics of orders $m, m', m'', \ldots$, the aggregate multiplier of any product of powers of the new variables in either transformed quantic divided by the proper polynomial coefficient is the "new" coefficient corresponding to the coefficient of the analogous product of powers of the old variables in the original quantic. By the result of the transformation on any homogeneous function of coefficients and variables, of degrees $j, j', j'', \ldots$ and of order θ, is meant the result of substituting in the function the new coefficients and the new variables for the old coefficients and the old variables, respectively, and expressing all in terms of the old coefficients and the old variables. We assume that the determinant of substitution has not the value 0. The new coefficients are evidently linear homogeneous functions of the old coefficients, and homogeneous functions of the coefficients of substitution of degrees equal to the orders of the quantics to which they respectively belong. The new variables are linear homogeneous functions of the old variables whose coefficients are fractions having for common denominator a homogeneous function of the coefficients of substitution (the determinant of substitution) of degree n, and for numerators homogeneous functions of the coefficients of substitution (first minors of the determinant of substitution) of degree $n - 1$. The effect of a linear transformation on the homogeneous function of coefficients and variables is, then, to change it into a homogeneous function of the same degree in the coefficients and of the same order in the variables as the original function, but involving the coefficients of substitution homogeneously to the degree $\Sigma mj - \theta$, where $\Sigma mj = mj + m'j' + m''j'' + \cdots$. Namely, the result of the transformation is holomorphic in the coefficients of the quantics and in the variables and is otherwise a homogeneous function of the coefficients of substitution of degree $\Sigma mj + (n-1)\theta$ divided by the determinant of substitution to a power whose exponent is θ.

A linear transformation is completely characterized by its coefficients; the transformation characterized by the coefficients of the expressions of the new variables in terms of the old is the *inverse* of that characterized by the coefficients of the expressions of the old

variables in terms of the new. The new coefficients may be called the coefficients *transformed by the given transformation.* The new variables need not be represented by special symbols in determining the effect of the transformation; the result on any homogeneous function is evidently found by transforming the coefficients of the quantics by the given transformation and the variables by the inverse of the given transformation. When we say that a linear transformation has certain effects on the variables we mean that the effect of this transformation is to replace the old variables by certain linear expressions in the new variables.

We consider particulary two simple kinds of linear transformations (we prove in XV that all linear transformations can be compounded of these), which we shall call *expansions* and *shears*, respectively.

An *expansion* relatively to a given variable is a transformation by which that variable receives a constant multiplier called the *modulus of expansion*, while all other variables remain unaltered. The equations of an expansion relatively to x are

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varrho x', & y = y', & z = z', \ldots, \\ x' = \varrho^{-1} x, & y' = y, & z' = z, \ldots; \end{cases}$$

and we express this in words by saying that x is multiplied by ϱ, the modulus of the expansion. By this expansion any coefficient of either of the given quantics is evidently multiplied by a power of ϱ whose exponent is the value of g for that coefficient, i. e. whose exponent is the order of the quantic in question less the weight of the coefficient relatively to x. At the same time x is divided (in the inverse transformation) by ϱ. Thus any homogeneous isobaric function of degrees $j, j', j'', \ldots$ in the coefficients of the several quantics, of order θ in the variables, and of weights $w_x, w_y, w_z, \ldots$ relatively to the several variables, is multiplied by a power of ϱ whose exponent is $\Sigma mj - w_x$ when this expansion relatively to x is imposed on the variables. The modulus of expansion is evidently equal to the determinant of substitution. Therefore

I. *every homogeneous isobaric function of the coefficients of a system of quantics and of the variables is simply multiplied by a power of the determinant of substitution in consequence of any expansion; and every homogeneous function of the coefficients and variables that is simply multiplied by a power of the determinant of substitution in consequence of every expansion is isobaric.*

Namely, every homogeneous function that is not isobaric is an aggregate of isobaric functions of different weights relatively to one or more of the variables, which will be multiplied by different powers

of the determinant of substitution in consequence of one or other of the possible expansions.

A *shear* relatively to a given pair of variables taken in a definite order is a linear transformation by which the second of the given variables receives as increment a constant multiple of the first, while all the other variables remain unaltered. The equations of a shear relatively to yx are

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x' + \lambda y', \quad y = y', \quad z = z', \ldots, \\ x' = x - \lambda y, \quad y' = y, \quad z' = z, \ldots; \end{cases}$$

and we express this in words by saying that x is increased by λy. We may call λ the *modulus of shearing*. The determinant of substitution corresponding to any shear has evidently the value 1. It is easily proved that the shear (2) changes any homogeneous function φ into

$$(3) \qquad \varphi + \lambda \cdot \widehat{yx} \cdot \varphi + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \widehat{yx}^2 \cdot \varphi + \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \widehat{yx}^3 \cdot \varphi + \text{etc.},$$

where the differential operator $\widehat{yx}$ is defined by

$$(4) \qquad \begin{cases} \widehat{yx} \equiv \sum h \cdot a_{g+1,h-1,i,\ldots} \dfrac{\partial}{\partial a_{g,h,i,\ldots}} \\ \quad + \sum h \cdot b_{g+1,h-1,i,\ldots} \dfrac{\partial}{\partial b_{g,h,i,\ldots}} \\ \quad + \sum h \cdot c_{g+1,h-1,i,\ldots} \dfrac{\partial}{\partial c_{g,h,i,\ldots}} + \text{etc.} - y \dfrac{\partial}{\partial x}, \end{cases}$$

and similarly for other shears*). Each summation in this formula extends to all possible combinations of values of $g, h, i, \ldots$ ($h \geqq 1$, and $g \leqq$ the order of the corresponding quantic less 1) and the several sums $+$ etc. refer to the several quantics of the system. It is to be observed that $\widehat{yx}$ increases by 1 the weight relatively to y and diminishes by 1 the weight relatively to x of any homogeneous isobaric function of coefficients and variables to which it is applied, while it leaves unchanged the weights relatively to the other variables and the degrees an order.

---

*) Cayley, Memoire sur les hyperdéterminants, Crelle's J., vol. 30, p. 5; Nouvelles Recherches sur les covariants, Crelle's J., vol. 47, pp. 110—111, where $\widehat{yx}$ is represented by $\square - y\partial_x$ (for a single binary quantic); An Introductory Memoir upon Quantics, Phil. Trans., 1854, pp. 245—258, where $\widehat{yx}$ is represented by $\Sigma\{y\partial_x\} - y\partial_x$; Second Memoir upon Quantics, Phil. Trans., 1856, where $\widehat{yx}$ and $\widehat{xy}$ are represented by X and Y (for binary quantics). See also Salmon, Modern Higher Algebra, 4 ed., pp. 63—66.

The necessary and sufficient condition that every shear relatively to yx shall leave unaltered (i. e. shall simply multiply by a power of the determinant of substitution, which is 1 in this case) a given function φ is evidently that $\widehat{yx} \cdot \varphi$ shall vanish identically, i. e.

$$\widehat{yx} \cdot \varphi \equiv 0; \tag{5}$$

if this condition is satisfied φ shall be called an *yx-differentiant* or a *differentiant relatively to yx**). A homogeneous function that is unaltered by every shear relatively to a pair of variables of a given set shall be called a *complete differentiant* relatively to the variables of that set.

Homogeneous functions of the coefficients of the quantics of a given system and of the variables that are simply multiplied by a power of the determinant of substitution when any linear transformation is imposed upon the variables are *covariants* or *invariants* of the given system, according as they do or do not involve the variables explicitly. Thus invariants are covariants of order 0; as the presence or absence of the variables is immaterial for our purpose, we propose to employ only the word "covariant", with the understanding that it always means *covariant or invariant.*

From this definition follows that every covariant is unaltered by any shear and is simply multiplied by a power of the determinant of substitution when the variables are subjected to any expansion. By I, then, every covariant is an isobaric complete differentiant relatively to all the variables. We have seen that the result of any linear transformation on a homogeneous function of coefficients and variables is homogeneous of degree $\Sigma mj - \vartheta$ in the coefficients of substitution (in the notation above adopted); the coefficients of substitution must disappear from a transformed covariant when we divide it by a power of the determinant of substitution, which is homogeneous of order n in these coefficients; therefore the exponent of the power of the determinant of substitution by which a covariant is multiplied is $\frac{1}{n}(\Sigma mj - \vartheta)$. Moreover we have seen that an expansion relatively to x multiplies a homogeneous isobaric function by a power of the determinant of substitution whose exponent is $\Sigma mj - w_x$, and similarly for expansions relatively to the other variables. Therefore, for a covariant

$$\frac{1}{n}(\Sigma mj - \vartheta) = \Sigma mj - w_x = \Sigma mj - w_y = \Sigma mj - w_z = \cdots,$$

i. e.

---

*) The word "differentiant" is used by Sylvester in this sense in his Proof of the hitherto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants, Phil. Mag., 1878 (March).

$$w_x = w_y = w_z = \cdots = \frac{1}{n}[(n-1)\,\Sigma mj + \vartheta].$$

We have then that

II. *Every covariant of a given system of quantics of orders* $m, m', m'', \ldots$ *in* n *variables that is of degrees* $j, j', j'', \ldots$ *in the coefficients of the several quantics and of order* ϑ *in the variables is an isobaric complete differentiant relatively to all the variables, of the same weight* $\frac{1}{n}[(n-1)\,\Sigma mj + \vartheta]$ *relatively to each of the variables, and is multiplied by a power of the determinant of substitution whose exponent is* $\frac{1}{n}(\Sigma mj - \vartheta)$ *when any linear transformation is imposed upon the variables.*

From this theorem follows that, for any covariant, $\Sigma mj - \vartheta$ is divisible by n.

If φ is a homogeneous function that is not isobaric, the condition (5) will be satisfied for φ only when it is satisfied for every isobaric part of φ, i. e. *every differentiant is an aggregate of isobaric differentiants.* We assume in the rest of this investigation that φ is a homogeneous isobaric function of the coefficients of the quantics of the given system and of the variables, of degrees $j, j', j'', \ldots$, of order ϑ, and of weights $w_x, w_y, w_z, \ldots$, otherwise arbitrary unless the conditions to which it is subject are expressly stated.

It is easy to see that

$$(6)\quad \begin{cases} \widehat{xy}\cdot\widehat{yx^\alpha}\cdot\varphi \equiv \widehat{yx^\alpha}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi + \alpha(w_x - w_y - \alpha + 1)\cdot\widehat{yx^{\alpha-1}}\cdot\varphi^*), \\ \widehat{xy}\cdot\widehat{yz^\beta}\cdot\varphi \equiv \widehat{yz^\beta}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi - \beta\cdot\widehat{yz^{\beta-1}}\cdot\widehat{xz}\cdot\varphi, \\ \widehat{xy}\cdot\widehat{zx^\gamma}\cdot\varphi \equiv \widehat{zx^\gamma}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi + \gamma\cdot\widehat{zx^{\gamma-1}}\cdot\widehat{zy}\cdot\varphi, \\ \widehat{xy}\cdot\widehat{xz}\cdot\varphi \equiv \widehat{xz}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi, \quad \widehat{xy}\cdot\widehat{zy}\cdot\varphi \equiv \widehat{zy}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi, \\ \widehat{xy}\cdot\widehat{zs}\cdot\varphi \equiv \widehat{zs}\cdot\widehat{xy}\cdot\varphi, \end{cases}$$

where x, y, z, s are any four *different* variables. The last three of these relations may be expressed thus: any two *shear-symbols* are commutative unless they have a common letter that occupies different places in the two symbols.

As $\widehat{yx}$ reduces by 1 the weight relatively to x, it must be that $\widehat{yx^{w_x+1}}\cdot\varphi \equiv 0$. Let α be the greatest exponent for which $\widehat{yx^\alpha}\cdot\varphi$ does not vanish identically; then we have, by the first identity of (6),

*) This formula is involved in the formulae given by Sylvester, Proof of the hitherto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants, where $\widehat{yx}$ and $\widehat{xy}$ are represented by Ω and O, and $w_y - w_x$ by δ (only for a binary quantic.

$\widehat{yx^{\alpha+1}} \cdot \widehat{xy} \cdot \varphi + (\alpha+1)(w_x - w_y - \alpha) \cdot \widehat{yx^{\alpha}} \cdot \varphi \equiv \widehat{xy} \cdot \widehat{yx^{\alpha+1}} \cdot \varphi \equiv 0,$

so that

$$(\alpha + 1)(w_x - w_y - \alpha) \cdot \widehat{yx^{\alpha}} \cdot \varphi \equiv - \widehat{yx^{\alpha+1}} \cdot \widehat{xy} \cdot \varphi;$$

hence, if φ is an xy-differentiant, since $\widehat{xy} \cdot \varphi \equiv 0$ but $\widehat{yx^{\alpha}} \cdot \varphi \neq 0$,

$$\alpha = w_x - w_y, \tag{7}$$

and $\widehat{yx^{w_x - w_y}}$ is the highest power of $\widehat{yx}$ that can be applied to φ without producing an evanescent result. Therefore $w_x \gtrless w_y$, i. e.

III. *The weight of every xy-differentiant relatively to x is at least as great as its weight relatively to y.**)

If $\widehat{xy} \cdot \varphi \equiv 0$ and $w_x = w_y$, we have, by (7), $\alpha = 0$, i. e. $\widehat{yx} \cdot \varphi \equiv 0$; and conversely, if $\widehat{xy} \cdot \varphi \equiv 0$ and $\widehat{yx} \cdot \varphi \equiv 0$, we have $w_x = w_y$; hence

IV. *Every xy-differentiant that is of the same weight relatively to x as relatively to y is also a yx-differentiant, and every xy-differentiant that is also a yx-differentiant is of the same weight relatively to x as relatively to y.*

In particular,

V. *Every covariant of the given system is of one and the same weight relatively to the several variables.***)

Every shear relatively to xz can be compounded of a shear relatively to xy and a shear relatively to yz; for, if we replace z by $z + y$, then y by $y + \lambda x$, then z by $z - y$, and finally y by $y - \lambda x$, the result is equivalent to a simple replacement of z by $z + \lambda x$; namely x, y, z become successively

$$x, y, z;\ x, y, z + y;\ x, y + \lambda x, z + y + \lambda x;\ x, y + \lambda x, z + \lambda x;$$
$$x, y, z + \lambda x.$$

Hence

VI. *Every xy-differentiant that is also a yz-differentiant is an xz-differentiant.*

From theorems IV and VI follow these theorems for complete differentiants:

VII. *Every complete differentiant relatively to a given set of variables is of one and the same weight relatively to the several variables of the set;*

---

*) For a single binary quantic this is the well-known theorem: the weight of an x-differentiant cannot exceed $\frac{1}{2}(mj + \vartheta)$; Sylvester, l. c., p. 6.

**) Cayley, Nouvelles recherches sur les covariants, p. 113 (for a binary quantic).

VIII. *Every homogenous isobaric function that is a differentiant relatively to every pair of successive variables of a cycle of variables, when the variables of each pair are taken in the order in which they occur in the cycle, is a complete differentiant relatively to the variables of the cycle;*

IX. *Every homogeneous isobaric function of one and the same weight relatively to the several variables of a given set that is a differentiant relatively to every pair that can be formed by taking a definite variable of the set with another variable of the set in one of the two possible orders is a complete differentiant relatively to the given set of variables.*

That is, (VIII) if φ is homogenous and isobaric, and

$$\overset{\frown}{xy}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{yz}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{zs}\cdot\varphi\equiv 0,\ \cdots,\ \overset{\frown}{uv}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{vx}\cdot\varphi\equiv 0;$$

or (IX) if φ is homogenous, isobaric, and of one and the same weight relatively to the several variables $x, y, z, s, \ldots, u, v$, and

$$\overset{\frown}{xy}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{xz}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{xs}\cdot\varphi\equiv 0,\ \cdots,\ \overset{\frown}{xu}\cdot\varphi\equiv 0,\quad \overset{\frown}{xv}\cdot\varphi\equiv 0;$$

φ is a complete differentiant relatively to the variables $x, y, z, s, \ldots, u, v$. If φ is of one and the same weight relatively to the several variables $x, y, z, s, \ldots, u, v$, the condition $\overset{\frown}{vx}\cdot\varphi\equiv 0$ in VIII is superfluous.

It will be useful to consider what linear transformations can be compounded of simple shears.*)

It is evident from (2) that

X. *The inverse of a simple shear is a simple shear relatively to the same variables.* Namely, the inverse of the substitution of $x+\lambda y$ for x without other change is the substitution of $x-\lambda y$ for x without other change.

XI. *An interchange of any two variables with a change of sign of one (but not both) of them can be effected by shears relatively to these variables.* By alternate shears relatively to yx and xy we can change x, y successively into $x+y, y;\ y, y-x;\ y, -x$.

XII. *The signs of any two variables can be simultaneously reversed by shears relatively to these variables.* For, by XI, we can replace x by y and y by $-x$, and then y by $-x$ and x by y; and x, y will have been replaced by $-x, -y$.

XIII. *Of any two variables the one can be multiplied and the other divided by any constant* (not 0 nor ∞) *by shears relatively to these variables.*

---

*) A linear transformation compounded of any number of shears may also be called a shear. By a *simple* shear we mean a shear relatively to *two* variables, as already defined.

For, by alternate shears relatively to yx and xy, we can change x, y successively into

$$x+(c-1)y,\ y;\quad cx+(c-1)y,\ x+y;\quad cx,\ x+\tfrac{1}{c}y;\quad cx,\ \tfrac{1}{c}y.$$

As the inverse of a simple shear is itself a simple shear (X), the transformations that can be compounded of simple shears are those transformations that can be reduced by shearing to the identical transformation (the substitution 1) in which each variable is replaced by itself. Let us consider the equations corresponding to any linear transformation, i. e. the linear expressions of the old coordinates, say, in terms of the new (assuming that the determinant of substitution does not vanish), and make certain shears relatively to the new variables. We suppose that the expressions of the old variables are written one under the other in a certain order, which we call the order of the old variables, and that the terms containing the several new variables in each of these expressions are written one after the other in the corresponding order; so that the coefficients of these expressions form a square array whose successive rows correspond to the successive old variables and whose successive columns correspond to the successive new variables. The shears to be made can be made directly on this square array of coefficients by adding to the coefficients of a column the same multiple of the coefficients of another column.

The addition of a multiple of the k-th column to the i-th column corresponds to a shear relatively to the i-th new variable and the k-th new variable, in this order.

If the first constituent of the first row of the array is not 0, we add such multiples of the first column to the subsequent columns as shall cause all the constituents of the first row subsequent to the first constituent to vanish; if the first constituent of the first row is 0, we first prepare the array by adding to the first column any multiple of any subsequent column that contains a non-evanescent constituent in its first row, and then proceed as before. If the second constituent of the second row is not then 0, we add such multiples of the second column to all subsequent columns as shall cause all the constituents of the second row subsequent to the second constituent to vanish; if the second constituent of the second row is 0, we first prepare the array by adding to the second column any multiple of any subsequent column that contains a non-evanescent constituent in its second row, and proceed as before. We carry on this process until, in every row, all the constituents subsequent to the constituent that lies in the principal diagonal of the array have been made 0. Namely, supposing that the process has been carried so far that the constituents of the first k rows that lie to the right of the principal diagonal are all 0,

we add such multiples of the $(k+1)$-th column to every subsequent column that the constituents of the $(k+1)$-th row subsequent to the $(k+1)$-th constituent of that row shall become 0; but if the $(k+1)$-th constituent of the $(k+1)$-th row is 0, we add to the $(k+1)$-th column a multiple of some subsequent column that contains a non-evanescent constituent in its $(k+1)$-th row before we apply the process by which all constituents subsequent to the $(k+1)$-th are made to vanish. To convince ourselves of the success of this process it is only necessary to observe that, if the first k rows contain only 0's on the right of the principal diagonal, the addition of a multiple of the $(k+1)$-th column to any subsequent column and the addition to the $(k+1)$-th column of a multiple of a subsequent column will have no effect on the first k rows; and that, if the $(k+1)$-th constituent of the $(k+1)$-th row is 0, some subsequent constituent of that row must be different from 0, if the determinant of substitution does not vanish.

As the determinant of substitution corresponding to a simple shear has the value 1, the value of the determinant of the given transformation is not altered by any number of simple shears relatively to the new variables. In the form to which we have now reduced the transformation by shearing, the constituents on one side (the right) of the principal diagonal of the array of coefficients are all 0, and the value of the determinant is therefore the product of the constituents of this diagonal. Subtracting such multiples of the last column from the preceding columns as shall make all the constituents of the last row 0 excepting the last constituent, then subtracting such multiples of the last column but one from the preceding columns as shall make 0 all the constituents of the last row but one excepting the last constituent but one, and so on, we evidently obtain an array of which all constituents not in the principal diagonal vanish.

Finally, we make such shears relatively to the last two variables (in accordance with XIII) as shall reduce the last constituent of the diagonal to 1, then such shears relatively to the last variable but one and the last but two as shall make the last constituent but one of the diagonal 1, and so backward through the successive pairs of consecutive variables, until all the constituents of the principal diagonal are reduced to 1, excepting (possibly) the first constituent, which has now evidently the value of the original determinant of substitution.

If the determinant of a given substitution has the value 1, that substitution can, as we have now proved, be reduced by shearing to the identical substitution, and therefore.

XIV. *Every linear transformation whose determinant is* 1 *can be compounded of simple shears.*

A linear transformation whose determinant is not 1 (nor 0) can, as we have shown, be reduced by shearing to a substitution that differs from the identical substitution only in that one variable (in the proof, the first variable) is multiplied by the determinant of the given transformation. It is, however, evident that this multiplier can be distributed by shearing (XIII) in any manner among the several variables; therefore

XV. *Every linear transformation whose determinant does not vanish can be compounded of simple shears and an expansion relatively to any one of the variables, or of simple shears and expansions relatively to any of the variables; and the product of the moduli of expansion is equal to the determinant of the transformation.*

We have, then, the theorem:

XVI. *Every homogeneous isobaric complete differentiant relatively to all the variables is a covariant of the system of quantics whose coefficients are involved in it.*it is For unaltered by any simple shears, only multiplied by a power of the determinant of substitution (I) by any expansion, and therefore (XV) is only multiplied by a power of the determinant of substitution by any linear transformation.

The analytic conditions for a covariant can now be written down. Namely, if the variables are $x, y, z, \ldots, t, u, v$ and if x is one of them selected at pleasure, we have, by theorems V, IX and XVI.

XVII. *The necessary and sufficient conditions that φ, a homogeneous function of the coefficients of each of the quantics of any system* (which may consist of a single quantic) *and of the variables involved in those quantics* (or not involving these variables) *shall be a covariant of the system are that φ shall be isobaric of one and the same weight relatively to the several variables and that it shall satisfy identically the relations*

$$\widehat{yx} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{zx} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \cdots, \quad \widehat{tx} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{ux} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{vx} \cdot \varphi \equiv 0$$

or the equivalent relations

$$\widehat{xy} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{xz} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \cdots, \quad \widehat{xt} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{xu} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{xv} \cdot \varphi \equiv 0^{*}).$$

§ 3.

The Operator that Produces all Covariants of the System.

We assume an arbitrary function φ, homogeneous in the coefficients of each of the quantics of the system and in the variables, isobaric relatively to each of the variables, and of weights $w_x, w_y, w_z, \ldots,$

*) See Salmon, Modern Higher Algebra, 4th ed., p. 136. I believe this extension of the well-known conditions for binary quantics is due to Cayley, but I cannot say where he has given it.

w_u, w_v, respectively, relatively to certain of the variables $x, y, z, \ldots, u, v$ selected at pleasure (i. e. any or all of the variables involved in the quantics); and consider the result of applying to φ an operator Q defined thus:

$$(8) \qquad Q \equiv \sum C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha},$$

where the summation extends to all integral but not negative values of $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ and $C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon}$ is a numerical multiplier to be determined for every combination of these values. The numerical multipliers in (8) are to be so determined that $Q \,.\, \varphi$ shall be a differentiant relatively to all the pairs $yx, zx, \ldots, ux, vx$ if φ is a differentiant relatively to all the pairs $yx, zx, \ldots, ux$ (but not necessarily relatively to vx), where the order of the variables in each pair is essential.

By repeated applications of formulae (6) we have generally (for an arbitrary φ)

$$(9a) \quad \begin{cases} \widehat{yx} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdot \cdot \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \varphi \\ \quad = \beta \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta-1} \cdot \widehat{vx}^{\alpha+1} \cdot \varphi \\ \quad - \alpha \cdot \widehat{xv}^{\alpha-1} \cdot \widehat{yv}^{\beta+1} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \varphi \\ \quad + \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \; \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \widehat{yx} \cdot \varphi. \end{cases}$$

and similar expressions for the results of applying $\widehat{zx}, \ldots, \widehat{ux}$ to the general term of $Q \,.\, \varphi$, and

$$(9b) \quad \begin{cases} \widehat{vx} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \varphi \\ \quad \equiv \alpha(w_v - w_x + \alpha + 1) \cdot \widehat{xv}^{\alpha-1} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \, \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \varphi \\ \quad + \beta^2 \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta-1} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta-1} \cdot \widehat{vx}^{\alpha+1} \cdot \varphi + \text{ etc.} \\ \quad + \beta \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta-1} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \widehat{yx} \cdot \varphi + \text{ etc.} \\ \quad + \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha+1} \cdot \varphi, \end{cases}$$

where + etc. following any term represents an aggregate of terms formed from that term by interchanging y with $z, \ldots, u$ and at the same time interchanging β with $\gamma, \ldots, \varepsilon$, successively. If, then,

$$\widehat{yx} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \widehat{zx} \cdot \varphi \equiv 0, \quad \cdots, \quad \widehat{ux} \cdot \varphi \equiv 0,$$

we have

$$\widehat{yx} \cdot Q \cdot \varphi \equiv \sum A^{(y,x)}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta+1} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha+1} \cdot \varphi,$$

where

$$A^{(y,x)}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (\beta + 1) \, C_{\alpha,\beta+1,\gamma,\ldots,\varepsilon} - (\alpha + 1) \, C_{\alpha+1,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon},$$

and similar expressions for $\widehat{zx} \cdot Q \cdot \varphi, \ldots, \widehat{ux} \cdot Q \cdot \varphi$; and

$$\widehat{vx} \cdot Q \cdot \varphi \equiv \sum A^{(v,x)}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha+1} \cdot \varphi,$$

where

$$A^{(v,x)}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (\alpha+1)(w_v - w_x + \alpha + 2) C_{\alpha+1,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} + (\beta+1)^2 C_{\alpha,\beta+1,\gamma,\ldots,\varepsilon} + (\gamma+1)^2 C_{\alpha,\beta,\gamma+1,\ldots,\varepsilon} + \cdots + (\varepsilon+1)^2 C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon+1} + C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon}.$$

So that $Q \cdot \varphi$ will be a differentiant relatively to the pairs $yx, zx, \ldots, ux, vx$ if

$$(\alpha+1) C_{\alpha+1,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (\beta+1) C_{\alpha,\beta+1,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (\gamma+1) C_{\alpha,\beta,\gamma+1,\ldots,\varepsilon} = \cdots = (\varepsilon+1) C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon+1}$$

and

$$(\alpha+1)[w_v - w_x + (\alpha+2) + (\beta+1) + (\gamma+1) + \cdots + (\varepsilon+1)] C_{\alpha+1,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = - C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon};$$

i. e. if

$$(10)\quad C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon} \frac{(w_v - w_x + v)!\, C_{0,0,0,\ldots,0}}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\varepsilon!(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon+w_v-w_x+v)!};$$

where v is the number of variables $x, y, z, \ldots, u$ (without v).

It is to be observed that the operator Q does not alter the weights of any function to which it may be applied, and therefore, by III, it can give a differentiant relatively to $yx, zx, \ldots, ux, vx$ only when applied to a function for which w_x does not exceed either of the numbers $w_y, w_z, \ldots, w_u, w_v$.

Similarly, the operator

$$(11)\quad R \equiv \sum K_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vz}^{\gamma} \cdots \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdot \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdots \widehat{zv}^{\gamma} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{xv}^{\alpha}$$

gives a differentiant relatively to $xy, xz, \ldots, xu, xv$ of weights $w_x, w_y, w_z, \ldots, w_u, w_v$ when applied to any isobaric differentiant relatively to $xy, xz, \ldots, xu$ of these weights, if

$$(12)\quad K_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varepsilon} = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon} \frac{(w_x - w_v + v)!\, K_{0,0,0,\ldots,0}}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\varepsilon!(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon+w_x-w_v+v)!},$$

and w_x is at least as great as each of the numbers $w_y, w_z, \ldots, w_u, w_v$.

When we say that the operators Q and R give, if applied to proper functions, differentiants of the types in question, we do not exclude the cases in which the results vanish identically. It is to be observed that each term of Q and each term of R has two *alae* of which one has only factors beginning with v and the other has only factors ending with v; therefore, in accordance with the fourth and fifth formulae of (6), the factors of either *ala* are commutative with each other, so that Q and R are not altered when the variables $x, y, z, \ldots, u$ are interchanged among themselves in any way.

The most important case is that in which Q or R is applied to a differentiant φ of one and the same weight relatively to the several variables $x, y, z, \ldots, u, v$, so that, by IX, φ is a complete differentiant relatively to the variables $x, y, z, \ldots, u$ and is of the same weight relatively to each of these variables as relatively to the variable v. In this case we put, for convenience,

$$C_{0,0,0,\ldots,0} = K_{0,0,0,\ldots,0} = 1,$$

and represent the operators by $\{x, y, z, \ldots, u; v\}$ and $\{v; u, \ldots, z, y, x\}$, respectively; so that

$$(13)\quad \begin{cases} \{x, y, z, \cdots, u; v\} \equiv \\ \sum (-1)^{\sigma} \frac{\nu!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\varepsilon!(\sigma+\nu)!} \cdot \widehat{xv}^{\alpha} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{zv}^{\gamma} \cdots \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdot \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdots \widehat{vz}^{\gamma} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vx}^{\alpha}, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \{v; u, \cdots, z, y, x\} \equiv \\ \sum (-1)^{\sigma} \frac{\nu!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\varepsilon!(\sigma+\nu)!} \cdot \widehat{vx}^{\alpha} \cdot \widehat{vy}^{\beta} \cdot \widehat{vz}^{\gamma} \cdots \widehat{vu}^{\varepsilon} \cdot \widehat{uv}^{\varepsilon} \cdots \widehat{zv}^{\gamma} \cdot \widehat{yv}^{\beta} \cdot \widehat{xv}^{\alpha}, \end{cases}$$

where the summations extend to all integral but not negative values of $\alpha; \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$, in each term $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varepsilon$ for that term, and ν is the number of variables $x, y, z, \ldots, u$ (without v). If the function φ is a differentiant relatively to vx or to xv, as well as a complete differentiant relatively to $x, y, z, \ldots, u$, every term of the right members of (13) and (14) vanishes for this function excepting the terms for which $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varepsilon = 0$, and these terms reduce to 1, so that

$$\{x, y, z, \cdots, u; v\}\, \varphi \equiv \{v; u, \cdots, z, y, x\}\, \varphi \equiv \varphi.$$

Therefore,

XVIII. $\{x, y, z, \cdots, u; v\}$ and $\{v; u, \cdots, z, y, x\}$ *are operators of which each turns any isobaric complete differentiant relatively to* $x, y, z, \ldots, u$ *of the same weight relatively to each of these variables as relatively to* v *into a complete differentiant relatively to* $x, y, z, \ldots, u, v$ *of the same weights, and leaves every complete differentiant relatively to* $x, y, z, \ldots, u, v$ *unaltered.*

If φ is an isobaric function of one and the same weight relatively to all the several variables $x, y, z, \ldots, u, v$ involved in the given quantics, it follows from (9b) and IV (as Hilbert has proved) that $\{x; y\}\, \varphi \equiv \{y; x\}\, \varphi$ is a complete differentiant relatively to x, y. Therefore,

$$(15)\quad \begin{aligned} [\varphi]_1 &\equiv \{x, y, z, \cdots, u; v\}\, \{x, y, z, \cdots; u\} \cdots \{x, y; z\}\, \{x; y\} \cdot \varphi \text{ and} \\ [\varphi]' &\equiv \{v; u, \cdots, z, y, x\}\, \{u; \cdots, z, y, x\} \cdots \{z; y, x\}\, \{y; x\} \cdot \varphi. \end{aligned}$$

are complete differentiants relatively to all the variables $x, y, z, \ldots, u, v$.*) Hence follows that

XIX. $[\varphi]_1$ or $[\varphi]'$ *is a covariant of the given system and of the same type as* φ *provided only that* φ *is homogeneous and isobaric of one and the same weight relatively to all the several variables; is the most general covariant of this type if* φ *is the most general homogeneous isobaric function of the type; and is* φ *itself if* φ *is a covariant of the system.*

If the given quantics involve several sets of variables (each set homogeneously) subject to independent linear transformations, the theorems of section 2 apply, with obvious modifications, to the variables of each set separately, and to each of the independent transformations. The operators $[\,]_1$ and $[\,]'$ formed with the variables of any one set are commutative with the analogous operators formed with the variables of any other set. The covariants of the given system of quantics are found by applying the product of the operators $[\,]_1$ formed with the variables of all the several sets to functions that are homogeneous in the coefficients of each quantic and in each set of variables, isobaric relatively to each variable of whatever set, and of one and the same weight relatively to the several variables of each set; in which product of operators any factor $[\,]_1$ may be replaced by the operator $[\,]'$ formed with the variables of the same set.

§ 4.

Finiteness of the Complete System of Fundamental Covariants.

If we employ $[\,]$ without distinguishing mark to denote at pleasure either of the operators $[\,]_1$ and $[\,]'$ defined by (15), it is evident that

$$[\varphi + \psi] \equiv [\varphi] + [\psi]; \tag{16}$$

and that, if F is a covariant,

$$[F] \equiv F, \quad [AF] \equiv F[A], \tag{17}$$

whatever form A may be.

Let $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_s, \ldots$ be a complete system of linearly independent covariants of the given system of quantics. By XVII, this complete system is homonomous, and therefore, by Theorem A, any covariant F_s can be expressed linearly in terms of a finite number

*) In the case of two variables it appears that $[\varphi]_1$ and $[\varphi]'$ are identical if φ is of one and the same weight relatively to the two variables; but in the case of more than two variables we have not proved the identity of the two operators defined by (15). Theorem XIX, however, shows that $[\varphi]_1$ and $[\varphi]'$ are aggregates of the same linearly independent covariants, and are certainly identical if φ is a covariant.

of covariants $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ (of which any one or more may or may not actually occur in the expression of a particular covariant), thus:

$$(18) \qquad F_s \equiv A_{s1}F_1 + A_{s2}F_2 + A_{s3}F_3 + \cdots + A_{s\mu}F_\mu.$$

(If any one of the covariants $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ does not occur in the expression of a given F_s, we simply regard the coefficient A of that covariant in the expression of the given F_s as identically 0.) On applying [ ] to both members of (18) we have, by XIX, (16), and (17),

$$(19) \quad F_s \equiv F_1\ [A_{s1}] + F_2[A_{s2}] + F_3[A_{s3}] + \cdots + F_\mu[A_{s\mu}].$$

Now, each of the covariants $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$, and F_s is homogeneous in the coefficients of each of the given quantics and in the variables, and isobaric of one and the same weight relatively to the several variables; say F_k is of degrees $j_k, j_k', j_k'', \ldots$, of order ϑ_k, and of the weight $w^{(k)}$ relatively to each of the variables. If we omit from A_{sk} all terms excepting those that are of degrees $j_s - j_k, j_s' - j_k', j_s'' - j_k'', \ldots$, of order $\vartheta_s - \vartheta_k$, and of weight $w^{(s)} - w^{(k)}$ relatively to each of the variables, we shall have omitted from the right member of (18) only such terms as do not occur in F_s (not being of the proper degrees, order, and weights), and the residual after all such terms have been omitted will still be F_s. We may, then, assume that each of the coefficients $A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, \ldots, A_{s\mu}$ in (18) is a homogeneous isobaric function of the coefficients of the given quantics and of the variables, of one and the same weight relatively to the several variables. With this assumption $[A_{s1}], [A_{s2}], [A_{s3}], \ldots, [A_{s\mu}]$, the coefficients of $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\mu$ in the expression of F_s (19), are themselves, by XIX, covariants of the system, and therefore, by Theorem *B*,

XX. (*Gordan's Theorem*) *all the covariants of any finite system of quantics of finite orders in a finite number of variables are expressible as holomorphic polynomials in a finite number of such covariants.*

Any *rational* (holomorphic or meromorphic) function of the coefficients of the quantics of the given system and of the variables may be called a *covariant* of the system if it is simply multiplied (or divided) by a power of the determinant of substitution when any linear transformation is imposed upon the variables; but such a rational meromorphic function is necessarily the ratio of two holomorphic covariants, and requires no further consideration.

Clark University, Mar. 26, 1892.

Die Dedekind-Weber'schen Ideale in einem hyperelliptischen Körper.

Von

Ludwig Baur in Darmstadt.

In seiner Arbeit über die „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" (Journal für Mathematik, Band 109, Heft I) macht Herr Hensel bezüglich der Abhandlung, die die Herren Dedekind und Weber über den gleichen Gegenstand im 92. Bande des Journals für Mathematik veröffentlicht haben, folgende Bemerkungen: „... Jedoch wird in dieser Arbeit einzig und allein die Existenz jener Integrale*) dargethan, zur wirklichen Darstellung derselben wäre nämlich nach jener Theorie einmal die Auffindung einer sogenannten Basis des betrachteten Körpers, dann aber die Darstellung einer Normalbasis unbedingt erforderlich; bei diesen beiden Aufgaben wird aber nur die Nothwendigkeit der Existenz einer Lösung bewiesen, aber kein zu ihr führender Weg angegeben, so dass mit Hülfe jener Untersuchung in keinem Falle die Bestimmung des Geschlechts wirklich gegeben und die Integrale 1. Gattung gefunden werden können."

Das hier Gesagte ist in dieser Allgemeinheit nicht vollständig zutreffend. Es giebt algebraische Körper, bei denen die Dedekind-Weber'schen Principien sehr wohl ausreichen, um die angedeuteten Aufgaben völlig zu lösen, wenn man nur die Primideale in der Form darstellt, die ich ihnen bei einer früheren Gelegenheit (Zur Theorie der Dedekind'schen Ideale. Math. Ann. Bd. XXXII, p. 151—156) gegeben habe. Ueberraschend einfach gestaltet sich insbesondere die Untersuchung bei einem hyperelliptischen Körper, wie ich dies im Folgenden zu zeigen versuchen will. Dabei werde ich mich möglichst eng an die genannte Arbeit der Herren Dedekind und Weber anschliessen, und dieselbe der Kürze halber mit D. W. citiren, während ich auf meinen vorhin erwähnten Artikel durch B. hinweisen möchte.

*) Integrale 1. Gattung sind gemeint.

§ 1.

Grundgleichung, Modul und Complementärmodul.

1. Es werde Θ als algebraische Function der Veränderlichen z durch die Gleichung

$$f(\Theta, z) = \Theta^2 - R(z) = 0 \tag{1}$$

definirt, wo

$$R(z) = (z - a_0)(z - a_1) \cdots (z - a_{2\varrho}) \tag{2}$$

und keine zwei der Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_{2\varrho}$ einander gleich sein sollen. Zu jedem bestimmten Werthe z_0 von z gehören dann im allgemeinen zwei Werthe von Θ, nämlich Θ_{z_0} und $-\Theta_{z_0}$, und zwar soll, falls diese complex sind, derjenige, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, falls sie rein imaginär sind, derjenige, der durch i dividirt, einen positiven Werth ergiebt, mit $+\Theta_{z_0}$ bezeichnet werden. Das System aller rationalen Functionen von Θ und z bildet einen Körper Ω algebraischer Functionen vom Grade 2, den wir, ohne den Werth von ϱ irgendwie zu beschränken, einen *hyperelliptischen Körper* nennen wollen. Unter $\mathfrak{o}$ *) wird der Inbegriff aller ganzen Functionen von Θ und z verstanden.

Ich habe nun nachgewiesen (B. p. 156), dass die Functionen $1, \Theta$ gleichzeitig eine Basis für Ω und $\mathfrak{o}$ bilden. Wegen der Gleichungen

$$\Theta \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \Theta,$$
$$\Theta \cdot \Theta = R(z) \cdot 1 + 0 \cdot \Theta$$

ist dann nach D. W. § 2.

$$N(\Theta) = R(z), \tag{3}$$

$$S(\Theta) = 0, \tag{4}$$

wozu noch die weiteren Gleichungen kommen:

$$S(1) = 2, \tag{5}$$

$$S\big(R(z)\big) = 2R(z), \tag{6}$$

$$\text{const. } \Delta(1, \Theta) = \begin{vmatrix} S(1) & S(\Theta) \\ S(\Theta) & S(\Theta^2) \end{vmatrix} = 4R(z),$$

so dass

$$\Delta(1, \Theta) = R(z). \tag{7}$$

2. Sind nun η_1 und η_2 zwei beliebige Functionen in Ω, definirt durch die Gleichungen

$$\eta_1 = x_{11} + x_{12} \cdot \Theta,$$
$$\eta_2 = x_{21} + x_{22} \cdot \Theta,$$

*) Durch ein Versehen des Setzers ist B. p. 151—153 überall $\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{o}$ gedruckt.

wo die x_{ik} rationale Functionen von s sein sollen, so ist (D. W. § 2, 13)

$$\Delta(\eta_1, \eta_2) = |x_{ik}|^2 \cdot \Delta(1, \Theta) = |x_{ik}|^2 \cdot R(s), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix}$$

und es bilden daher die Functionen η_1 und η_2 immer und nur dann ebenfalls eine Basis von Ω, wenn

$$|x_{ik}| \neq 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Wir nehmen für das Folgende diese Bedingung als erfüllt an. Die zu η_1, η_2 *complementäre Basis* η_1', η_2' wird dann, wenn zur Abkürzung

$$y_{ik} = S(\eta_i \eta_k) \tag{10}$$

gesetzt wird, durch die Gleichungen

$$\eta_i = y_{i1}\eta_1' + y_{i2} \cdot \eta_2' \quad (i = 1, 2) \tag{11}$$

definirt. Gleichzeitig ist

$$\Delta(\eta_1, \eta_2) = |y_{ik}|^2 \cdot \Delta(\eta_1', \eta_2') = \Delta^2(\eta_1, \eta_2) \cdot \Delta(\eta_1', \eta_2') \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix},$$

woraus folgt, dass

$$\Delta(\eta_1, \eta_2) \cdot \Delta(\eta_1', \eta_2') = 1, \tag{12}$$

und demnach η_1', η_2' thatsächlich eine Basis ist (D. W. § 3, 7).

3. Bedeutet demnach ν_1, ν_2 die zur speciellen Basis 1, Θ complementäre Basis, so hat man wegen (4), (5), (6) zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$1 = 2 \cdot \nu_1 + 0 \cdot \nu_2,$$
$$\Theta = 0 \cdot \nu_1 + 2R(s) \cdot \nu_2,$$

so dass

$$\nu_1 = \frac{1}{2},$$
$$\nu_2 = \frac{\Theta}{2R(s)} = \frac{1}{2\Theta}. \tag{13}$$

Stellt man eine beliebige Function η in Ω vermittelst dieser Basis ν_1, ν_2 dar in der Form:

$$\eta = x \cdot \nu_1 + y \cdot \nu_2 = x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2\Theta}, \tag{14}$$

wo x und y rationale Functionen von s bedeuten, so ist

$$\eta \cdot \nu_1 = \frac{x}{2} \cdot \nu_1 + \frac{y}{2} \cdot \nu_2,$$
$$\eta \cdot \nu_2 = \frac{y}{2R} \cdot \nu_1 + \frac{x}{2} \cdot \nu_2,$$

ferner

$$2\Theta\eta \cdot 1 = y \cdot 1 + x \cdot \Theta,$$
$$2\Theta\eta \cdot \Theta = x \cdot R \cdot 1 + y \cdot \Theta;$$

und aus diesen beiden Systemen folgt:

(15) $$x = S(\eta),$$

(16) $$y = S(\Theta\eta).$$

4. Ist dann weiter ω_1, ω_2 eine beliebige Basis von $\mathfrak{o}$, dann müssen, wenn

(17) $$\omega_i = a_{i1} + a_{i2}\Theta, \quad (i = 1, 2)$$

gesetzt wird, die a_{ik} ganze rationale Functionen von z sein, so beschaffen, dass ihre Determinante eine von 0 verschiedene Constante ist (D. W. § 3, 7), und es darf in diesem Falle unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass

(18) $$|a_{ik}| = 1 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix}$$

Die zu ω_1, ω_2 complementäre Basis ε_1, ε_2 hängt mit der zu $1, \Theta$ complementären Basis ν_1 ν_2 durch die transponirte Substitution zusammen (D. W. § 10, 5) und ist daher gegeben durch

(19) $$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} \cdot \frac{1}{2} + a_{21} \cdot \frac{1}{2\Theta}, \\ \varepsilon_2 &= a_{12} \cdot \frac{1}{2} + a_{22} \cdot \frac{1}{2\Theta}; \end{aligned}$$

der Modul $\mathfrak{c} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ heisst der zu $\mathfrak{o}$ *complementäre Modul.* Seine Basisfunctionen sind zwar keine ganzen Functionen, aber aus (19) erhellt sofort, dass $\Theta\varepsilon_1$, $\Theta\varepsilon_2$ und mithin auch (D. W. § 3, 5) die Functionen $R \cdot \varepsilon_i\varepsilon_k$ zu den ganzen Functionen gehören, und zwar ist

(20) $$\begin{aligned} 2\Theta \cdot \varepsilon_1 &= a_{21} + a_{11}\Theta, \\ 2\Theta \cdot \varepsilon_2 &= a_{22} + a_{12}\Theta. \end{aligned}$$

Da hiernach

$$\begin{aligned} 1 &= 2\Theta(-a_{12}\varepsilon_1 + a_{11}\varepsilon_2), \\ \Theta &= 2\Theta(\ a_{22}\varepsilon_1 - a_{21}\varepsilon_2), \end{aligned}$$

oder

(21) $$\begin{aligned} 1 &= 2(a_{22}\varepsilon_1 - a_{21}\varepsilon_2), \\ \Theta &= 2R(-a_{12}\varepsilon_1 + a_{11}\varepsilon_2), \end{aligned}$$

so sind die Functionen 1 und Θ, und nach (20) auch $\Theta\varepsilon_1$ und $\Theta\varepsilon_2$ theilbar durch $\mathfrak{c}$, mithin gilt das gleiche von dem Modul

(22) $$\mathfrak{o}\mathfrak{c} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Theta\varepsilon_1, \Theta\varepsilon_2].$$

Da aber andrerseits eben gemäss der Gleichung (22) auch $\mathfrak{c}$ theilbar ist durch $\mathfrak{o}\mathfrak{c}$, so schliesst man

(23) $$\begin{aligned} \mathfrak{o}\mathfrak{c} &= \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{o}\Theta\mathfrak{c} &= \Theta\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass $\Theta\mathfrak{c}$ blos ganze Functionen enthält, folgt, dass der Modul $\Theta\mathfrak{c}$ und mithin auch die Moduln $R\mathfrak{c}$ und $R\mathfrak{c}^2$ Ideale sind (D. W. § 7). Insbesondere ergiebt sich aus (20), dass

$$N(\Theta\mathfrak{e}) = \text{const.} \mid a_{ik} \mid = 1,$$

und daher ist geradezu

$$\Theta\mathfrak{e} = \mathfrak{o}, \tag{24}$$

$$R\mathfrak{e} = \mathfrak{o}\Theta, \tag{25}$$

$$R\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{o}. \tag{26}$$

§ 2.

Die Primideale und das Verzweigungsideal.

Am mehrfach erwähnten Orte habe ich ferner gezeigt: „Jedes Primideal, dessen Norm gleich $z - z_0$ ist, kann in der Form

$$[z - z_0,\ \Theta - \Theta_{z_0}]$$

dargestellt werden, wo Θ_{z_0} jede Wurzel der Gleichung $f(\Theta, z_0) = 0$ sein darf, und umgekehrt ist jedes in dieser Form dargestellte Ideal ein Primideal." (B. p. 156). Setzt man also:

$$\mathfrak{p}_{z_0} = [z - z_0,\ \Theta - \Theta_{z_0}], \tag{1}$$

$$\mathfrak{q}_{z_0} = [z - z_0,\ \Theta + \Theta_{z_0}], \tag{2}$$

so ist

$$N(\mathfrak{p}_{z_0}) = N(\mathfrak{q}_{z_0}) = z - z_0, \tag{3}$$

und man erhält alle Primideale unseres Körpers, wenn man z_0 alle Werthe durchlaufen lässt. Da hiernach $z - z_0$ durch die beiden Primideale $\mathfrak{p}_{z_0}$ und $\mathfrak{q}_{z_0}$ und nur durch diese theilbar ist, so ergiebt sich für das Hauptideal $\mathfrak{o}(z - z_0)$ sofort die Factorenzerlegung

$$\mathfrak{o}(z - z_0) = \mathfrak{p}_{z_0} \cdot \mathfrak{q}_{z_0}. \tag{4}$$

Fassen wir den besonderen Fall ins Auge, dass $z - z_0$ durch das Quadrat eines Primideales theilbar sein soll, so kann dieser Fall nur dann eintreten, wenn $\mathfrak{p}_{z_0} = \mathfrak{q}_{z_0}$. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass die 2 Basisfunctionen von $\mathfrak{p}_{z_0}$ durch das Ideal $\mathfrak{q}_{z_0}$ theilbar sind, zwei Bedingungen, von denen die erstere ohne weiteres, die zweite nur dann erfüllt ist, wenn $\Theta_{z_0} = 0$; denn nur dann können zwei ganze rationale Functionen x_1 und x_2 von z so bestimmt werden, dass

$$\Theta - \Theta_{z_0} = x_1(z - z_0) + x_2(\Theta + \Theta_{z_0}).$$

Daraus folgt, dass z_0 im genannten Falle einen der Werthe $a_0, a_1, \ldots, a_{2\varrho}$ haben muss, und in der That besteht (B. p. 152) die Gleichung

$$[z - a_k,\ \Theta]^2 = \mathfrak{o}(z - a_k). \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\varrho).$$

Setzen wir also

$$[z - a_k,\ \Theta] = \mathfrak{a}_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\varrho) \tag{5}$$

so ist

(6) $$N(\mathfrak{a}_k) = z - a_k,$$

und es ergiebt sich:

Nur die $(2\varrho+1)$ *linearen Functionen* $z - a_0$, $z - a_1, \ldots, z - a_{2\varrho}$ *sind durch das Quadrat eines Primideals theilbar, und zwar ist*

(7) $$\mathfrak{o}(z - a_k) = \mathfrak{a}_k^2. \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\varrho).$$

Das durch die Gleichung

(8) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{2\varrho}$$

definirte Ideal heisst das *Verzweigungsideal.*

Aus (6), (7), (8) folgt sofort

(9) $$N(\mathfrak{z}) = R(z),$$

(10) $$\mathfrak{o} R(z) = \mathfrak{z}^2$$

und durch Multiplication dieser Gleichung mit der letzten des § 1.

$$\mathfrak{o} R^2 \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{o}\mathfrak{z}^2,$$

woraus, da $\mathfrak{z}$ und $R\mathfrak{c}$ Ideale sind (§ 1, 3), zunächst $\mathfrak{z}^2 = R^2\mathfrak{c}^2$ und weiterhin

(11) $$\mathfrak{z} = R\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\Theta$$

sich ergiebt.*) Es ist also

(12) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{o}\Theta = [(z - a_0)(z - a_1) \cdots (z - a_{2\varrho}), \Theta],$$

eine Gleichung, die sich leicht vermittelst des Schlusses von n auf $(n+1)$ durch wirkliche Multiplication der Ideale $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{2\varrho}$ nach Anleitung von B. p. 152 verificiren lässt.

Noch folgt aus (11) in Verbindung mit § 1, (24)

(13) $$\mathfrak{c}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}.$$

§ 3.

Die Riemann'sche Fläche und die Verzweigungspunkte.

Zu jedem Primideale gehört ein bestimmter Punkt, der sogenannte *Nullpunkt des Primideals* d. i. der Punkt, durch welchen jenes Primideal erzeugt wird. Die zu $\mathfrak{p}_{z_0}$ und $\mathfrak{q}_{z_0}$ gehörigen Nullpunkte bezeichnen wir bezüglich durch $\mathfrak{P}_{z_0}$ und $\mathfrak{Q}_{z_0}$. Da im Nullpunkte eines Primideals alle Functionen dieses Ideals, also insbesondere auch die Basisfunctionen verschwinden müssen, so ist

(1)
$\mathfrak{P}_{z_0}$ der Punkt, in welchem $z = z_0$, $\Theta = \Theta_{z_0}$,
$\mathfrak{Q}_{z_0}$ „ „ „ „ $z = z_0$, $\Theta = -\Theta_{z_0}$.

Damit haben wir alle Punkte, in denen z einen endlichen Werth besitzt.

*) Durch Zerlegung in Primideale ist leicht nachzuweisen, dass, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale sind, aus der Gleichung $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2$ die andere $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt.

Um auch noch die Punkte zu finden, in denen $z = \infty$, müssen wir noch die Primideale in $z' = \frac{1}{z}$ aufstellen. Bezeichnen wir das System der ganzen Functionen von z' durch $\mathfrak{o}'$, und setzen wir

$$\Theta' = \frac{\Theta}{z^{\varrho+1}} = \Theta \cdot z'^{\varrho+1}, \tag{2}$$

so besteht für Θ' die Gleichung

$$\Theta'^2 = z'(1-a_0 z')(1-a_1 z')\cdots(1-a_\varrho z') = R_1(z'), \tag{3}$$

und es ist daher

$$\Delta_{z'}(1, \Theta') = \text{const.} \times \begin{vmatrix} S(1) & S(\Theta') \\ S(\Theta') & S(\Theta'^2) \end{vmatrix} = \text{const.} \times R_1(z'). \tag{4}$$

Da hiernach die vorstehende Discriminante keinen quadratischen Factor enthält, so bilden die Functionen $1, \Theta'$ *eine Basis für* $\mathfrak{o}'$ (B. p. 156); und daraus folgt, dass

$$[z' - z_0', \Theta' - \Theta_{z_0}']$$

die allgemeine Form der Primideale in z' ist. Der Punkt, in welchem $z' = 0$, erzeugt daher das Primideal

$$\mathfrak{p}' = [z', \Theta'], \tag{5}$$

und umgekehrt ist der Nullpunkt dieses Ideals, $\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}_\infty$, der Punkt, in welchem

$$z = \infty, \quad \frac{\Theta}{z^{\varrho+1}} = 0 \tag{6}$$

ist.

Damit sind alle Punkte unseres Körpers gegeben, und *die Riemann'sche Fläche T setzt sich also zusammen aus den sämmtlichen Punkten* $\mathfrak{P}_{z_0}$, $\mathfrak{Q}_{z_0}$ *und dem Punkte* $\mathfrak{P}'$.

Aus (5) ergiebt sich noch

$$\mathfrak{p}'^2 = [z'^2, z'\Theta', \Theta'^2],$$

oder, wenn $g(z')$ eine ganze rationale Function von z' bedeutet, nach B. p. 152

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}'^2 &= z'[z', \Theta', 1 + z' \cdot g(z')] \\ &= z'[z', \Theta', 1] = z'[1, \Theta'], \end{aligned}$$

mithin

$$\mathfrak{o}'z' = \mathfrak{p}'^2. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) in Verbindung mit § 2, (4) sagt aus, dass die Variable z jeden bestimmten Zahlenwerth z_0 in zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Punkten $\mathfrak{P}_{z_0}$ und $\mathfrak{Q}_{z_0}$ annimmt, mithin die Ordnungszahl 2 besitzt (D. W. § 15, 7). Die beiden Punkte $\mathfrak{P}_{z_0}$ und $\mathfrak{Q}_{z_0}$ mögen zusammen das Polygon $\mathfrak{C}$ bilden. „Lässt man z_0 nach und nach alle Werthe annehmen, so bewegt sich das Polygon

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P}_{z_0} = \mathfrak{Q}_{z_0},$$

und man erhält alle überhaupt existirenden Punkte und nur diejenigen Punkte 2-fach, in welchen $z - z_0$ oder $\frac{1}{z}$ von der 2^{ten} Ordnung verschwindet."

Nach § 2 sind nur die linearen Functionen $z - a_k$ durch das Quadrat eines Primideals theilbar, wozu nach (7) noch die Function z' kommt. Bezeichnen wir daher der Bequemlichkeit halber den Punkt $\mathfrak{P}_{a_k}$ durch $\mathfrak{S}_k$, so erhalten wir

$$\Pi \mathfrak{C} = T \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \ldots S_{2\varrho} \mathfrak{P}', \tag{8}$$

wo T die einfache Gesammtheit aller Punkte der Riemann'schen Fläche bedeutet. Die Punkte $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_{2\varrho}, \mathfrak{P}'$ sind mithin die *Verzweigungs-*, *Windungs-* oder *singulären Punkte* von T in z; ihre Gesammtheit bildet das *Verzweigungs-* oder *Windungspolygon*

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \ldots \mathfrak{S}_{2\varrho} \mathfrak{P}'; \tag{9}$$

diejenigen Punkte von $\mathfrak{Z}$, in denen z einen endl. Werth hat, d. i. $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_{2\varrho}$, erzeugen zusammen das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ (§ 2, 8), und die sämmtlichen Punkte von $\mathfrak{Z}$ sind singuläre Punkte erster Ordnung. Gleichzeitig ergiebt sich hieraus für die Verzweigungszahl w der Werth

$$w = 2\varrho + 2. \tag{10}$$

Dieselbe ist eine gerade Zahl und um 1 grösser als der Grad von $R(z)$.*)

Die bisherigen Entwicklungen reichen auch aus, um eine Function als Polygonquotienten darzustellen. Beispielsweise verschwindet $z - z_0$ in den Punkten $\mathfrak{P}_{z_0}$ und $\mathfrak{Q}_{z_0}$, und wird in $\mathfrak{P}'$ unendl. von der 2^{ten} Ordnung, und daher erhalten wir

$$z - z_0 = \frac{\mathfrak{P}_{z_0} \mathfrak{Q}_{z_0}}{\mathfrak{P}'^2}, \tag{11}$$

$$z - a_k = \frac{\mathfrak{S}_k^2}{\mathfrak{P}'^2}. \tag{12}$$

Was ferner Θ anbelangt, so ist Θ in Folge der Gleichung

$$\mathfrak{o}\Theta = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{2\varrho}$$

(§ 2, (8), (11)) eine Variable von der Ordnung $2\varrho + 1$, die in den Punkten $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots \mathfrak{S}_{2\varrho}$ von der ersten Ordnung verschwindet. Unendlich gross wird Θ blos für $z' = 0$ d. i. in $\mathfrak{P}'$, und da Obereck und

*) Dies kommt daher, dass

$$N(\mathfrak{z}) = \Delta_z(\Omega) = \Pi(z - a_k) = R(z),$$
$$N(\mathfrak{z}') = \Delta_{z'}(\Omega) = z' \Pi(1 - a_k z'),$$

und mithin die Gleichung $\Delta_{z'}(\Omega) = 0$ gerade *eine* verschwindende Wurzel hat (vergl. D. W. § 11 und § 16, 2).

Untereck einer Function in Ω stets gleich viel Punkte enthalten müssen, so folgt

$$\Theta = \frac{\mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \cdots \mathfrak{S}_{2\varrho}}{\mathfrak{P}'^{2\varrho+1}} . \tag{13}$$

Aus (11), (12), (13) erhellt noch, dass, wenn $\varrho > 0$, das Untereck einer jeden ganzen Function von z, die nicht grade eine Constante ist, durch $\mathfrak{P}'^2$ theilbar sein muss.

§ 4.

Die Normalbasis von $\mathfrak{o}$.

1. Da nach § 3 die Functionen 1, Θ' eine Basis von $\mathfrak{o}'$ bilden, so ist, wenn x' und y' ganze rationale Functionen von z' bedeuten,

$$\omega' = x' + y' \cdot \Theta' \tag{1}$$

der allgemeine Ausdruck einer Function in $\mathfrak{o}'$. „Jede Function ω des Moduls $\mathfrak{o}$ kann mithin durch Multiplication mit einer bestimmten Potenz von z' in eine Function ω' verwandelt werden, und die kleinste ganze Zahl r für welche $z'^r \cdot \omega$ in $\mathfrak{o}'$ enthalten ist, soll der *Exponent* von ω genannt werden." (D. W. § 22).

Demnach hat insbesondere Θ *den Exponenten* $\varrho + 1$, denn es ist $\Theta \cdot z'^{\varrho+1} = \Theta'$ eine Function in $\mathfrak{o}'$, während

$$\Theta \cdot z'^{\varrho} = \sqrt{\frac{(1-a_0 z')(1-a_1 z') \cdots (1-a_{2\varrho} z')}{z'}} \quad \text{für } z' = 0$$

noch unendlich gross wird, mithin keine ganze Function von z' sein kann.

Die in D. W. § 22 vorkommende Zahl r_2 hat also den Werth $\varrho + 1$, und daher ist

$$p = r_2 - 1 = \varrho \tag{2}$$

d. h. *der hyperelliptische Körper ist vom Geschlecht* ϱ.*)

Ist ferner

$$\omega = x + y\Theta, \tag{3}$$

wo x und y ganze rationale Functionen von z bezüglich vom Grade m und n bedeuten, so hat der Exponent von ω entweder den Werth m oder den Werth $n + \varrho + 1$, je nachdem die 1te oder 2te dieser beiden Zahlen die grössere ist, denn es gehört z. B. im ersten Falle $z'^m \cdot \omega = x z'^m + y \cdot z'^{m-\varrho-1} \cdot \Theta'$ dem Modul $\mathfrak{o}'$ an, $z'^{m-1} \cdot \omega$ dagegen nicht. Demnach muss speciell *jede Function in* $\mathfrak{o}$, *deren Exponent kleiner als* $\varrho + 1$ *ist, eine ganze rationale Function von* z *sein.*

*) Dies stimmt auch damit, dass nach D. W. § 24

$$p = \frac{1}{2} w - n + 1 = \varrho + 1 - 2 + 1 = \varrho.$$

3. Um nun eine *Normalbasis* von $\mathfrak{o}$ zu erhalten, wählen wir für $\mathfrak{o}$ als erste Basisfunction $\lambda_1 = 1$, und müssen dann als zweite eine solche Function λ_2 wählen, welche unter denjenigen Functionen in $\mathfrak{o}$, die mod. $\mathfrak{o}\varepsilon$ nicht einer Constanten congruent sind, den kleinsten Exponenten besitzt. Nun ist allgemein, wenn b und c beliebige Constanten bedeuten,

$$\omega \equiv b + c\Theta \pmod{\mathfrak{o}\varepsilon},$$

und daraus folgt, dass

$$\omega = x + (c + \varepsilon y)\Theta,$$

wenn x und y beliebige ganze rationale Functionen, c eine nicht verschwindende Constante bedeutet, die Gesammtheit derjenigen Functionen umfasst, die zunächst für λ_2 zulässig sind. Gleichzeitig ist, wenn wieder m den Grad von x, n den von $c + \varepsilon y$ bezeichnet, der Exponent von ω die grösste der beiden Zahlen m und $n + \varrho + 1$, so dass derselbe sein Minimum erreicht, wenn $n = 0$ und $m \leqq \varrho + 1$, und unter dieser Voraussetzung für λ_2 jede der Functionen

$$\omega = x + c\Theta, \qquad c \neq 0,$$

angenommen werden kann. Wir wählen unter diesen die denkbar einfachste durch die Bestimmung $x = 0$, $c = 1$ und kommen so zu dem Resultat:

Die beiden Functionen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \Theta$ *bilden eine Normalbasis von* $\mathfrak{o}$.

Und in der That genügen diese beiden Functionen den zwei eine Normalbasis charakterisirenden Bedingungen, welche nach D. W. § 22, 2 lauten:

„I. Die Functionen λ_1 und λ_2 sind linear unabhängig nach dem Modul $\mathfrak{o}\varepsilon$.

II. Jede Function in $\mathfrak{o}$, deren Exponent kleiner als der Exponent von λ_2 ist, ist in der Form enthalten: $c\lambda_1 + \varepsilon \cdot \omega$, wo c eine Constante, ω eine Function in $\mathfrak{o}$ ist."

Zunächst nämlich kann die Congruenz

$$c_1 \cdot 1 + c_2\Theta \equiv 0 \pmod{[\varepsilon, \varepsilon\Theta]}$$

nur dann bestehen, wenn $c_1 = c_2 = 0$, und damit ist die erste Bedingung erfüllt; ferner aber hat $\lambda_2 = \Theta$ den Exponenten $\varrho + 1$, und jede Function ω, deren Exponent kleiner als $\varrho + 1$ ist, muss nach 1. eine ganze rationale Function von ε, also sicher in der unter II. geforderten Form darstellbar sein.

4. *Die in* $\mathfrak{o}'$ *enthaltenen Functionen* $\lambda_1' = 1$, $\lambda_2' = \Theta'$ *bilden eine Normalbasis von* $\mathfrak{o}'$.

Denn eine Gleichung von der Form

$$c_1\lambda_1' + c_2\lambda_2' \equiv 0 \mod \mathfrak{o}'\varepsilon'$$

oder, was dasselbe ist,

$$c_1 + c_2\Theta' = z'\omega'$$

würde die andere

$$c_1 z^{\varrho+1} + c_2\Theta = z^{\varrho} \cdot \omega'$$

nach sich ziehen. Es würde dann

$$\omega = c_1 z^{\varrho+1} + c_2\Theta$$

eine Function in $\mathfrak{o}$ sein, deren Exponent gemäss der vorhergehenden Gleichung kleiner als $\varrho + 1$ wäre, es müsste also ω nach 1. eine ganze rationale Function und zwar von kleinerem als dem $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade sein.*) Dies kann nur eintreten, wenn c_1 und c_2 beide verschwinden. Also besitzen die Functionen 1 und Θ' die charakteristische Eigenschaft I.

Was die II$^{\text{te}}$ Bedingung betrifft, so bilden jetzt die Functionen 1 und Θ' ein vollständiges Restsystem des Moduls $\mathfrak{o}'$ nach dem Modul $\mathfrak{o}'z'$ (D. W. § 5), so dass für eine beliebige Function ω'' aus $\mathfrak{o}'$ allgemein die Congruenz

$$\omega'' \equiv c_1 + c_2\Theta' \pmod{\mathfrak{o}'z'}$$

besteht; woraus dann weiterhin, wenn ω' wieder eine Function in $\mathfrak{o}'$ bedeutet, die Gleichung

$$z^{\varrho+1} \cdot \omega'' = c_1 z^{\varrho+1} + c_2\Theta + z^{\varrho} \cdot \omega'$$

folgt. Ist nun der Exponent r'' von ω'' in Bezug auf z' kleiner als $\varrho + 1$, so ist jedenfalls $z^{\varrho+1} \cdot \omega''$ und mithin auch

$$\omega = z^{\varrho+1} \cdot \omega'' - c_1 z^{\varrho+1} - c_2\Theta$$

eine Function in $\mathfrak{o}$ und zwar mit einem Exponenten, der wegen der Gleichung $\omega = z^{\varrho} \cdot \omega'$ jedenfalls den Werth ϱ nicht überschreitet. Wir schliessen wie vorhin, dass ω eine ganze rationale Function vom Grade $r < \varrho + 1$ und daher $c_2 = 0$ sein muss. Wenn also $r'' < \varrho + 1$ d. h. kleiner als der Exponent von Θ' ist, so kann ω'' in der Form dargestellt werden

$$\omega'' = c_1 + z'\omega'.$$

Also erfüllt die Basis 1, Θ' auch die Bedingung II., womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 5.

Die Differentiale und ihre Darstellung durch Polygonquotienten.

1. Aus der Gleichung (1) des § 1 folgt

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{R'(z)}{2\Theta} = \frac{R'(z)}{2R(z)} \cdot \Theta. \tag{1}$$

*) Bei einer ganzen rationalen Function ist der Exponent gleich dem Grade (D. W. § 22, 1).

Es ist also $\frac{d\Theta}{dz}$ und damit auch der Differentialquotient einer jeden beliebigen Function in Ω wieder eine Function des hyperelliptischen Körpers. Ferner ergiebt sich aus (1)

$$\mathfrak{o}\,\frac{d\Theta}{dz} = \frac{\mathfrak{o}\,R'(z)}{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{o}\,R'(z)}{\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_{2\varrho}}, \tag{2}$$

und die Voraussetzung, die wir über die Grössen $a_0, a_1, \dots a_{2\varrho}$ gemacht haben, bringt es mit sich, dass unter den Primidealen, in die das Ideal $\mathfrak{o}\,R'(z)$ nach § 2, (4) zerlegt werden kann, keines der Ideale $\mathfrak{a}_i$ sich findet. Zähler und Nenner von (2) sind mithin relativ prim, und daher ist *das Unterideal von* $\frac{d\Theta}{dz}$ *gleich dem Verzweigungsideal* $\mathfrak{z}$.

2. Es sei nun zunächst, wie in § 4, (3)

$$\omega = x + y\Theta \tag{3}$$

wieder eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$, so folgt nach D. W. § 12, 5, dass das Unterideal von $\frac{d\omega}{dz}$ in dem von $\frac{d\Theta}{dz}$ d. i. in $\mathfrak{z}$ aufgehen, und daher $\mathfrak{z} \cdot \frac{d\omega}{dz}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ sein muss, so dass wir

$$\mathfrak{z} \cdot \frac{d\omega}{dz} = \mathfrak{a}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{o}\,\frac{d\omega}{dz} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{z}} \tag{5}$$

setzen können. *Ist demnach* ω *eine ganze Function von* z, *so hat* $\frac{d\omega}{dz}$ (welches im allgemeinen keine ganze Function von z sein wird) *in allen nicht singulären Punkten einen endlichen Werth.*

Weiter ergiebt sich aus (4) mit Benutzung von § 2, (13)

$$\mathfrak{o}\,\frac{d\omega}{dz} = \mathfrak{e}\mathfrak{a}, \tag{6}$$

woraus, da $\mathfrak{e}$ die charakteristische Eigenschaft I der Ideale besitzt, folgt, dass alle Differentialquotienten von ganzen Functionen, dem zu $\mathfrak{o}$ complementären Modul $\mathfrak{e}$ angehören (D. W. § 23, 5).

3. Da die Function ω der Gleichung

$$F(\omega, z) = \omega^2 - 2x\omega + x^2 - y^2 \cdot R = 0$$

genügt, so ist

$$F'(\omega) = 2(\omega - x) = 2y\Theta,$$

$$F'(z) = -F'(\omega) \cdot \frac{d\omega}{dz} = -2y\Theta\,\frac{d\omega}{dz};$$

mithin

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}F'(\omega) &= \mathfrak{o}y\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{o}F'(z) &= \mathfrak{o}y\Theta\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}y\mathfrak{a}, \end{aligned} \tag{7}$$

und daher $\mathfrak{o}y$ das „*Ideal der Doppelpunkte*“ in Bezug auf ω und z (D. W. § 23, 6).

4. *Ist jetzt η eine gebrochene Function und im nicht singulären Punkte $\mathfrak{P}$ endlich, so ist auch $\frac{d\eta}{dz}$ in $\mathfrak{P}$ endlich.*

Denn bezeichnen wir Ober- und Unterideal von $\mathfrak{o}\eta$ bezüglich durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$, so dass

$$\mathfrak{o}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

dann kann $\mathfrak{a}$ jedenfalls nicht durch das den Punkt $\mathfrak{P}$ erzeugende Primideal $\mathfrak{p}$ theilbar sein und daher

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha} \tag{8}$$

gesetzt werden, wo β und α zwei ganze Functionen sind, von denen α in $\mathfrak{P}$ nicht verschwindet. Daraus ergiebt sich dann

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha\,\frac{d\beta}{dz} - \beta\,\frac{d\alpha}{dz}\right), \tag{9}$$

woraus das Gesagte folgt.

5. Will man $\frac{d\eta}{dz}$ als Polygonquotienten darstellen, so ist zu beachten, dass nach § 3 das Obereck von $\frac{1}{\alpha^2}$ durch $\mathfrak{P}'^4$ theilbar, und die Unterecke von $\frac{d\alpha}{dz}$, $\frac{d\beta}{dz}$ in $\mathfrak{Z}$ aufgehen müssen. Es kann also, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Polygone bedeuten, $\frac{d\eta}{dz}$ jedenfalls in die Form

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\mathfrak{P}'^4\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}} \tag{10}$$

gesetzt werden.

Nach Herrn Dedekind und Weber wird nun ein Ausdruck wie $\eta\,dz$ ein Differential in Ω, und zwar entweder ein eigentliches oder ein Abel'sches Differential genannt, je nachdem $\eta\,dz$ wirklich das Differential einer Function in Ω ist oder nicht. In beiden Fällen wird die Bezeichnung

$$d\widetilde{\eta} = \eta \cdot dz \tag{11}$$

eingeführt. Hiernach ist der in (9) auftretende Ausdruck $\frac{d\eta}{dz}$ ein eigentlicher Differentialquotient, und wenn wir denselben durch ω bezeichnen, so ist

$$\omega = \frac{\mathfrak{P}'^4\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}}. \tag{12}$$

Aber auch wenn $\frac{d\widetilde{\eta}}{dz}$ ein uneigentlicher Differentialquotient ist, kann diese Form hergestellt werden, denn $\frac{d\widetilde{\eta}}{dz} = \eta$ ist eine Function in Ω

und als solche darstellbar durch einen Polygonquotienten, den man blos mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{P}'^4$ zu erweitern braucht, um die Form (12) zu erhalten.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung (11) kann also η stets in die Form

$$\eta = \frac{\mathfrak{P}'^{s}\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}\mathfrak{B}} \tag{13}$$

gesetzt werden, und es wird dementsprechend für das Differential $d\widetilde{\eta}$ die symbolische Bezeichnung

$$d\widetilde{\eta} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \tag{14}$$

eingeführt, wobei indessen jetzt die Ordnungszahlen a und b vom Zähler bezw. Nenner nicht einander gleich, sondern gemäss (13) durch die Gleichung

$$a + 3 = b + 2\varrho + 1$$

oder

$$a = b + 2\varrho - 2 \tag{15}$$

verbunden sind.

§ 6.

Die Differentiale erster Gattung und ihre Polygonclassen.

Unter Differentialen 1. Gattung werden diejenigen verstanden, deren Untereck das Nulleck $\mathfrak{O}$ ist (D. W. § 26). Wird ein solches Differential erster Gattung mit dw, sein Obereck mit $\mathfrak{W}$ bezeichnet, so ist die Function

$$\frac{dw}{dz} = u = \frac{\mathfrak{P}'^{s}\mathfrak{W}}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}} \tag{1}$$

der allgemeine Ausdruck eines Differentialquotienten erster Gattung und $\mathfrak{W}$ heist das Grundpolygon von dw. Die Gesammtheit der Polygone $\mathfrak{W}$ bildet eine bestimmte Polygonclasse W. Nach D. W. § 26, ist ein solcher Differentialquotient durch die 2 Forderungen:

I. In jedem Punkte, in welchem z einen endlichen Werth z_0 hat, ist

$$\big(u(z - z_0)\big)_0 = 0,$$

II. in jedem Punkte, in welchem $z = \infty$ ist, ist

$$(uz)_0 = 0$$

vollkommen bestimmt.

Und in der That folgt aus § 3

$$u(z - z_0) = \frac{\mathfrak{P}'\mathfrak{W}\mathfrak{P}_{z_0}\mathfrak{Q}_{z_0}}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}} = 0 \text{ in } \mathfrak{P}_{z_0}, \mathfrak{Q}_{z_0},$$

$$u(z - a_k) = \frac{\mathfrak{P}'\mathfrak{W}\mathfrak{S}_k}{\mathfrak{S}_0\dots\mathfrak{S}_{k-1}\mathfrak{S}_{k+1}\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}} = 0 \text{ „ } \mathfrak{S}_k,$$

$$uz = \frac{\mathfrak{P}'\mathfrak{W}\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}} = 0^1 \text{ „ } \mathfrak{P}';$$

aber auch umgekehrt: besitzt

$$u = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

die beiden genannten Eigenschaften, so muss

$$u(z - z_0) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}_{z_0}\mathfrak{Q}_{z_0}}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}'^2} = 0 \text{ in } \mathfrak{P}_{z_0},\ \mathfrak{Q}_{z_0},$$

$$u(z - a_k) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}'^2} = 0 \text{ „ } \mathfrak{S}_k,$$

$$uz = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}'^2} = 0 \text{ „ } \mathfrak{P}'$$

sein, es darf daher $\mathfrak{B}$ nicht durch einen gewöhnlichen (d. h. nicht singulären) Punkt, wohl aber und höchstens durch $\mathfrak{S}_k^1$ theilbar sein und $\mathfrak{A}$ muss durch $\mathfrak{P}'^3$ theilbar sein, mithin u die Form (1) haben, womit der allgemein gültige Satz für unseren speciellen Fall zur Anschauung gebracht ist.

Aus (1) folgt

$$R(z) \cdot u = \frac{\mathfrak{W}\mathfrak{z}}{\mathfrak{P}'^{4\varrho}}, \tag{2}$$

d. h. es ist $R(z) \cdot u$ eine *ganze* Function, die in den singulären Punkten verschwindet.*) Da nun das Ideal $\mathfrak{a}_k$ die Gesammtheit der ganzen Functionen enthält, die in $\mathfrak{S}_k$ verschwinden, so muss $R(z) \cdot u$ durch $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{2\varrho}$, mithin durch $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{2\varrho} = \mathfrak{z}$ theilbar sein, d. h. $R(z) \cdot u$ ist eine Function in $\mathfrak{z} = R(z) \cdot \mathfrak{e}$, und demnach u eine Function in $\mathfrak{e}$, also, wenn x und y ganze rationale Functionen von z bezüglich vom Grade m und n bedeuten,

$$u = x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2\Theta}. \tag{3}$$

Aus § 1, (15) und (16) folgt dann:

$$x = S(u),$$
$$y = S(\Theta u).$$

Die Spur steht nun in einem einfachen Zusammenhang mit den conjugirten Werthen. Sind nämlich die Werthe η' und η'', welche die beliebige Function η in Ω in zwei nach z conjugirten Punkten annimmt, endlich, so ist für den betreffenden Werth von z stets $S(\eta) = \eta' + \eta''$ (D. W. § 16, 5).

In vorliegendem Falle bemerken wir, dass wegen der aus § 3, (11), (13) und § 6, (1) sich ergebenden Gleichungen

*) Die Gleichung (2) zeigt auch sofort, dass für $\varrho = 0$ Differentiale 1ter Gattung nicht existiren.

$$uz = \frac{\mathfrak{P}'\mathfrak{W}'}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}},$$

$$\frac{\Theta u}{z^\varrho} = \frac{\mathfrak{P}'^2\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}_0^\varrho\mathfrak{Q}_0^\varrho},$$

sowohl uz, wie $\frac{\Theta u}{z^\varrho}$ in $\mathfrak{P}'$ verschwinden, also

$$xz = S(uz) \quad = 0 \text{ für } z = \infty,$$
$$\frac{y}{z^\varrho} = S\left(\frac{\Theta u}{z^\varrho}\right) = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

ist. Es muss mithin nothwendig $x = 0$, und es darf höchstens $n = \varrho - 1$, also wenn $c_0, c_1, c_2, \dots c_{\varrho-1}$ willkürliche Constanten bedeuten,

$$u = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{\varrho-1} z^{\varrho-1}) \cdot \frac{1}{z\Theta} \tag{4}$$

sein. Umgekehrt genügt auch jede in (4) enthaltene Function den Bedingungen I und II und ist daher ein Differentialquotient erster Gattung. Damit ist die Existenz der entsprechenden Differentiale nachgewiesen und wir kommen zu dem Resultate:

Jedes Differential erster Gattung dw lässt sich in der Form darstellen:

$$dw = c_0 \cdot \frac{dz}{\Theta} + c_1 \frac{z\,dz}{\Theta} + \dots + c_{\varrho-1} \frac{z^{\varrho-1}dz}{\Theta}, \tag{5}$$

d. h. die Differentiale erster Gattung bilden eine *Schaar von der Dimension* ϱ, und die ϱ Differentiale

$$dw_1 = \frac{dz}{\Theta}, \; dw_2 = \frac{z.dz}{\Theta}, \dots, dw_\varrho = \frac{z^{\varrho-1}.dz}{\Theta} \tag{6}$$

eine *Basis dieser Schaar.*

Demnach ist auch ϱ *die Dimension der Classe W* der vollständigen Polygone erster Gattung, und da nach § 3

$$\frac{z^k}{\Theta} = \frac{\mathfrak{P}'^3\,\mathfrak{P}'^{2(\varrho-1-k)}(\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0)^k}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\dots\mathfrak{S}_{2\varrho}}, \tag{7}$$

so sind die zu den Differentialen (6) gehörigen Grundpolygone bezüglich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W}_1 &= \mathfrak{P}'^{2(\varrho-1)}, \\
\mathfrak{W}_2 &= \mathfrak{P}'^{2(\varrho-2)}\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0, \\
\mathfrak{W}_3 &= \mathfrak{P}'^{2(\varrho-3)}(\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0)^2, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{W}_\varrho &= (\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0)^{\varrho-1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Jedes dieser Grundpolygone ist thatsächlich von der Ordnung $2\varrho - 2$, und ihre Gesammtheit bildet eine *Basis der Hauptclasse W*.

2. Unter den eben betrachteten Differentialquotienten müssen sich auch diejenigen nach D. W. mit u' zu bezeichnenden, finden, für welche, wenn k eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$z^k \cdot u' = 0 \text{ in } \mathfrak{P}'. \tag{9}$$

Wie vorhin schliessen wir, dass in diesem Falle

$$\frac{\Theta}{z^{\varrho+1}} \cdot z^k u' = 0 \text{ in } \mathfrak{P}',$$

und daher

$$\frac{y}{z^{\varrho-k+1}} = S\left(\frac{\Theta}{z^{\varrho+1}} \cdot z^k u'\right) = 0 \quad \text{für} \quad z = \infty,$$

mithin die ganze rationale Function y höchstens vom Grade $\varrho - k$ sein darf. Daraus folgt, dass solche Differentialquotienten nicht existiren, wenn $k > \varrho$; dass dagegen, wenn $k \leqq \varrho$, die Differentialquotienten u' alle von der Form

$$u' = (c_0' + c_1' z + \cdots + c_{\varrho-k}' \cdot z^{\varrho-k}) \cdot \frac{1}{\Theta} \tag{10}$$

sind und folglich eine endliche Schaar von der Dimension $\varrho - k + 1$ bilden, für die die Functionen

$$\frac{dw_1}{dz}, \frac{dw_2}{dz}, \cdots, \frac{dw_{\varrho-k+1}}{dz}$$

als Basis angenommen werden können.

Demgemäss ist auch $\varrho - k + 1$ die Dimension der entsprechenden Polygonclasse W. Da aber

$$\mathfrak{W}_{\varrho-k+1} = \mathfrak{P}'^{2(k-1)} \cdot (\mathfrak{P}_0 \mathfrak{Q}_0)^{\varrho-k},$$

so bildet diesmal *W eine uneigentliche Classe* (D. W. § 21, 3) vom Theiler

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}'^{2(k-1)},$$

so dass jetzt

$$W = \mathfrak{P}'^{2(k-1)} W'$$

und W' eine eigentliche Classe von der Ordnung

$$2\varrho - 2 - 2k + 2 = 2(\varrho - k)$$

ist; d. h.

Man kann

$$u' = \frac{\mathfrak{P}'^{2(k+1)} \mathfrak{W}'}{\mathfrak{Z}} \tag{11}$$

setzen, und es bilden dann die den Differentialen

$$dw' = u' \cdot dz$$

entsprechenden Polygone $\mathfrak{W}'$ eine eigentliche Classe W' von der Dimension $\varrho - k + 1$ und der Ordnung $2(\varrho - k)$, so zwar, dass die $\varrho - k + 1$ Polygone

$$(12) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{W}_1' &= \mathfrak{P}'^{2(\varrho-k)}, \\ \mathfrak{W}_2' &= \mathfrak{P}'^{2(\varrho-k-1)}\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{W}_{\varrho-k+1} &= (\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0)^{\varrho-k} \end{aligned}$$

eine Basis der Schaar W' bilden.

Darmstadt, Februar 1892.

Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen.

Von

Friedrich Schur in Aachen.

Bei der Begründung der Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen ist bisher immer vorausgesetzt worden, dass die darstellenden Functionen Potenzreihen seien, wenn es auch Lie schon in den ersten Zeilen seines grundlegenden Werkes*) ausspricht, dass ein nicht geringer Theil seiner Resultate von dieser Voraussetzung unabhängig sei. Doch dürfte es für den Leser nicht leicht sein, diese Unabhängigkeit im Einzelnen zu verfolgen, zumal noch wenig strenge Untersuchungen über die dabei in Betracht kommenden partiellen Differentialgleichungen vorliegen. Für die Anwendungen der Theorie besonders auf die Grundlagen der Geometrie ist aber diese Frage von grosser Wichtigkeit. Da es sich nämlich hierbei der Natur der Sache nach um Functionen reeller Variablen handelt, so ist klar, dass die Annahme der Entwickelbarkeit derselben in Potenzreihen ein zunächst ungerechtfertigt erscheinende Beschränkung ist. In der That spricht Lie in seiner I. Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie**) ohne Beweis den Satz aus: „Jede transitive Gruppe, welche durch solche continuirliche Gleichungen bestimmt ist, die eine gewisse Anzahl Differentiationen gestatten, ist mit einer durch analytische Gleichungen darstellbaren Gruppe ähnlich.“ Diesen Satz zu beweisen ist der hauptsächliche Zweck dieser Zeilen. Dabei zeigt es sich, dass, von gewissen sich auf die identische Transformation beziehenden Voraussetzungen abgesehen, die Existenz erster und zweiter Differentialquotienten der darstellenden Functionen für den fast unveränderten Aufbau der Lie'schen Theorie ausreicht, sodass die o. a. von Lie

*) Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig, Teubner 1888. Wir werden dieses Werk immer kurz als „Transf.“ citiren.

**) Berichte der Sächs. Gesellschaft d. Wiss. 1890, p. 312.

gemeinte Unabhängigkeit seiner Resultate von der Zugrundelegung analytischer Functionen sich mit geringen Ausnahmen auf den ganzen Kreis derselben bezieht. Was im Besonderen den obigen Satz betrifft, so war der Beweis desselben vorgezeichnet durch die vom Verfasser bemerkte Thatsache, dass sich nicht nur jede einfach transitive Gruppe, wie die Parametergruppe, sondern auch jede transitive Gruppe auf eine geeignete canonische Form bringen lasse, für welche die darstellenden Functionen sich in ganz bestimmter Weise aus den sogenannten Zusammensetzungsconstanten aufbauen. Es kam also nur darauf an, auch diese Reduction von den bis dahin gemachten Voraussetzungen unabhängig zu machen.

Der Untersuchung vorausgehen musste natürlich eine genaue Prüfung einiger bekannter Sätze über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auf ihre Unabhängigkeit von der Zugrundelegung analytischer Functionen, wobei diese Sätze in eine für die Theorie der Transformationsgruppen besonders brauchbare Form gebracht wurden. Da diese Sätze auf solche über gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können, so mussten auch einige auf diese bezügliche Fundamentalsätze in der hier nöthigen Form abgeleitet werden, obwohl wir uns da eher auf die vorhandene Litteratur hätten beziehen können. Weil jedoch in der dem Verfasser zugänglichen Litteratur über diesen Gegenstand besonders auf die Differentiirbarkeit der Lösungen solcher Differentialgleichungen nach den Anfangswerthen oder nach gewissen Parametern nicht in ausreichender Weise eingegangen ist, so mussten alle für uns in Betracht kommenden Sätze einer vollständigen Begründung unterzogen werden.

§ 1.

Ueber Systeme gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lipschitz hat in den Paragraphen 84—86 des 2. Bandes seines Lehrbuches der Analysis (Bonn, 1880) die Integrirbarkeit eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen*) bewiesen. Man kann das Resultat seiner Untersuchungen folgendermassen formuliren.

*) S. auch Lipschitz, Disamina della possibilità d'integrare ecc. Ann. di Mat. Ser. II, tom II, p. 288. Unter blosser Voraussetzung der Stetigkeit der rechten Seiten der Gleichungen (1) hat Peano (Démonstration de l'intégrabilité des équations differentielles ordinaires) in diesen Annalen, Bd. 37, p. 182 ff. dasselbe Problem behandelt, wo man auch weitere Litteraturangaben findet. Wir haben es in Rücksicht auf das Verständniss weiterer Kreise nicht für möglich gehalten uns auf diese Abhandlung zu berufen, da die Zeichenschrift von Peano den Mathematikern noch kaum geläufig sein dürfte.

Ist:

$$\frac{dx_a}{dt} = \varphi_a(x_1, \ldots x_n, t) \quad (a = 1 \ldots n) \tag{1}$$

das gegebene System gewöhnlicher Differentialgleichungen, so wird von den Functionen $\varphi_a(x, t)$ zuerst vorausgesetzt, dass dieselben für einen gewissen endlichen Bereich K der reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ und t eindeutig und endlich seien:

$$|\varphi_a(x, t)| < g_a, \tag{2}$$

dass sie ferner in diesem Bereiche ausnahmslos stetig seien, d. h. zu jedem positiven λ soll ein positives ε so gefunden werden können, dass:

$$|\varphi_a(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi_a(x, t)| < \lambda \tag{3}$$

für $|\Delta x_a|$ und $|\Delta t| < \varepsilon$ und für alle Werthsysteme innerhalb des Bereiches K. Endlich sollen in diesem Bereiche die Ungleichungen:

$$|\varphi_a(x+\Delta x, t) - \varphi_a(x, t)| < \sum_{b=1}^{n} c_a^b |\Delta x_b| \tag{4}$$

erfüllbar sein, wo die c_a^b positive Constanten sind, als welche unter Voraussetzung der Existenz endlicher und stetiger Differentialquotienten der $\varphi_a(x, t)$ nach den $x_1 \ldots x_n$ z. B. die oberen Grenzen der absoluten Beträge dieser für den ganzen Bereich K gewählt werden können.

Unter diesen Voraussetzungen gelangt Lipschitz folgendermassen zu einem vollständigen Integral $x_a = f_a(t)$ des Systems (1), welches den Anfangsbedingungen $x_a^0 = f_a(t^0)$ genügt, wo das Werthsystem $x_1^0 \ldots x_n^0, t^0$ im Inneren des Bereiches K liegt. Man wird nämlich stets solche positive endliche (nicht unendlich kleine) Constanten $a_1 \ldots a_n, b$ angeben können, dass alle Werthsysteme $x_1 \ldots x_n, t$, welche die Ungleichungen:

$$|x_a - x_a^0| \leqq a_a \quad \text{und} \quad |t - t^0| \leqq b \tag{5}$$

erfüllen, innerhalb des Bereiches K liegen. Bestimmt man dann die positive Constante c so, dass:

$$c < b \quad \text{und} \quad cg_a < a_a, \tag{6}$$

so ist durch die Ungleichungen:

$$|x_a - x_a^0| \leqq a_a \quad \text{und} \quad |t - t^0| \leqq c \tag{7}$$

ein (parallelepipedischer) Bereich K_0 bestimmt, für welchen die Integration vorgenommen wird.

Man nehme nämlich zwischen t^0 und t eine Reihe von Werthen $t^1, t^2, \ldots, t^m$ an und berechne die zugehörigen Werthe der x_a nach den folgenden Formeln:

$$(8)\qquad \begin{cases} x_a^i = x_a^{i-1} + (t^i - t^{i-1})\,\varphi_a(x^{i-1}, t^{i-1}), & (i = 1 \ldots m) \\ x_a = x_a^m + (t - t^m)\,\varphi_a(x^m, t^m). \end{cases}$$

Dann wird gezeigt, dass erstens die x_a^i und x_a stets innerhalb des Bereiches K^0 liegen, und dass zweitens die x_a sich bei beliebiger Fortsetzung der Theilung des Intervalles von t^0 bis t festen Grenzwerthen nähern, den Werthen der gesuchten Functionen $f_a(t)$.

Wir wollen diesen Beweis kurz skizziren, da wir weitere Untersuchungen über die Natur der Functionen $f_a(t)$ machen müssen, für welche die Beweismethode von Lipschitz typisch ist.

Die Formeln:

$$(9)\quad x_a^{k+i} - x_a^k = (t^{k+1} - t^k)\,\varphi_a(x^k, t^k) + (t^{k+2} - t^{k+1})\,\varphi_a(x^{k+1}, t^{k+1}) + \cdots + (t^{k+i} - t^{k+i-1})\,\varphi_a(x^{k+i-1}, t^{k+i-1})$$

ergeben aus der Annahme, dass die $x_a^0, x_a^1, \ldots, x_a^{k+i-1}$ innerhalb des Bereiches K^0 liegen, in Verbindung mit (2) die Ungleichungen:

$$(10)\qquad |x_a^{k+i} - x_a^k| < |t^{k+i} - t^k|\,g_a,$$

wodurch wegen der Ungleichungen (6) der erste Theil unserer Behauptung bewiesen ist. Zugleich lehren diese Ungleichungen, dass $|x_a^{k+l} - x_a^k|$ für alle $l \leqq i$ durch ein gehörig kleines $|t^{k+i} - t^k|$ beliebig klein gemacht werden kann, nach (3) also auch:

$$(11)\qquad |\delta_a^l| = |\varphi_a(x^{k+l}, t^{k+l}) - \varphi_a(x^k, t^k)|.$$

Da dieser Bezeichnung gemäss:

$$(12)\quad x_a^{k+i} = x_a^k + (t^{k+i} - t^k)\,\varphi_a(x^k, t^k) + (t^{k+2} - t^{k+1})\,\delta_a^1 + \cdots + (t^{k+i} - t^{k+i-1})\,\delta_a^i,$$

so ergiebt sich:

$$(13)\qquad x_a^{k+i} = x_a^k + (t^{k+i} - t^k)\,\{\varphi_a(x^k, t^k) + \lambda_a\},$$

wo $|\lambda_a|$ durch ein gehörig kleines $|t^{k+i} - t^k|$ beliebig klein gemacht werden kann.

Wenn wir also zwischen die Theilwerthe $t^0, t^1, \ldots, t^m, t$ irgend welche neue Theilwerthe einschalten und die dann nach den Formeln (8) berechneten Werthe der x_a für die ersten Theilwerthe t^i mit $\mathfrak{x}_a^i$ bezeichnen, so können wir setzen:

$$(14)\qquad \mathfrak{x}_a^i = \mathfrak{x}_a^{i-1} + (t^i - t^{i-1})\,\{\varphi_a(\mathfrak{x}^{i-1}, t^{i-1}) + \lambda_a^i\},$$

wo die $|\lambda_a^i|$ durch gehörig kleine Annahme der Theilintervalle $|t^i - t^{i-1}|$ kleiner als λ gemacht werden können. Setzen wir daher $\xi_a^i = |\mathfrak{x}_a^i - x_a^i|$, so folgt aus (4) und (8):

$$(15)\qquad \xi_a^i < \xi_a^{i-1} + |t^i - t^{i-1}|\left\{\lambda + \sum_{b=1}^{n} c_a^b\,\xi_b^{i-1}\right\}.$$

Da wir nun durch die obige Einschaltung neuer Theilwerthe zu jeder beliebigen Eintheilung des Intervalles $t - t^0$ gelangen können, so können wir:

$$|t^i - t^{i-1}| = \delta = \frac{|t - t^0|}{m+1} \tag{16}$$

setzen. Verstehen wir daher unter g die obere Grenze der Summen $c_a^1 + c_a^2 + \cdots + c_a^n$, so folgt:

$$\xi_a^0 = 0, \quad \xi_a^1 < \delta\lambda, \quad \xi_a^2 < \frac{\lambda}{g}\left((1+g\delta)^2 - 1\right), \text{ u. s. w.}$$

und schliesslich:

$$\xi_a^i < \frac{\lambda}{g}\left\{(1+g\delta)^i - 1\right\} < \frac{\lambda}{g}\left(e^{g|t-t^0|} - 1\right). \tag{17}$$

Diese Ungleichungen lehren, dass man die Eintheilung des Intervalles $t - t^0$ in $m + 1$ gleiche Theile $t^i - t^{i-1}$ so weit treiben kann, dass bei Einschaltung irgend welcher neuer Theilwerthe zwischen die t^i die Formeln (8) für die ersten Theilwerthe t^i solche Werthe x_a^i für die x_a ergeben, welche von den nach der ersten Eintheilung berechneten Werthen x_a^i um beliebig wenig abweichen. Hiermit ist die Existenz eines Integrals der Differentialgleichungen (1) mit gegebenen Anfangsbedingungen erwiesen.

Es frägt sich nur, ob es nur ein solch Integral giebt. Sei nun $x_a = f_a(t)$ irgend ein Integral der Differentialgleichungen (1) von der Art, dass $f_a(t^0) = x_a^0$, wo je die Functionen $f_a(t)$ in einem gewissen Intervalle von t^0 bis t nebst ihren ersten Differentialquotienten sicher endlich und stetig sein müssen, soll anders von einem eigentlichen Integrale die Rede sein; verstehen wir dann unter τ_a^i gewisse Werthe, die zwischen t^i und t^{i+1} liegen, so ist doch:

$$f_a(t^i) = f_a(t^{i-1}) + \delta\varphi_a\left(f(\tau_a^{i-1}),\ \tau_a^{i-1}\right). \tag{18}$$

Setzen wir daher $f_a(t^i) - x_a^i = \eta_a^i$, so folgt:

$$\begin{aligned}\eta_a^i = \eta_a^{i-1} + \delta\{&\varphi_a\left(f(t^{i-1}), t^{i-1}\right) - \varphi_a(x^{i-1}, t^{i-1}) \\ &+ \varphi_a\left(f(\tau_a^{i-1}),\ \tau_a^{i-1}\right) - \varphi_a\left(f(t^{i-1}),\ t^{i-1}\right)\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Da nun die letzte Differenz des Coefficienten von δ durch ein gehörig kleines δ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine Grösse λ gemacht werden kann, so folgt wieder:

$$|\eta_a^i| < |\eta_a^{i-1}| + \delta\left\{\lambda + \sum_{b=1}^{n} c_a^b\,|\eta_a^{i-1}|\right\}, \tag{20}$$

woraus wie oben folgt, dass die $|f_a(t^i) - x_a^i|$ durch ein gehörig kleines δ beliebig klein gemacht werden können. Hiermit ist nachgewiesen,

dass es unter unsern Voraussetzungen nur ein Integral der gesuchten Art giebt.

Soweit sind wir im Wesentlichen der Darstellung von Lipschitz gefolgt. Nunmehr aber wollen wir beweisen, dass die Functionen $f_a(t)$ stetige Functionen der Anfangswerthe x_a^0 sind. Bezeichnen wir nämlich die für die Anfangswerthe $x_a^0 + \Delta x_a^0$ entstehenden Werthe x_a mit überstrichenen Buchstaben, so haben wir:

$$(21) \qquad |\bar{x}_a^i - x_a^i| < |\bar{x}_a^{i-1} - x_a^{i-1}| + \delta \sum_{b=1}^{n} c_a^b |\bar{x}_b^{i-1} - x_b^i|,$$

woraus leicht folgt:

$$(22) \qquad |\bar{x}_a^i - x_a^i| < (1+g\delta)^i \sum_{b=1}^{n} |\Delta x_b^0|,$$

oder:

$$(23) \qquad |f_a(x^0+\Delta x^0, t) - f_a(x^0, t)| < e^{\varphi(t-t^0)} \sum_{b=1}^{n} |\Delta x_b^0|,$$

womit die Stetigkeit der Functionen $f_a(x^0, t)$ auch in Beziehung auf die x_b^0 nachgewiesen ist.

Wären die rechten Seiten der Differentialgleichungen (1) auch noch von gewissen Parametern $y_1 \ldots y_r$ abhängig, sodass diese Gleichungen die Form:

$$(24) \qquad \frac{dx_a}{dt} = \varphi_a(x_1 \ldots x_n, t, y_1 \ldots y_r) \quad (a=1 \ldots n)$$

hätten, die Integrale $x_a = f_a(t)$ also auch noch von $y_1 \ldots y_r$ abhingen, und kann dann vorausgesetzt werden, dass für alle Werthsysteme des in Betracht kommenden Bereiches der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n, t, y_1 \ldots y_r$ die Ungleichungen:

$$(25) \quad |\varphi_a(x+\Delta x, t, y+\Delta y) - \varphi_a(x, t, y)| < \sum_{b=1}^{n} c_a^b |\Delta x_b| < \sum_{c=1}^{r} e_a^c |\Delta y_c|$$

bei endlichen positiven Werthen der c_a^b und e_a^c bestehen, so lässt sich in derselben Weise zeigen, dass:

$$(26) \qquad |f_a(t, y+\Delta y) - (f_a(t, y)| < (e^{h(t-t_0)} - 1) \sum_{c=1}^{r} |\Delta y_c|,$$

wo h die obere Grenze der Summen

$$c_a^1 + c_a^2 + \cdots + c_a^n \quad \text{und} \quad e_a^1 + e_a^2 + \cdots + e_a^r$$

bedeutet. Es sind somit bei obiger Annahme die $f_a(t)$ auch stetige Functionen der Parameter $y_1 \ldots y_r$.

Setzen wir weiter voraus, dass die ersten partiellen Differentialquotienten der $\varphi_a(x, t)$ nach den $x_1 \ldots x_n$ für den ganzen Bereich K

eindeutige, endliche und stetige Functionen von $x_1 \ldots x_n$ und t seien, sodass die Ungleichungen (4) sicher erfüllt sind, wenn für die c_a^b die oberen Grenzen der absoluten Beträge dieser Differentialquotienten gesetzt werden, so lässt sich auch die Existenz der Differentialquotienten der $f_a(t)$ nach ihren Anfangswerthen x_b^0 nachweisen*).

Bezeichnen wir nämlich wieder mit $\bar{x}_a^i$ die auf Grund der Formeln (8) mit den Anfangswerthen $\bar{x}_a^0$, von denen nur einer um Δx_b^0 von dem Werthe des ursprünglichen x_b^0 abweichen mag, berechneten Grössen x_a^i, ferner mit $\mathfrak{x}_a^i$ gewisse Werthsysteme, die jedesmal zwischen x_a^i und $\bar{x}_a^i$ liegen, und behalten im Uebrigen die früheren Bezeichnungen bei, so erhalten wir zur Berechnung der Differenzenquotienten:

$$u_a^i = \frac{\bar{x}_a^i - x_a^i}{\Delta x_b^0}$$

die folgenden Formeln:

$$(27) \qquad u_a^i = u_a^{i-1} + \delta \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(\mathfrak{x}^{i-1}, t^{i-1})}{\partial \mathfrak{x}_c^{i-1}} u_c^{i-1}, **)$$

wo $u_c^0 = 1$ oder 0 ist, je nachdem $a = b$ oder von b verschieden ist. Vergleichen wir nun diese Formeln mit den folgenden:

$$(28) \qquad v_a^i = v_a^{i-1} + \delta \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(x^{i-1}, t^{i-1})}{\partial x_c^{i-1}} v_c^{i-1},$$

wo ebenfalls $v_a^0 = 1$ oder 0 ist, je nachdem $a = b$ oder von b verschieden ist, so werden die Differenzen $w_a^i = u_a^i - v_a^i$ durch die Formeln:

$$(29) \qquad w_a^i = w_a^{i-1} + \delta \sum_{c=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi_a(\mathfrak{x}^{i-1}, t^{i-1})}{\partial \mathfrak{x}_c^{i-1}} - \frac{\partial \varphi_a(x^{i-1}, t^{i-1})}{\partial x_c^{i-1}} \right\} u_c^{i-1}$$
$$+ \delta \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(x^{i-1}, t^{i-1})}{\partial x_c^{i-1}} w_c^{i-1}$$

mit den Anfangsbedingungen $w_a^0 = 0$ verbunden sein.

Nun wissen wir, dass die $|\bar{x}_a^i - x_a^i|$ und folglich auch $|\mathfrak{x}_a^i - x_a^i|$ durch ein gehörig kleines Δx_b^0 beliebig klein gemacht werden können. Es können demnach wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $\frac{\partial \varphi_a(x,t)}{\partial x_c}$

*) Vergl. hierüber auch Laurent, traité d'analyse, tome V, Paris 1890, p. 10. Doch scheint mir der dort gegebene Beweis nicht ganz ausreichend.

**) Eigentlich haben die $\mathfrak{x}_a^{i-1}$ für jede der n Gleichungen dieses Systems andre Werthe, doch glaubten wir hiervon bei der Bezeichnung absehen zu können, ohne das Verständniss zu beeinträchtigen.

für den ganzen Bereich K die Coefficienten der u_c^{i-1} in den Formeln (29) durch ein gehörig kleines Δx_b^0 unter jede beliebig kleine positive Grösse $\varkappa$ gebracht werden. Ferner folgt aus den Formeln (23), dass die u_a^i auch bei beliebig kleinem Δx_b^0 endlich bleiben. Bezeichnen wir daher mit q die obere Grenze der Summe $|u_1^i| + |u_2^i| + \cdots + |u_n^i|$, so folgt:

$$|w_a^i| < |w_a^{i-1}| + \delta\left(q\varkappa + \sum_{c=1}^{n} c_a^c |w_c^{i-1}|\right), \tag{30}$$

woraus wie oben folgt, dass die $|u_a^i - v_a^i|$ durch ein gehörig kleines $\varkappa$ oder ein gehörig kleines $|\Delta x_b^0|$ beliebig klein gemacht werden können.

Bedenkt man endlich, dass die $|f_a(t^i) - x_a^i|$ durch ein gehörig kleines δ beliebig klein gemacht werden können, so erkennt man durch ein entsprechendes Raisonnement, dass die v_a^i den Integralen $\frac{\partial f_a}{\partial x_b^0}$ der linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_b^0}\right)}{dt} = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(f(t), t)}{\partial f_c(t)} \frac{\partial f_c}{\partial x_b^0} \tag{31}$$

mit den Anfangsbedingungen $\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_b^0}\right)^0 = \delta_{a,b}$, wo $\delta_{a,b} = 1$ für $a = b$ und $= 0$ für $a \gtrless b$, durch ein gehörig kleines δ beliebig nahe gebracht werden können. Diese Integrale sind demnach auch die Grenzwerthe, denen sich die Differenzenquotienten $\frac{\bar{x}_a - x_a}{\Delta x_b^0}$ bei beliebig abnehmenden Δx_b^0 nähern. Hiermit ist gezeigt, dass die Differentialquotienten der $f_a(t)$ nach den Anfangswerthen x_b^0 eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind.

Ganz in derselben Weise erkennt man im zweiten Falle, dass unter Voraussetzung der Eindeutigkeit, Endlichkeit nnd Stetigkeit (in Beziehung auf alle Veränderlichen) der ersten Differentialquotienten der $\varphi_a(x, t, y)$ nach den y_c die Differentialquotienten $\frac{\partial f_a}{\partial y_c}$ als die Integrale der linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{\partial f_a}{\partial y_c}\right)}{dt} = \frac{\partial \varphi_a(f(t), t, y)}{\partial y_c} + \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial f_a(f(t), t, y)}{\partial f_b(t)} \frac{\partial f_b}{\partial y_c} \tag{32}$$

mit den Anfangsbedingungen $\left(\frac{\partial f_a}{\partial y_c}\right)^0 = 0$ als eindeutige, endliche und stetige Functionen von t definirt sind.

Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Sind die n Functionen $\varphi_a(x_1 \dots x_n, t, y_1 \dots y_r)$ in einem gewissen Bereiche der reellen Veränderlichen $x_1 \dots x_n, t, y_1 \dots y_r$ nebst ihren ersten Differentialquotienten nach $x_1 \dots x_n$ und $y_1 \dots y_r$ ausnahmslos eindeutig, endlich und in Beziehung auf alle Variabeln stetig, so giebt es stets ein und nur ein System von Functionen $x_a = f_a(t)$, welche die Differentialgleichungen:*

$$\frac{dx_a}{dt} = \varphi_a(x_1 \dots x_n, t, y_1 \dots y_r) \qquad (a = 1 \dots n)$$

befriedigen und für $t = t^0$ dem Inneren des Bereiches angehörige Werthe x_a^0 annehmen. Diese Functionen sind sowohl nach den Anfangswerthen x_a^0 als nach den Parametern y_b einmal differentiirbar und zwar sind diese Differentialquotienten als eindeutige, endliche und stetige Functionen von t bestimmt durch die linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_b^0}\right)}{dt} = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(f(t), t, y)}{\partial f_c(t)} \frac{\partial f_c}{\partial x_b^0}$$

und:

$$\frac{d\left(\frac{\partial f_a}{\partial y_b}\right)}{dt} = \frac{\partial \varphi_a(f(t), t, y)}{\partial y_c} + \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a(f(t), t, y)}{\partial f_c(t)} \frac{\partial f_c}{\partial y_b}$$

und die Bedingungen, dass für $t = t^0$: $\frac{\partial f_a}{\partial x_b^0} = \delta_{a,b}$ und $\frac{\partial f_a}{\partial y_b} = 0$ werde.

Aus diesem Fundamentalsatze können wir den folgenden Satz über partielle Differentialgleichungen herleiten:

Satz 2. *Sind $\sigma_a^b(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_r)$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen der reellen Veränderlichen $x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_r$ für einen gewissen Bereich K derselben und erfüllen sie ausserdem die Identitäten:*

$$(33) \qquad \sum_{b=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \sigma_a^b(x, z)}{\partial x_b} \sigma_b^c(x, z) - \frac{\partial \sigma_a^c(x, z)}{\partial x_b} \sigma_b^a(x, z) \right\} + \frac{\partial \sigma_a^b(x, z)}{\partial z_c} - \frac{\partial \sigma_a^c(x, z)}{\partial z_b} = 0, \quad \begin{pmatrix} a = 1 \dots n \\ b, c = 1 \dots r \end{pmatrix}$$

so giebt es ein und nur ein Functionensystem $x_a = f_a(z_1 \dots z_r)$, welches die Differentialgleichungen:

$$(34) \qquad \frac{\partial x_a}{\partial z_b} = \sigma_a^b(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_r) \qquad (a = 1 \dots n, \; b = 1 \dots r)$$

befriedigt und den Anfangsbedingungen $x_a^0 = f_a(x_1^0 \ldots x_r^0)$ *genügt, wo* $x_1^0 \ldots x_n^0$, $z_1^0 \ldots z_r^0$ *eine Stelle im Inneren des Bereiches K; die Functionen* $f_a(z)$ *besitzen zugleich endliche und eindeutige erste Differentialquotienten nach* $x_1^0 \ldots x_n^0$*).

Wäre nämlich der Satz richtig, und setzen wir $z_b = z_b^0 + y_b t$, so würden die Functionen $x_a = f_a(z^0 + yt)$ als Functionen von t das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_a}{dt} = \sum_{b=1}^{r} \sigma_a^b(x, z^0 + ty)\, y_b \tag{35}$$

befriedigen und für $t = 0$ die Werthe x_a^0 annehmen. Sind umgekehrt die y_b so gewählt, dass die z_b für alle t zwischen -1 und $+1$ dem Bereiche K angehören, so existirt nach dem Satze 1 ein und nur ein solches Functionensystem $x_a = f_a(x^0, t, y)$, und es sind diese Functionen sowohl nach den x_a^0 als nach y_b einmal differentiirbar. Die letzten Differentialquotienten sind darnach definirt durch die linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_b}\right)}{dt} = \sigma_a^b(x, z^0 + yt) + t \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial \sigma_a^c(x, z^0 + yt)}{\partial z_b^0}\, y_c + \sum_{c=1}^{r} \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \sigma_a(x, z^0 + yt)}{\partial x_b}\, y_c \frac{\partial x_b}{\partial y_b} \tag{36}$$

und die Anfangsbedingungen: $\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_b}\right)^0 = 0$. Setzen wir daher:**)

$$\varphi_a^b(t) = \frac{\partial x_a}{\partial y_b} - t\sigma_a^b(x, z^0 + yt), \tag{37}$$

so folgt durch Substitution des Ausdrucks $\varphi_a^b(t) + t\sigma_a^b(x, z^0 + yt)$ für $\frac{\partial x_a}{\partial y_b}$ in die Gleichungen (86) auf Grund der Identitäten (31) leicht, dass:

$$\frac{d\varphi_a^b(t)}{dt} = \sum_{c=1}^{r} \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \sigma_a^c(x, z^0 + yt)}{\partial x_b}\, y_c \varphi_b^b(t). \tag{38}$$

*) Es ist nicht schwer zu zeigen, dass diese Differentialquotienten in Beziehung auf $z_1 \ldots z_r$ stetig sind, doch brauchen wir diese Eigenschaft für die Folge nicht.

**) Es ist diese Beweismethode derjenigen nachgebildet, welche Engel in der Note: Die canonische Form der Parametergruppe, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1891, p. 313 zur Erreichung des Uebergangs von einem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu dem entsprechenden Systeme partieller Differentialgleichungen benützt. Vgl. auch Laurent, traité d'Analyse, t. VI, p. 116—117.

Da die Coefficienten dieses Systems linearer Differentialgleichungen für die $\varphi_a^b(t)$ eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind und $\varphi_a^b(0) = 0$, so ist das einzige hier vorhandene Lösungssystem dieser Differentialgleichungen $\varphi_a^b(t) = 0$. Es ist demnach:

$$\frac{\partial x_a}{\partial y_b} = t\,\sigma_a^b(x, z^0 + yt). \tag{39}$$

Setzt man daher in $x_a = f_a(x^0, t, y)$ für y_b: $\frac{z_b - z_b^0}{t}$, so wird:

$$\frac{\partial f_a\left(x^0, t, \frac{z - z^0}{t}\right)}{dt} = \sum_{b=1}^{r} \sigma_a^b(x, z) y_b - \sum_{b=1}^{r} t\,\sigma_a^b(x, z)\,\frac{z_b - z_b^0}{t^2} = 0, \tag{40}$$

woraus folgt, dass die x_a von t unabhängig werden und nur Functionen von $x_1^0 \ldots x_n^0$ und $z_1 \ldots z_r$ sind. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen, auch der letzte Theil desselben, da für das System (35) die Voraussetzungen des Satzes 1 sicher erfüllt sind.

Aus diesem Satze ergiebt sich leicht *das Mayer'sche Theorem**) *über die Integration des Jacobi'schen Systems:*

$$\sum_{a=1}^{n} \sigma_a^b(x_1 \ldots x_n)\,\frac{\partial F(x)}{\partial x_a} = 0, \qquad (b = 1 \ldots r) \tag{41}$$

wo nun $r < n$ sein muss, und in den Identitäten (33) die Differentialquotienten nach den z_b fortfallen. Wir können nämlich diese Integration dahin auffassen, statt der $x_1 \ldots x_n$ neue Veränderliche $z_1 \ldots z_n$ so einzuführen, dass die Gleichungen des Systems (41) der Reihe nach in:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_r} = 0 \tag{42}$$

übergehen, deren allgemeines Integral offenbar die Form hat:

$$F = \varphi(z_{r+1} \ldots z_n), \tag{43}$$

wo φ irgend eine erste Differentialquotienten besitzende Function von $z_{r+1} \ldots z_n$ ist. Für die z_a als Functionen der x_a ergeben sich hiernach die Bedingungen:

$$\sum_{a=1}^{n} \sigma_a^b(x)\,\frac{\partial z_c}{\partial x_a} = \delta_{b,c} \qquad (b = 1 \ldots r,\ c = 1 \ldots n) \tag{44}$$

---

*) S. z. B. A. Mayer, Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1891, p. 448 ff. Vgl. auch die inzwischen unter gleichem Titel a. a. O. 1892, p. 177 ff. erschienene Note des Verfassers.

als nothwendig und hinreichend. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\partial x_b}{\partial z_c}$ und summirt über c von 1 bis n, so folgt:

$$\frac{\partial x_a}{\partial z_b} = \sigma_a^b(x) \quad (a = 1 \ldots n,\ b = 1 \ldots r). \tag{45}$$

Sind umgekehrt n Functionen:

$$x_a = f_a(x_1^0 \ldots x_n^0;\ z_1 \ldots z_r) \tag{46}$$

gefunden, welche das System (45) befriedigen und für

$$z_1 = z_1^0, \ldots, z_r = z_r^0$$

in irgend welche einmal differentiirbare Functionen x_a^0 von $z_{r+1} \ldots z_n$ übergehen, die nur so gewählt sein müssen, dass das System (46) nach $z_1 \ldots z_n$ auflösbar wird, so ergeben sich aus den Gleichungen (45) durch Multiplication mit $\frac{\partial z_c}{\partial x_a}$ und Summation über a von 1 bis n wieder die Gleichungen (44). Nach dem Satz 2 giebt es aber immer ein und nur ein System von Functionen f_a dieser Beschaffenheit, wenn wir zunächst von der Auflösbarkeit absehen. Was nun diese betrifft, so sieht man, dass sowohl die Functionen $f_a\big(f(x^0, z_1 \ldots z_r),\ w_1 \ldots w_r\big)$ als die Functionen $f_a(x^0, z_1 + w_1 - z_1^0 \ldots z_r + w_r - z_r^0)$ als Functionen von $w_1 \ldots w_r$ die Differentialgleichungen (45) befriedigen und für $w_1 = z_1^0, \ldots, w_r = z_r^0$ in $f_a(x^0, z_1 \ldots z_r)$ übergehen. Sie sind daher nach Satz 2 identisch, woraus im Besonderen für $w_c = 2z_c^0 - z_c$ folgt:

$$x_a^0 = f_a(x_1 \ldots x_n,\ 2z_1^0 - z_1 \ldots 2z_r^0 - z_r). \tag{47}$$

Nehmen wir daher an, dass das Jacobi'sche System auf die Mayer'sche Normalformen gebracht sei, d. h. dass $\sigma_a^b(x) = \delta_{a,b}$ für $a \leqq r$, so haben wir für $a \leqq r$: $f_a(x^0, z) = x_a^0 + z_a - z_a^0$, sodass wir um die Auflösbarkeit zu erreichen für $a > r$ nur $x_a^0 = z_a$ zu setzen brauchen; *dann sind:*

$$z_a = f_a(x_1 \ldots x_n,\ z_1^0 + x_1^0 - x_1 \ldots z_r^0 + x_r^0 - x_r) \quad (a = r+1 \ldots n) \tag{48}$$

die bekannten Hauptlösungen des Jacobi'schen Systems, welche nach Formel (35) *durch Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:*

$$\frac{df_a}{dt} = \sum_{b=1}^{r} \sigma_a^b(x_1^0 + ty_1, \ldots x_r^0 + ty_r,\ f_{r+1}, \ldots, f_n)\, y_b \quad (a = r+1 \ldots n) \tag{49}$$

mit den Anfangsbedingungen, dass für $t = 0$: f_a *in* x_a *übergehe, gefunden werden können.*

Es muss hervorgehoben werden, dass bei diesem Beweise nichts über die Existenz zweiter Differentialquotienten der gesuchten Lösungen vorausgesetzt wird, wie dies Herr Mayer bei dem letzten Beweise*) seines Theorems noch that. Es ist also das Theorem von dieser Voraussetzung unabhängig; in der That folgt ja aus der Existenz der ersten Differentialquotienten der $\sigma_a^b(x)$ nichts über die zweiten Differentialquotienten der Integrale des Systems (49) nach den Anfangswerthen, deren Existenz für die obige Voraussetzung nothwendig wäre. Es dürfte daher der hier gegebene Beweis der Natur dieses Theorems besser entsprechen.

Für $r = 1$ folgt aus unseren Betrachtungen der folgende besondere Satz, auf den wir uns später stützen werden:

Satz 3. *Genügt eine Reihe von Functionen $F_a(x_1 \ldots x_n)$ der Differentialgleichung:*

$$\sum_{b=1}^{n} \sigma_b(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial F_a}{\partial x_b} = 0, \tag{50}$$

wo die $\sigma_b(x)$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen der reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ sind, so lassen sich stets solche neue Veränderliche $z_1 \ldots z_n$ statt der $x_1 \ldots x_n$ in die Functionen $F_a(x)$ einführen, dass sie von mindestens einer der Veränderlichen z_b unabhängig werden, übrigens aber den Charakter der Differentiirbarkeit beibehalten.

§ 2.

Ueber die grundlegenden Differentialgleichungen der Theorie der endlichen Transformationsgruppen.

Ist eine Gruppe von reellen Transformationen gegeben in der Form:

$$x_a' = f_a(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_r) \quad (a = 1 \ldots n), \tag{1}$$

so findet die Gruppeneigenschaft ihren analytischen Ausdruck in Gleichungen von der Form:

$$f_a\big(f(x, u), v\big) = f_a\big(x, \varphi(u, v)\big). \tag{2}$$

Hier möge von den $f_a(x, u)$ sowohl als von den $\varphi_b(u, v)$ vorausgesetzt werden, dass sie eindeutige, endliche und stetige Functionen der reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $u_1 \ldots u_r$ resp. $u_1 \ldots u_r$, $v_1 \ldots v_r$ innerhalb gewisser Bereiche K resp. L seien. Nehmen wir weiter an, dass auch die ersten und zweiten Differentialquotienten der $f_a(x, u)$ nach $u_1 \ldots u_r$

*) S. A. Mayer, a. a. O. p. 454.

in K eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Veränderlichen seien, so gilt das Gleiche von den ersten und zweiten Differentialquotienten der $\varphi_b(u, v)$ nach den $v_1 \ldots v_r$ wenigstens für einen Theil M des Bereiches L.

Sind nämlich $(x_1^b \ldots x_n^b)$, wo $b = 1 \ldots r$ zu setzen ist, r Stellen*) im Bereiche K, so wird man dieselben, sollen anders die Functionen $f_a(x, u)$ wirklich von r Parametern $u_1 \ldots u_r$ abhängen, immer so wählen können, dass die Determinante:

$$\left| \frac{\partial f_{a_b}(x^b, u)}{\partial u_c} \right|, \qquad (b, c = 1 \ldots r) \tag{3}$$

wo die Indices a_b in gewisser Weise von den Indices b abhängen, nicht für alle Werthe der $u_1 \ldots u_r$ verschwindet. Denn zunächst wird man sicher $x_1^1 \ldots x_n^1$ so wählen können, dass die $\frac{\partial f_a(x^1, u)}{\partial u_c}$ nicht sämmtlich identisch verschwinden. Trifft dies bei einem gewissen Werthsystem $x_1^1 \ldots x_n^1$ für $a = a_1$ zu, so wird man weiter $x_1^2 \ldots x_n^2$ so wählen können, dass nicht alle Determinanten 2. Ordnung der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial f_{a_1}(x^1, u)}{\partial u_c}, \frac{\partial f_a(x^2, u)}{\partial u_c} \right\| \qquad (c = 1 \ldots r)$$

identisch verschwinden, weil sonst alle Functionen $f_a(x^2, u)$ bei beliebigen Werthen der $x_1^2 \ldots x_n^2$ mindestens eine Differentialgleichung von der Form:

$$\sum_{b=1}^{r} \sigma_b(u_1 \ldots u_r) \frac{\partial f_a(x, u)}{\partial u_b} = 0 \tag{4}$$

befriedigen müssten, wo die $\sigma_b(u)$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen von $u_1 \ldots u_r$ wären; natürlich wären nur zwei der $\sigma_b(u)$ von Null verschieden. Es könnten demnach nach dem Satze 3 in die $f_a(x, u)$ solche neue Parameter $v_1 \ldots v_r$ eingeführt werden, dass die $f_a(x, u)$ von mindestens einem derselben unabhängig würden. Nimmt man daher an, dass die Determinante obiger Matrix bei einem gewissen Werthsysteme $x_1^2 \ldots x_n^2$ für $a = a_2$ nicht sämmtlich identisch verschwinden, so zeigt man ebenso, dass man $x_1^3 \ldots x_n^3$ so wählen kann, dass nicht sämmtliche Determinanten 3. Ordnung der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial f_{a_1}(x^1, u)}{\partial u_c}, \frac{\partial f_{a_2}(x^2, u)}{\partial u_c}, \frac{\partial f_a(x^3, u)}{\partial u_c} \right\| \qquad (c = 1 \ldots r)$$

identisch verschwinden. So weiter schliessend kann man obige Behauptung beweisen.

*) Vgl. wegen dieser Beweismethode z. B. Lie, Transf. S. 63 ff.

Da nun die Functionen $\varphi_c(u, v)$ als eindeutig, endlich und *stetig* vorausgesetzt sind, so ergiebt eine einfache Betrachtung, indem man zuerst die Differenzenquotienten in Betracht zieht, für ihre Differentialquotienten nach den v_b jedenfalls die folgenden Gleichungen:

$$(5) \quad \frac{\partial f_{a_b}(f(x^b, u), v)}{\partial v_b} = \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial f_{a_b}(x^b, \varphi(u, v))}{\partial \varphi_c(u, v)} \frac{\partial \varphi_c(u, v)}{\partial v_b}, \quad (b = 1 \ldots r)$$

wodurch dieselben für einen gewissen Theilbereich des Bereiches L als eindeutige, endliche und stetige Functionen der $u_1 \ldots u_r$, $v_1 \ldots v_r$ bestimmt sind; ganz ebenso beweist man dasselbe für die zweiten Differentialquotienten der $\varphi_c(u, v)$ nach $v_1 \ldots v_r$. Ja man kann das System (5) auf Grund des Satzes 2 direct zur Bestimmung der Functionen $\varphi_c(u, v)$ mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten Functionen $f_a(x, u)$ benützen; doch gehen wir hierauf nicht ein, da wir später noch eine andre Bestimmungsweise dieser Functionen finden werden.

Machen wir nun die weitere Voraussetzung, dass *unsre Gruppe die identische Transformation*) enthalte*, d. h. dass:

$$(6) \quad f_a(x, u_1^0 \ldots u_r^0) = x_a, \quad (a = 1 \ldots r)$$

so veranlassen uns die Gleichungen (2) zu *den entsprechenden Annahmen:*

$$(7) \quad \varphi_b(u, u^0) = u_b \quad \text{und} \quad \varphi_b(u^0, v) = v_b. \quad (b = 1 \ldots r)$$

Setzen wir endlich ausdrücklich fest, dass die:

$$(8) \quad \frac{\partial f_a(x, u^0)}{\partial u_b^0} = \xi_a^b(x)$$

*nicht sämmtlich identisch verschwinden**) und dass sie nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente seien, so gilt dasselbe von den Functionen:*

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi_c(u, u^0)}{\partial u_b^0} = \omega_c^b(u).$$

Das folgt in der That unmittelbar aus den Gleichungen (5) für $v = u^0$ und den aus ihnen durch Differentiation nach $u_1 \ldots u_r$ entstehenden

---

*) Wie es scheint, wird man bei unsern allgemeineren Voraussetzungen nicht umhin können, diese Annahme ausdrücklich zu machen, die ja nach Lie entbehrt werden kann, wenn die $f_a(x, u)$ analytische Functionen ihrer Argumente sind.

**) Engel hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass ich in meiner Abhandlung: Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen, diese Ann. Bd. 35, S. 164 stillschweigend diese Annahme gemacht habe. Indessen kann man durch Einführung der neuen Variablen $y_a = f_b(x, c)$ und der neuen Parameter $s_b = \varphi_b(u, c)$ bei geeigneter Wahl der c_b diese Annahme immer realisiren, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

Gleichungen; zugleich sieht man, dass die $\omega_c^b(u)$ auf Grund dieser Gleichungen durch die $f_a(x, u)$ und ihre ersten Differentialquotienten nach $u_1 \ldots u_r$ vollständig gegeben sind. Das zweite System der Gleichungen (7) lehrt dann noch, dass:

$$\omega_a^b(u^0) = \delta_{a,b}. \tag{10}$$

Da hiernach keine Identitäten von der Form:

$$\sum_{b=1}^{r} \omega_a^b(u)\, a_b = 0 \quad (a = 1 \ldots r) \tag{11}$$

bestehen können, so giebt es auch keine Relationen von der Form:

$$\sum_{b=1}^{r} \xi_a^b(x)\, a_b = 0. \quad (a = 1 \ldots r) \tag{12}$$

Aus (2) folgt nämlich durch Differentiation nach v_b für $v = u^0$:

$$\xi_a^b\big(f(x, u)\big) = \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial f_a(x, u)}{\partial u_c}\, \omega_c^b(u); \tag{13}$$

multiplicirt man daher diese Gleichungen mit a_b und summirt über b von 1 bis r, so würde aus dem Bestehen der Relationen (12) wegen der Unmöglichkeit von Identitäten der Form (11) folgen, dass die $f_a(x, u)$ Differentialgleichungen von der Form (4) mit differentiirbaren Coefficienten befriedigen müssten, was ausgeschlossen war.

Denken wir uns nunmehr die Functionen $E_a^b(u)$ definirt durch die Gleichungen:

$$\sum_{c=1}^{r} \omega_a^c(u)\, E_c^b(u) = \delta_{a,b}, \tag{14}$$

sodass auch:

$$E_a^b(u^0) = \delta_{a,b} \tag{15}$$

und die Functionen $E_a^b(u)$ ebenfalls innerhalb eines gewissen Bereiches um die Stelle u^0 nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig sind, so haben wir für die Functionen $f_a(x, u)$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f_a(x, u)}{\partial u_b} = \sum_{c=1}^{r} \xi_a^c\big(f(x, u)\big)\, E_c^b(u) \tag{I}$$

mit den Anfangsbedingungen (6). Hieraus ergeben sich nach Satz 2 als die nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen die folgenden Gleichungen:

$$(16)\quad \sum_{c,\,b=1}^{r}\sum_{e=1}^{r}\frac{\partial \xi_a^c(x')}{\partial x_e'}\left\{E_c^b(u)\,E_b^{b_1}(u)-E_b^b(u)\,E_e^{b_1}(u)\right\}$$
$$+\sum_{c=1}^{r}\xi_a^c(x')\left\{\frac{\partial E_c^b(u)}{\partial u_{b_1}}-\frac{\partial E_c^{b_1}(u)}{\partial u_b}\right\}=0.$$

Setzt man:

$$(17)\qquad \frac{\partial E_a^b(u^0)}{\partial u_{b_1}^0}-\frac{\partial E_a^{b_1}(u_0)}{\partial u_b^0}=c_{b_1,\,b}^a,$$

so folgt hieraus für $u=u^0$:

$$(II)\qquad \sum_{c=1}^{n}\left(\frac{\partial \xi_a^b(x)}{\partial x_c}\,\xi_c^{b_1}(x)-\frac{\partial \xi_a^{b_1}(x)}{\partial x_c}\,\xi_c^b(x)\right)=\sum_{b=1}^{r}c_{b_1,\,b}^b\,\xi_a^b(x)$$

und hiernach aus (16) wegen der Unmöglichkeit von Gleichungen der Form (12):

$$(III)\qquad \frac{\partial E_a^b(u)}{\partial u_{b_1}}-\frac{\partial E_a^{b_1}(u)}{\partial u_b}=\sum_{c,\,b=1}^{r}c_{c,\,b}^a\,E_c^b(u)\,E_b^{b_1}(u);$$

umgekehrt folgen die Integrabilitätsbedingungen (16) aus (II) und (III). Endlich folgt aus (III) und (14):

$$(18)\qquad \sum_{c=1}^{r}\left(\frac{\partial \omega_a^b(u)}{\partial u_c}\,\omega_c^{b_1}(u)-\frac{\partial \omega_a^{b_1}(u)}{\partial u_c}\,\omega_c^b(u)\right)=\sum_{b=1}^{r}c_{b_1,\,b}^b\,\omega_a^b(u),$$

und es sind die Gleichungen (18) und (III) die nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen für das System von Differentialgleichungen:

$$(IV)\qquad \frac{\partial \varphi_a(u;v)}{\partial v_b}=\sum_{c=1}^{r}\omega_a^c\big(\varphi(u,v)\big)\,E_c^b(v)$$

mit den Anfangsbedingungen (7), deren Bestehen wir sofort einsehen werden.

Nimmt man nämlich umgekehrt an, dass die Integrabilitätsbedingungen (II) und (III) erfüllt seien, so sind durch die Differentialgleichungen (I) und (IV) und die Anfangsbedingungen (6) und (7) nach Satz 2 die $f_a(x,u)$ und $\varphi_b(u,v)$ als solche eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente bestimmt, welche die Gleichungen (2) erfüllen. Denn die Functionen $f_a\big(f(x,u),v\big)$ sowohl als die Functionen $f_a\big(x,\varphi(u,v)\big)$ erfüllen als Functionen von $v_1\ldots v_r$ die Differentialgleichungen:

$$(19)\qquad \frac{\partial w_a}{\partial v_b}=\sum_{c=1}^{r}\xi_a^c(w)\,E_c^b(v)$$

mit den Anfangsbedingungen $w_a^0 = f_a(x, u)$, sind folglich nach dem Satze 2 identisch. Da hiernach die Functionen $\varphi_b(u, v)$ den Gleichungen (5) genügen müssen, so sind sie in der That die gesuchten.

Man sieht ferner, dass die so durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten Functionen $\xi_a^b(x)$ und $\omega_b^c(u)$ entstehenden Functionen $f_a(x, u)$ und $\varphi_b(u, v)$ alle unsere früheren Voraussetzungen erfüllen. Es sind in der That die ersten und zweiten Differentialquotienten der $f_a(x, u)$ nach $u_1 \ldots u_r$ eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente, dasselbe gilt daher auch von den ersten und zweiten Differentialquotienten der $\varphi_b(u, v)$ nach $v_1 \ldots v_r$. Ja es ist nicht schwer zu beweisen, dass überhaupt alle ersten und zweiten Differentialquotienten der $\varphi_b(u, v)$ eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente sind, und dasselbe gilt auch für die $f_a(x, u)$, sofern es sich um sogenannte transitive Gruppen handelt. Für uns genügt es zu wissen, dass die $\frac{\partial f_a(x, u^0)}{\partial u_b}$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig sind, was ja selbstverständlich ist. Es kommt also nur noch darauf an zu erkennen, dass auch $\varphi_b(u^0, v) = v_b$ sei; nun genügen die Functionen v_b wegen (14) den Differentialgleichungen (IV) und gehen für $v = u^0$ in u_b^0 über, sind folglich mit $\varphi_b(u^0, v)$ identisch.

Endlich kann man sehen, dass die $f_a(x, u)$ nicht solche Functionen $F_a(x_1 \ldots x_n, t_1 \ldots t_s)$ sein können, die erste und zweite Differentialquotienten nach $t_1 \ldots t_s$ besitzen, wo $s < r$. Dann ergiebt sich nämlich, wenn s die kleinste Zahl dieser Variabeln wäre, auf welche die $u_1 \ldots u_r$ reducirt werden könnten, in ähnlicher Weise wie oben für die $\varphi_b(u, v)$, dass die $t_1 \ldots t_s$ für einen gewissen Bereich, der jedenfalls der Stelle u_0 beliebig nahe angenommen werden kann, nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen von $u_1 \ldots u_r$ wären. Hieraus aber würde folgen, dass:

$$\frac{\partial f_a(x, u)}{\partial u_b} = \sum_{c=1}^{s} \frac{\partial F_a(x, t)}{\partial t_c} \frac{\partial t_c}{\partial u_b}, \tag{20}$$

die $f_a(x, u)$ also Gleichungen von der Form (4) befriedigten; dann lehren die Gleichungen (I) in Rücksicht darauf, dass keine Identitäten von der Form:

$$\sum_{b=1}^{r} E_c^b(u)\, \sigma_b(u) = 0 \tag{21}$$

bestehen können, dass Relationen von der Form (12) bestehen müssten, was ausgeschlossen war.

Wir können die Resultate dieses Paragraphen kurz so zusammenfassen:

Satz 4. *Definiren die nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten nach $u_1 \ldots u_r$ eindeutigen, endlichen und stetigen Functionen $f_a(x,u)$ der reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $u_1 \ldots u_r$ eine r-gliedrige Transformationsgruppe, ist also $f_a\big(f(x,u),v\big) = f_a\big(x,\varphi(u,v)\big)$, wo die $\varphi_b(u,v)$ eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente sind, sodass dasselbe auch von ihren ersten und zweiten Differentialquotienten nach $v_1 \ldots v_r$ gilt, ist ferner für eine gewisse Stelle u_0 des Gültigkeitsbereiches: $f_a(x,u^0) = x_a$, $\varphi_b(u,u^0) = u_b$ und $\varphi_b(u^0,v) = v_b$, sind endlich die nicht sämmtlich identisch verschwindenden Functionen $\xi_a^b(x) = \dfrac{\partial f_a(x,u^0)}{\partial u_b^0}$ nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig, so genügen die $f_a(x,u)$ den Differentialgleichungen* (I), *wo die $E_a^b(u)$ ebenfalls nebst ihren ersten Differentialquotienten endlich, eindeutig und stetig sind, und zugleich befriedigen die $\varphi^b(u,v)$ die Differentialgleichungen* (IV); *die $\xi_a^b(x)$ und $E_a^b(u)$ ihrerseits genügen den Identitäten* (II) *und* (III). *Sind umgekehrt diese Identitäten durch zwei Systeme von Functionen $\xi_a^b(x)$ und $E_a^b(u)$ erfüllt, wo $E_a^b(u^0) = \delta_{a,b}$ und zwischen den $\xi_a^b(x)$ keine Relationen von der Form* (12) *bestehen, so definiren die durch die Differentialgleichungen* (I) *mit den Anfangsbedingungen $f_a(x,u^0) = x_a$ bestimmten Functionen $f_a(x,u)$ eine r-gliedrige Transformationsgruppe, d. h. es ist $f_a\big(f(x,u),v\big) = f_a\big(x,\varphi(u,v)\big)$, wo die $\varphi_a(u,v)$ durch die Differentialgleichungen* (IV) *mit den Anfangsbedingungen $\varphi_a(u,u^0) = u_a$ bestimmt sind.**)

§ 3.

Ueber die Reduction der Parametergruppe auf ihre kanonische Form.

Führen wir in die Functionen $f_a(x,u)$ neue Parameter ein auf Grund der Formeln:

$$u_b = h_b(s_1 \ldots s_r), \tag{1}$$

$$u_b^0 = h_b(0 \ldots 0) \quad \text{und} \quad \delta_{b,c} = \left(\frac{\partial h_b(s)}{\partial s_c}\right)^0, \tag{2}$$

und gehen hierbei diese Functionen in $g_a(x,s)$ über, ihre Differentialgleichungen (I) in:

$$\frac{\partial g_a(x,s)}{\partial s_b} = \sum_{c=1}^{r} \xi_a^c\big(g(x,s)\big)\,\psi_c^b(s), \tag{3}$$

so folgt:

$$\psi_c^{bl}(s) = \sum_{b=1}^{r} E_c^b\big(h(s)\big)\,\frac{\partial h_b(s)}{\partial s_b}. \tag{4}$$

---

*) S. Lie, Transf. I. Abschn. Theorem 3, p. 33 und Theorem 24, p. 158.

Setzen wir $s_b = y_b \delta$, wo δ eine unendlich kleine Grösse ist, so erhalten wir die infinitesimale Transformation:

$$x_a' = x_a + \delta \left(\xi_a^1(x)\, y_1 + \cdots + \xi_a^r(x)\, y_r \right). \tag{5}$$

Da nun der Definition gemäss die Aufeinanderfolge zweier solcher infinitesimaler Transformationen wieder eine Transformation der Gruppe ergeben muss, so liegt im Hinblick auf die Formeln (8) in § 1 die Frage*) nahe, ob man die neuen Parameter im Besonderen so wählen kann, dass die $g_a(x, y_1 t \ldots y_r t)$ sich durch Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d g_a(x, yt)}{dt} = \sum_{b=1}^{r} \xi_a^b \left(g(x,\ yt) \right) y_b \tag{6}$$

mit den Anfangsbedingungen: $g_a(x,\ 0 \ldots 0) = x_a$ ergeben. Wäre dem so, so müssten den Gleichungen (3) zufolge die Functionen $\psi_c^b(s)$ die Identitäten:

$$\sum_{c=1}^{r} \psi_b^c(s)\, s_c = s_b \tag{7}$$

befriedigen und ausserdem natürlich den Differentialgleichungen (III) des vorigen Paragraphen genügen. In Rücksicht auf die durch Differentiation der Gleichungen (7) entstehenden Gleichungen:

$$\psi_b^b(s) + \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial \psi_b^c(s)}{\partial s_b}\, s_c = \delta_{b,c} \tag{8}$$

erhalten wir daher, nachdem wir die Gleichungen (III) zuvor mit s_{b_1} multiplicirt und über b_1 von 1 bis r summirt haben:

$$\psi_a^b(s) + \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial \psi_a^b(s)}{\partial s_c}\, s_c + \sum_{b,c=1}^{r} c_{b,c}^a\, s_b\, \psi_{c_1}^{b_1}(s) = \delta_{a,b}. \tag{9}$$

Setzt man daher:

$$t \psi_a^b(y_1 t \ldots y_r t) = \Psi_a^b(t), \tag{10}$$

so folgt, dass diese Functionen die Differentialgleichungen:

$$\frac{d \Psi_a^b(t)}{dt} = \delta_{a,b} + \sum_{c,b=1}^{r} c_{c,b}^a\, y_b\, \Psi_c^b(t) \text{ **)} \tag{11}$$

und die Anfangsbedingungen $\Psi_a^{b_1}(0) = 0$ erfüllen müssten.

---

*) S. Lie, Tranf. I. Abschn. p. 69 ff.

**) Die Möglichkeit der Bestimmung der $\psi_a^b(s)$ durch solche lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten wurde zuerst von Lie bemerkt

Hierdurch sind nun die Functionen $\psi_a^b(s)$ sicher als analytische Functionen von $s_1 \ldots s_r$ bestimmt, nämlich einerseits als beständig convergente Potenzreihen*) oder durch Exponentialfunctionen**) ausdrückbar, deren Exponenten durch Auflösung der sogenannten charakteristischen Gleichung nach Killing***) gefunden werden. Denken wir uns diese Functionen durch die Differentialgleichungen (11) und die Anfangsbedingungen $\Psi_a^b(0) = 0$ bestimmt, so sieht man erstens, dass $\psi_a^b(0 \ldots 0) = \left(\frac{1}{t}\Psi_a^b(t)\right)^0 = \left(\frac{d\Psi_a^b(t)}{dt}\right)^0 = \delta_{a,b}$, und zweitens, dass auch die Identitäten (7) oder die Gleichungen:

$$\sum_{b=1}^{r} \Psi_a^b(t)\, y_b = t y_a \tag{12}$$

gelten; denn bezeichnen wir die linke Seite hiervon mit z_a, so folgt nach (11):

$$\frac{dz_a}{dt} = y_a + \sum_{c,b=1}^{r} c_{c,b}^a\, y_b\, z_c, \tag{13}$$

also $z_a = t y_a$, weil für $t = 0$ auch $z_a = 0$ und $c_{c,b}^a = -c_{b,c}^a$ ist.

Nunmehr lässt sich umgekehrt zeigen, dass die durch die Differentialgleichungen (6) und die Anfangsbedingungen $g_a(x, 0 \ldots 0) = x_a$ definirten Functionen $g_a(x, yt)$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial g_a(x, yt)}{\partial y_b} - \sum_{c=1}^{r} \xi_a^c\big(g(x, yt)\big)\, \Psi_c^b(t) = 0 \tag{14}$$

befriedigen. Die $\frac{\partial g_a(x, yt)}{\partial y_b}$ sind nämlich nach Satz 1 bestimmt durch das System linearer Differentialgleichungen:

(Sächs. Ges. d. Wissensch. 1890, p. 478 ff.). Man sieht, dass diese Differentialgleichungen den partiellen Differentialgleichungen (28) äquivalent sind, welche der Verf. in diesen Annalen, Bd. 38, p. 269 wie im Texte entwickelt hat. In der Form (11) des Textes wurden die Differentialgleichungen zuerst von Engel a. a. O. p. 311 aufgestellt.

*) S. Schur, Beweis für die Darstellbarkeit u. s. w. Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1890, p. 1 ff. Bei dieser Gelegenheit sei die Bemerkung gestattet, dass, als ich in diesen Annalen Bd. 35, p. 162 behauptete, der dort gegebene Beweis für die Zugehörigkeit einer einfach transitiven Gruppe zu jeder Zusammensetzung sei die erste Publication eines solchen, ich den etwas früher in den Verhandlungen der Ges. d. Wissensch. von Christiania (1888) veröffentlichten Beweis von Lie nicht kannte. Dem gegenüber ist allerdings hervorzuheben, dass der Lie'sche Beweis auf der Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen beruht, während mein Beweis mit ganz elementaren Mitteln operirt.

**) S. Lie, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1890, p. 485.

***) S. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, diese Ann. Bd. 31, p. 265.

$$(15)\qquad \frac{d\left(\frac{\partial g_a(x, yt)}{\partial y_b}\right)}{dt} = \xi_a^b\big(g(x, yt)\big) + \sum_{c=1}^{r}\sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \xi_a^c\big(g(x, yt)\big)}{\partial g_b(x, yt)} \frac{\partial g_b(x, yt)}{\partial y_b}\, y_c$$

und die Anfangsbedingungen $\left(\frac{\partial g_a(x, yt)}{\partial y_b}\right)^0 = 0$. Bezeichnet man daher die linke Seite der Gleichungen (14) mit $\varphi_a^b(t)$, sodass sicher $\varphi_a^b(0) = 0$ ist, so lehrt eine einfache Rechnung, die wir übergehen, dass wegen der Gleichungen (II) des vorigen Paragraphen:

$$(16)\qquad \frac{d\varphi_a^b(t)}{dt} = \sum_{c=1}^{r}\sum_{b=1}^{n} \frac{\partial \xi_a^c\big(g(x, yt)\big)}{\partial g_b(x, yt)}\, y_c\, \varphi_b^b(t),$$

dass also identisch $\varphi_a^b(t) = 0$. Dadurch ist bewiesen, dass die durch die Differentialgleichungen (6) mit den Anfangsbedingungen $g_a(x, 0 \ldots 0)$ bestimmten Functionen nach der Substitution $y_b = \frac{s_b}{t}$ die Differentialgleichungen (3) erfüllen, wo die $\psi_b^c(s)$ die eben definirten eindeutigen analytischen Functionen sind. Bildet man daher die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (3), so findet man für die $\psi_a^b(s)$ wieder die Relationen:

$$(17)\qquad \frac{\partial \psi_a^b(s)}{\partial s_{b_1}} - \frac{\partial \psi_a^{b_1}(s)}{\partial s_b} - \sum_{c,b=1}^{r} c_{c,b}^a\, \psi_c^b(s)\, \psi_b^{b_1}(s) = 0.$$

Nunmehr ist es leicht zu sehen, dass man die Functionen $h_b(s)$ immer den Gleichungen (3) oder:

$$(18)\qquad \frac{\partial h_a(s)}{\partial s_b} = \sum_{c=1}^{r} \omega_a^c\big(h(s)\big)\, \psi_c^b(s)$$

und den Anfangsbedingungen (2) gemäss bestimmen kann; denn als die dem Satze 2 gemäss nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (18) des vorigen Paragraphen und die Relationen (17). Hiermit ist bewiesen, dass jede unseren Voraussetzungen genügende Transformationsgruppe durch Einführung neuer Parameter immer auf eine kanonische Form gebracht werden kann, welche die Entstehung jeder Transformation durch infinitesimale Transformationen in Evidenz setzt und die Parameter derjenigen Transformation, welche durch die Aufeinanderfolge zweier Transformationen entsteht, durch analytische Functionen darzustellen erlaubt; das folgt in der That unmittelbar aus den den Gleichungen (IV) entsprechenden Gleichungen für die neuen Parameter. Ausserdem

aber haben wir bewiesen, dass jedes System von Functionen $\xi_a^b(x)$, die nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutige, endliche und stetige Functionen ihrer Argumente sind und die Gleichungen (II) befriedigen, den Differentialgleichungen (6) gemäss eine Transformationsgruppe in der kanonischen Form der Parameter erzeugen.

Da die $\psi_a^b(s)$ analytische Functionen sind, also sicher auch zweite Differentialquotienten besitzen, so können wir nun auch die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (17) bilden. Dies geschieht indem man dieselben nach s_{b_2} differentiirt, dann b, b_1, b_2 cyklisch vertauscht und die drei so entstehenden Gleichungen addirt; man erhält so nach einigen Umformungen:*)

$$\text{(V)} \qquad \sum_{c=1}^{r} \{c_{b,c}^a c_{b_1,b_2}^c + c_{b_1,c}^a c_{b,b_1}^c + c_{b_2,c}^a c_{b_2,b}^c\} = 0.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, und werden dann die $\psi_a^b(s)$ den Differentialgleichungen (9) oder (11) gemäss bestimmt, so ist es leicht zu beweisen, dass sie die Gleichungen (17) befriedigen. Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man wieder die linearen Differentialgleichungen aufstellt, denen die linken Seiten der Gleichungen (17), nachdem in ihnen zuvor $\psi_a^b(s)$ durch $\frac{1}{t}\Psi_a^b(t)$ ersetzt ist, als Functionen von t genügen; sie lehren unmittelbar das Bestehen der Gleichungen (17).**)

Wir beschränken uns auf die Hervorhebung des folgenden Satzes:

Satz 5. *Genügt eine Gruppe von Transformationen den Bedingungen des Satzes* 4, *so befriedigen die Constanten* $c_{b,c}^a = -c_{c,b}^a$ *die Relationen* (V), *und es können stets solche neue Parameter* $s_b = y_b t$ *statt der* $u_1 \ldots u_r$ *eingeführt werden, dass die Functionen* $g_a(x, s)$, *in welche die* $f_a(x, u)$ *dabei übergehen, durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:*

$$\frac{dg_a(x, yt)}{dt} = \sum_{b=1}^{r} \xi_a^b\big(g(x, yt)\big)\, y_b$$

mit den Anfangsbedingungen $g_a(x, 0) = 0$ *definirt sind. Genügen umgekehrt die nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutigen, endlichen*

*) S. z. B. diese Annalen, Bd. 38, p. 268. Es dürfte der Hinweis darauf nicht überflüssig sein, dass diese Relationen ohne die Annahme der Existenz zweiter Differentialquotienten der $\xi_a^b(x)$, wie dieselbe bei der hierbei üblichen Anwendung der Jacobi'schen Identität unerlässlich ist, abgeleitet sind. Man kann dasselbe auch ohne vorherige Reduction auf die kanonische Form leisten, wenn man die adjungirte Gruppe in der Art einführt, wie dies der Verf. a. o. a. O. p. 273 gethan hat.

**) Es ist das gerade die S. 518 angeführte Methode von Engel, die sich als ungemein fruchtbar erweist.

und stetigen Functionen $\xi_a^b(x)$ *den Gleichungen* (II), *die Constanten* $c_{b,c}^a$ *also den Relationen* (V), *so ist durch obiges System gewöhnlicher Differentialgleichungen stets eine den Bedingungen des Satzes* 4 *genügende Transformationsgruppe definirt.*

§ 4.

Ueber die Reduction irgend einer transitiven Gruppe auf ihre kanonische Form.

Wir beschäftigen uns zum Schlusse mit den sogenannten *transitiven* Transformationsgruppen; dieselben sind dadurch*) ausgezeichnet, dass sie jede Stelle des n-fach ausgedehnten Gebietes der Variablen $x_1 \ldots x_n$ in jede andre Stellen eines gewissen Bereiches desselben überführen können. Dann darf sicher keine Function $F(x_1, \ldots x_n)$ existiren, welche bei allen Transformationen der Gruppe in sich selbst übergeht, derart also, dass identisch:

$$F\big(f(x, u)\big) = F(x). \tag{1}$$

Daraus aber würde folgen:

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial F\big(f(x,u)\big)}{\partial f_a(x,u)} \frac{\partial f_a(x,u)}{\partial u_b} = \sum_{a=1}^{n} \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial F\big(f(x,u)\big)}{\partial f_a(x,u)} \xi_a^c\big(f(x,u)\big) E_c^b(u) = 0, \tag{2}$$

also, weil die Determinante $\big|E_c^b(u)\big|$ nicht identisch verschwindet:

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x_a} \xi_a^c(x) = 0. \qquad (c = 1 \cdots r) \tag{3}$$

Würde umgekehrt die Function $F(x_1 \ldots x_n)$ diese r Differentialgleichungen erfüllen, so würde nach (2) $F\big(f(x, u)\big)$ von den $u_1 \ldots u_r$ unabhängig sein, es müsste also wegen $f_a(x, u^0) = x_a$ die Gleichung (1) bestehen, die Gruppe könnte demnach unmöglich transitiv sein.

Sollen nun die Gleichungen (3) möglich sein, so müssen sicher alle Determinanten n^{ter} Ordnung der Matrix:

$$\big\| \xi_a^c(x) \big\| \qquad (a = 1 \cdots n,\ c = 1 \cdots r) \tag{4}$$

identisch verschwinden, und es lässt sich auf Grund des Mayer'schen Theorems über vollständige Systeme, wie wir es in § 1 bewiesen haben, auch umgekehrt zeigen, dass dann jedesmal mindestens eine solche Function $F(x_1 \ldots x_n)$ existirt, welche die Differentialgleichungen (3)

*) S. Lie, Transf. I. Abschn., p. 212 ff.

befriedigt. Wir gehen auf diesen Beweis hier nicht ein, zumal er von Lie*) ausgeführt ist.

Die Bedingung, dass nicht alle Determinanten n^{ter} Ordnung der Matrix (4) identisch verschwinden dürfen, erweist sich aber nicht nur als nothwendig, sondern auch als hinreichend für die Transitivität der Gruppe. Denn dann werden wir, sobald die $x_1' \ldots x_n'$ in einem gewissen Bereiche von $x_1 \ldots x_n$ liegen, $u_1 \ldots u_r$ immer so bestimmen können, dass:

$$x_a' = f_a(x, u). \tag{5}$$

Betrachten wir nämlich die $u_1 \ldots u_r$ als Functionen von $x_1' \ldots x_n'$, so genügen sie den Differentialgleichungen:

$$\delta_{a,b} = \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial f_a(x,u)}{\partial u_c} \frac{\partial u_c}{\partial x_b'} \tag{6}$$

und den Anfangsbedingungen, dass für $x_a' = x_a$ etwa $u_c = u_c^0$. Unserer Voraussetzung gemäss werden aber nicht alle Determinanten n^{ter} Ordnung der Matrix $\left\| \frac{\partial f_a(x,u)}{\partial u_c} \right\|$ identisch verschwinden, es möge also etwa die Determinante:

$$\left| \xi_a^c(x) \right|_{(a,c=1\cdots n)} \tag{7}$$

nicht identisch verschwinden. Setzen wir daher $u_{n+1} = u_{n+1}^0$, $u_r = u_r^0$, so ist (6) ein System von Differentialgleichungen zur Bestimmung der $u_1 \ldots u_n$ als Functionen der $x_1' \ldots x_n'$, wie es der Satz 2 voraussetzt; denn die Integrabilitätsbedingungen sind wegen der Entstehung dieser Gleichungen durch Differentiation der Gleichungen (5) sicher erfüllt.

Ist $x_1^0 \ldots x_n^0$ eine Stelle, für welche die Determinante (7) nicht verschwindet, so wird man durch eine homogene lineare Substitution immer solche neue Parameter**) einführen können, dass:

$$\xi_a^b(x^0) = \delta_{a,b}. \tag{8}$$

Dies vorausgesetzt führen wir in unsre Gruppe neue Veränderliche $z_1 \ldots z_n$ ein auf Grund der Gleichungen:

$$x_a = H_a(z_1 \ldots z_n), \quad x_a^0 = H_a(0 \ldots 0), \quad \delta_{a,b} = \left(\frac{\partial H_a(z)}{\partial z_b} \right)^0. \tag{9}$$

---

*) S. Lie, Transf. I. Abschn., S. 214. Es zeigt sich hier beiläufig, wie wichtig es ist, das Mayer'sche Theorem unabhängig von der Existenz zweiter Differentialquotienten der Integrale beweisen zu können.

**) Vergl. Schur, Zur Theorie der Transformationsgruppen, diese Ann. Bd. 38, p. 277.

Gehen dann die $\xi_a^b(x)$ in $\xi_a^b(z)$ über, so ist offenbar:

$$(10) \qquad \xi_a^b(x) = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial x_a}{\partial z_c} \xi_c^b(z).$$

Nehmen wir nun wieder an, es wäre möglich die Functionen $H_a(z)$ so zu bestimmen, dass:

$$(11) \qquad \sum_{b=1}^{n} \xi_a^b(z)\, z_b = z_a,$$

sodass dieselben durch Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$(12) \qquad \frac{dx_a}{dt} = \sum_{b=1}^{n} \xi_a^b(x)\, y_b$$

mit den Anfangsbedingungen $H_a(0 \ldots 0) = x_a^0$ gefunden werden könnten, so würde aus den den Gleichungen (II) entsprechenden Gleichungen:

$$(13) \qquad \sum_{c=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_a^b(z)}{\partial z_c} \xi_c^{b_1}(z) - \frac{\partial \xi_a^{b_1}(z)}{\partial z_c} \xi_c^b(z) \right\} = \sum_{c=1}^{n} c_{b_1, b}^c \xi_a^c(z),$$

durch Multiplication derselben mit z_b und Summation über b von 1 bis n in Rücksicht auf die Identitäten (12) und die aus ihnen durch Differentiation entstehenden folgen, dass:

$$(14) \qquad \sum_{c=1}^{n} \left\{ \left(\delta_{a,c} - \xi_a^c(z)\right) \xi_c^{b_1}(z) - \frac{\partial \xi_a^{b_1}(z)}{\partial z_c} z_c \right\} = \sum_{c=1}^{r} \sum_{b=1}^{n} c_{b_1, b}^c z_b \xi_a^c(z).$$

Hieraus aber ergäbe sich, dass die $\xi_a^b(yt)$ durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:*)

$$(15) \qquad \frac{d\xi_a^b(yt)}{dt} = \sum_{c=1}^{n} \left\{ \frac{1}{t} \left(\delta_{a,c} - \xi_a^c(z)\right) \xi_c^b(z) - y_c \sum_{b=1}^{r} c_{b,c}^b \xi_a^b(yt) \right\}$$

mit den Anfangsbedingungen $\xi_a^b(0 \ldots 0) = \delta_{a,b}$ bestimmt wären.

Hierdurch sind nun aber auch umgekehrt die $\xi_a^b(z)$ vollständig und eindeutig als analytische Functionen der $y_b t = z_b$ bestimmt. Da nämlich:

$$(16) \qquad \left(\frac{1}{t}\left(\xi_a^b(yt) - \delta_{a,b}\right)\right)^0 = \left(\frac{d\xi_a^b(yt)}{dt}\right)^0,$$

*) Aehnliche Differentialgleichungen hat Engel für $n = r$ aufgestellt. Nochmals die kanonische Form der Parametergruppe. Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1892, p. 53.

so ergeben sich als Werthe dieser zunächst noch unbestimmten Grössen:

$$\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{n} c_{c,b}^{a}\, y_c \quad \text{oder} \quad \sum_{c=1}^{n} c_{c,b}^{a}\, y_c,$$

je nachdem $b \leqq n$ oder $b > n$ ist. Es ist auch wieder leicht zu beweisen, dass die Gleichungen (11) erfüllt sind.

Denken wir uns daher diese analytischen Functionen $\xi_a^b(z)$ gegeben, und die $x_1 \ldots x_n$ auf Grund der Gleichungen (12) als Functionen von t bestimmt, so ist wieder leicht zu beweisen, dass auch die Gleichungen (10) oder:

$$t\xi_a^b(x) - \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial x_a}{\partial y_c}\, \xi_c^b(z) = 0 \tag{17}$$

erfüllt sind. Bedenkt man nämlich, dass die $\frac{\partial x_a}{\partial y_c}$ durch die linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_c}\right)}{dt} = \xi_a^c(x) + \sum_{b,\,e=1}^{n} \frac{\partial \xi_a^b(x)}{\partial x_e}\, y_b \frac{\partial x_b}{\partial y_c} \tag{18}$$

mit den Anfangsbedingungen $\left(\frac{\partial x_a}{\partial y_c}\right)^0 = 0$ bestimmt sind, und bezeichnet die linke Seite (17) wieder mit $\varphi_a^b(t)$, so ergeben sich die $\frac{d\varphi_a^b(t)}{dt}$ auf Grund der Gleichungen (II) und (15) nach einigen Rechnungen als ganze homogene lineare Functionen der $\varphi_a^b(t)$ mit Coefficienten, die stetige Functionen von t sind. Das Bestehen der Gleichungen (10) hat nun zur Folge, dass die durch (12) bestimmten Functionen $H_a(z)$ auch zweite Differentialquotienten besitzen, sodass sich die Gleichungen (13) nunmehr als Folge der Bedingungen (II) ergeben; ebenso lehren die als Umkehrung von (10) sich ergebenden Gleichungen:

$$\zeta_a^b(z) = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial z_a}{\partial x_c}\, \xi_c^b(x), \tag{19}$$

dass die $z_1 \ldots z_n$ auch als Functionen der $x_1 \ldots x_n$ dargestellt werden können.

Wir können so schliesslich den Lie'schen Satz in der folgenden präcisen Fassung aussprechen:

Satz 6. *Jede continuirliche, endliche und transitive Transformationsgruppe, welche den Bedingungen des Satzes 4 genügt, kann bei Einführung geeigneter Veränderlicher und Parameter durch analytische Functionen dargestellt werden.*

Dass die durch die Differentialgleichungen (15) definirten Functionen $\xi_a^b(x)$ unter gewissen Voraussetzungen über die $c_{b,c}^a$ stets eine transitive Gruppe bestimmen, folgt aus meinen Untersuchungen im 39. Bande dieser Annalen, wo überdies die vollständige Bestimmung dieser Functionen durchgeführt ist. Obwohl wir darauf hier nicht eingehen wollen, so benutze ich doch die Gelegenheit, einen dort übersehenen Fehler zu verbessern, auf welchen Engel mich freundlichst aufmerksam machte. Ich habe daselbst aus den Gleichungen (103) fälschlich geschlossen, dass die c_{b_1,b_2}^c stets verschwinden, sobald $c \leqq r-p$, $b_1 = 1 \ldots r$ und $b_2 > r-p$, und daraus gefolgert, dass die Gruppe $(r-p)$-gliedrig sei, sobald die Gleichungen (100) p von einander unabhängige Lösungssysteme besitzen. Thatsächlich folgt aber aus den Gleichungen (103) nur, dass c_{b_1,b_2}^c verschwindet, wenn $c \leqq n$, $b_1 = 1 \ldots r$ und $b_2 > r-p$, sodass auch die weitere Schlussfolgerung hinfällig wird. Es müssen demnach noch einige Glieder höherer Ordnung in den dortigen Gleichungen (97) berücksichtigt werden, d. h. Gleichungen von der Form:

$$(\alpha) \qquad \sum_{b_1, b_2 \cdots b_{m-1}=n+1}^{r} a_b\, c_{b,b_1}^{b_1}\, c_{b_1,b_2}^{b_2} \cdots c_{b_{m-2},b_{m-1}}^{b_{m-1}}\, c_{b_{m-1},b_m}^{a} = 0.$$
$$(a, b_1, b_2, \ldots, b_m = 1 \ldots n).$$

Besitzt nämlich dies Gleichungssystem für die $a_{n+1} \ldots a_r$ für $m = 1$ gerade p_1 von einander unabhänge Lösungssysteme, für $m = 2$ p_2 solche, die zugleich das erste System befriedigen, für $m = 3$ gerade p_3 solche, die zugleich die beiden ersten Systeme befriedigen u. s. w., so wird entweder einmal ein p_m für $m = q$ verschwinden, d. h. die Gruppe wird r-gliedrig sein, oder es wird einmal $p_q = p_{q+1} = p$ sein, in welchem Falle die Gruppe $(r-p)$-gliedrig ist. Durch Einführung neuer Parameter kann man dann nämlich, wie a. a. O. S. 284 ausgeführt ist, immer erreichen, dass $a_{n+1} = \cdots = a_{r-p} = 0$, während $a_{r+p+1} \ldots a_r$ ganz beliebig sein können; zugleich sieht man, dass die Systeme (α) für $m = q$ und $q+1$ nur durch diejenigen allen vorhergehenden Systemen gemeinsamen Lösungssysteme befriedigt werden, für welche $a_{n+1} = \cdots = a_{r-p} = 0$. Ist aber $a_{n+1} \cdots a_r$ ein gemeinsames Lösungssystem der $q+1$ ersten Systeme (α), so bilden auch die:

$$b_{b_1} = \sum_{b=n+1}^{r} a_b\, c_{b,b_1}^{b_1} \quad (b_1 = 1 \ldots n, \quad b_1 = n+1 \ldots r)$$

Lösungssysteme der q ersten Systeme (α); hieraus folgt, dass stets $b_{n+1} = \cdots = b_{r-p} = 0$. Da nun diese Gleichungen für $a_{n+1} = \cdots = a_{r-p} = 0$, während $a_{r-p+1} \ldots a_r$ ganz beliebig sind, erfüllt sein sollen, so folgt

hieraus, dass $c_{b,c}^{a} = 0$ für $a = n+1 \ldots r-p$, $b = r-p+1 \ldots r$ und $c = 1 \ldots n$. Da ferner die letztgenannten Werthe der a_b das System (α) auch für $m = 1$ befriedigen müssen, so folgt dass $c_{b,c}^{a}$ auch verschwindet, wenn $a = 1 \ldots n$, $b = r-p+1 \ldots r$ und $c = 1 \ldots n$. Hieraus folgt, dass die a. a. O. mit $X_{a,b}^{(1)}$ bezeichneten Functionen für $a = 1 \ldots r-p$ und $b = r-p+1$ identisch verschwinden, woraus dasselbe für die $X_{a,b}^{(m)}$ folgt. Es verschwinden demnach alle Functionen $\xi_a^b(x)$ für $b > r-p$ identisch, während Relationen von der Form (96) nur dann erfüllt sein können, wenn $a_1 = \cdots = a_{r-p} = 0$. Hieraus folgt in der That, dass *die dort bestimmte Gruppe* $(r-p)$*-gliedrig ist, wenn es unter den Systemen* (α) *für zwei aufeinanderfolgende Werthe von m gleichviel, nämlich p von einander unabhängige Werthsysteme der* $a_{n+1} \ldots a_r$ *giebt, welche zugleich alle vorhergehenden Werthsysteme befriedigen.*

Will man beweisen, dass $c_{b,c}^{a}$ auch verschwindet für $a = 1 \ldots r-p$, $b = r-p+1 \ldots r$, $c = n+1 \ldots r$, d. h. die den $c_{b,c}^{a}$ zugeordnete einfach transitive Gruppe eine p-gliedrige invariante Untergruppe besitzt, so ergiebt sich dies leicht auf transcendentem Wege aus den Gleichungen (63) für $b_1 > r-p$. Auch auf algebraischem Wege ist der Beweis nicht schwer zu führen, doch gehen wir darauf an dieser Stelle nicht ein.

Schliesslich bemerke ich, dass Herr Lie die Kriterien für die Aehnlichkeit aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung nicht nur, wie ich auf S. 286 meiner o. a. Schrift behauptet habe, in transcendenter Form angegeben hat, sondern auch in algebraischer. Ich hatte eine Stelle in Transf. S. 496 im Auge, wo es sich aber nicht nur um die Entscheidung darüber handelt, ob zwei gegebene Untergruppen der Parametergruppe demselben Typus angehören, sondern um wirkliche Bestimmung aller Untergruppen von demselben Typus, welche auf die Integration vollständiger Systeme führt. Dass aber, wie Herr Lie a. a. O. S. 447 bemerkt hat, die Entscheidung über die Aehnlichkeit zweier transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung in der That nur algebraische Operationen erfordert, ist besonders leicht zu erkennen, wenn man beide Gruppen zuvor in die von mir angegebene kanonische Form überführt.

Sind nämlich $\xi_a^b(x)$ und $\bar{\xi}_a^b(\bar{x})$ die Componenten der infinitesimalen Transformationen der beiden Gruppen in ihrer kanonischen Form und $c_{b,c}^{a}$ resp. $\bar{c}_{b,c}^{a}$ ihre Zusammensetzungsconstanten, so müssen zwischen ihnen nach Lie die Gleichungen:

$$(\beta) \qquad \bar{c}_{b,b_1}^{a} = \sum_{c,b,e=1}^{r} c_{e,b}^{e}\, a_c^b\, a_b^{b_1}\, \alpha_e^a$$

bestehen entsprechend den Gleichungen:

$$(\gamma) \qquad u_a = \sum_{b=1}^{n} a_a^b \bar{u}_b$$

zwischen den kanonischen Parametern der beiden Gruppen, wo die α_c^a die durch die Determinante $|a_a^b|$ dividirten ersten Unterdeterminanten derselben und $a_a^b = 0$ für $a = 1 \ldots n$ und $b = n+1 \ldots r$, damit der Untergruppe $u_1 = \cdots = u_n = 0$ die Untergruppe $\bar{u}_1 = \cdots = \bar{u}_n = 0$ entspreche. Dann ist aus den Gleichungen (82) meiner o. a. Schrift leicht zu beweisen, dass:

$$(\delta) \qquad \bar{\xi}_a^b(\bar{x}) = \sum_{b=1}^{r} \sum_{c=1}^{r} a_b^a \, \xi_b^c(x) \, a_c^b,$$

woraus hervorgeht, dass bei Einführung der neuen Variablen $\bar{x}_a$ auf Grund der Gleichungen:

$$(\varepsilon) \qquad x_a = \sum_{b=1}^{n} a_a^b \bar{x}_b$$

und der neuen Parameter $\bar{u}_a$ auf Grund der Gleichungen (γ) die erste Gruppe in die zweite übergeht. Es kommt also in der That alles auf die algebraische Untersuchung an, ob die Gleichungen (β) durch die obigen Beschränkungen genügenden a_a^b befriedigt werden können.

Dorpat, im März 1892.

Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

Dans une lettre adressée à M. Klein, qui a été insérée dans le tome XXXVII des Annalen p. 461—464, j'ai essayé de rendre compte — si bien que je pouvais le faire en peu de mots — de la véritable signification de l'hypothèse de Chasles sur l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition donnée, et sur les raisons qui ont nécessité la modification d'Halphen de cette hypothèse. Pour illustrer par un exemple les remarques que j'ai faites à cet égard j'aurais pu renvoyer à ceux dont se sert Halphen dans sa première communication sur la nécessité d'une modification*).

Ces exemples éclairent immédiatement, pourquoi l'hypothèse de Chasles a dans ces cas des exceptions. Je donnerai ici un exemple où la raison de l'exception — étant toujours la même que dans les exemples d'Halphen — est plus voilée, et où par conséquent, avant la découverte d'Halphen, la confiance dont jouissait alors l'hypothèse de Chasles aurait pu encore plus facilement tromper les géomètres.

J'aurai à m'occuper des deux systèmes de coniques que représente, dans un système ordinaire de coordonnées parallèles, l'équation

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2 \tag{1}$$

suivant qu'on regarde a ou p comme paramètre variable, et du système représenté par l'équation

$$x^2 - y^2 = k(x-a)^2, \tag{2}$$

où k est le paramètre variable.

J'appellerai ces systèmes $(1a)$, $(1p)$ et (2). On voit sans difficulté qu'ils ont, tous les trois, les caractéristiques $\mu = 1$, $\nu = 1$.

*) Comptes rendus du 4 septembre 1876.

Je désignerai par q le coefficient de x dans l'expression qu'on obtient de y^2 en prenant le diamètre parallèle à la droite $y = \lambda x$ pour axe des x et la tangente en un des points d'intersection de ce diamètre avec la courbe pour axe des y; alors q est ce qu'on appellerait, dans le langage de la géométrie analytique élémentaire, le paramètre correspondant au diamètre. En désignant par ω l'angle des axes des coordonnées originaires, on déduira l'expression suivante de q^2 de l'équation (1):

$$q^2 = \frac{(4\lambda^2 a^2 + 4\lambda \cos\omega \,.\, ap + p^2)^2}{(1 + 2\cos\omega \cdot \lambda + \lambda^2)\, p\,(p - 2\lambda^2 a)},$$

et la suivante de l'équation (2):

$$q^2 = \frac{4k[\lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos\omega\,(k-1) + (k-1)^2]^2}{(1 + 2\lambda \cdot \cos\omega + \lambda^2)\,(\lambda^2 + k - 1)\,(k-1)^3}\, a^2.$$

Ces expressions montrent que dans les trois systèmes $(1a)$, $(1p)$ et (2) les nombres des coniques où le paramètre q a une valeur donnée sont égales, respectivement, à 4, 4 et 5. Or nous avons vu que les trois systèmes ont les mêmes caractéristiques. L'hypothèse de Chasles semble donc demander que les trois nombres soient égaux. Elle conduira en vérité à attribuer au nombre des coniques dans un système $(1, 1)$ où q a une valeur donnée la valeur de 5.

Cependant l'exception que présente le système $(1p)$ n'est qu'apparente. En effet, l'hypothèse en question, qui demande que μ et ν dépendent exclusivement du système, α et β exclusivement de la nouvelle condition, perdra son sens immédiat si l'on ne suppose pas que la nouvelle condition soit indépendante du système. Même avant 1876 un géomètre qui croyait à la justesse de l'hypothèse se garderait donc de l'appliquer immédiatement à un cas particulier avant de s'être assuré que cette indépendance a lieu dans ce cas. A cet effet, il devait avant tout considérer la question d'un point de vue projectif. Alors il remarquerait tout de suite que le système $(1p)$ contient une conique $(p = \infty)$ à un point double à l'infini, et qu'il a par conséquent des rapports assez intimes avec la détermination du paramètre q. Cette dépendance suffit pour expliquer qu'en formant une équation qui n'a égard qu'aux coniques propres on a perdu une des 5 solutions indiquées par l'hypothèse de Chasles.

Pour distinguer avec sureté les cas auxquels on peut appliquer l'hypothèse de Chasles de ceux où cette application n'est pas permise, on avait pourtant besoin d'une *définition nette de l'indépendance nécessaire*. C'est *un* des mérites de la théorie d'Halphen d'en contenir une.

Même sans aucune définition de l'indépendance, on n'aurait su hésiter à déclarer le système $(1a)$ indépendant de la droite à l'infini et

de tout ce qui a rapport à la définition de la valeur de q. En effet, les conditions du système sont identiques à celles d'avoir en un point donné un contact du troisieme ordre avec une conique donnée.

Quelle est donc ici la raison de l'exception de l'hypothèse de Chasles, ou bien, quelle est la cinquième conique du système $(1\,a)$ qu'on obtienne en donnant à la question une des formulations grace auxquelles on sait à présent rendre le théorème de Chasles exact. C'est la conique infiniment applatie et à sommets confondus qui correspond à $a = 0$. N'ayant pas fait les réstrictions contenues à une telle formulation, et ne sachant pas même avant la découverte d'Halphen que les coniques singulières dont je viens de parler puissent avoir autre influence sur le nombre cherché que celles qui résultent du fait qu'elles appartiennent à la fois aux coniques applaties et aux coniques à point double, un géomètre auquel on proposerait la question avant 1876 ne devait regarder cette conique singulière comme appartenant aux coniques cherchées que dans le cas où q^2 a la valeur entièrement déterminée $\frac{p^2}{1+2\cos\omega\lambda+\lambda^2}$ qui correspond à cette conique $(a = 0)$. L'hypothèse de Chasles lui aurait donc fait croire qu'il y ait, dans le système $(1\,a)$, 5 coniques propres dont le paramètre q a une autre valeur donnée. On se serait donc trompé en regardant l'hypothèse de Chasles comme un théorème exprimant un résultat immédiatement applicable.

Note.

Ces exemples serviront peut-être à éloigner une partie des malentendus de ma lettre à M. Klein qui auront pu se communiquer de la réponse de M. Study (t. XL, p. 559—562) à quelque lecteur des Annalen. On aura vu, du moins, que je ne m'occupe, ici et dans ma lettre, que des raisons qui ont nécessité une modification de l'hypothèse de Chasles, et qui ont en réalité porté Halphen à l'entreprendre, et non pas de la theorie et des moyens techniques, grace auxquels il a formulé cette modification et en démontré la suffisance. Je n'ai donc pas même eu lieu de me rendre coupable d'aucun malentendu de cette théorie. On aura vu encore que je dis — et que la connexion de mes idées demande — le *contraire de ce que M. Study veut*, à la p. 560 en bas, *que je démontre* par un renvoi à la litérature.

Cependant je n'insisterai ici ni à ces malentendus ni aux autres qu'on trouve dans la réponse. Le faire dans une étendue qui me mettrait à l'abri de tout malentendu nouveau serait abuser de l'hospitalité des »*Annalen*« quand même je n'ai écrit ma première lettre que sur l'invitation expresse du rédacteur. Et je n'ai pas besoin d'y insister. Il me suffit de voir de la réponse, que M. Study reconnaît: 1° qu'on

a besoin de sa formulation — ou d'une formulation semblable — de la question de Chasles pour en justifier la réponse $\alpha\mu + \beta\nu$, et 2° que la formulation d'Halphen, qui ne conduit pas toujours à cette réponse, en est une autre formulation raisonnable*). Or l'hypothèse de Chasles ne suppose aucune formulation particulière de la question; par conséquent elle *demande que toute formulation raisonnable conduise à* $\alpha\mu + \beta\nu$ *solutions.* Il était donc nécessaire pour en faire un théorème qu'il ne serait pas dangereux *d'appliquer* aux questions particulières, d'en modifier soit la question soit la réponse. Halphen a modifié la réponse; M. Study, qui a sauvé la réponse, doit avoir modifié la question.

Je laisse donc les malentendus et me tourne à un endroit qui se réfère du moins à quelque chose que j'ai dite. A la p. 561 M. Study commence par rappeler que je dis qu'une conique infiniment applatie à sommets coïncidents dans un système dépend des trois conditions qui déterminent la droite et le sommet et d'une quatrième constante finie: la valeur limite de $\frac{a^m}{b^n}$, a et b étant les demi-axes (ou mieux des quantités analogues qu'on peut déterminer d'une manière projective) et m et n des exposants convenablement choisis. Il y ajoute la remarque que la conique singulière dépend alors aussi d'une cinquième constante: le rapport $\frac{m}{n}$ qui peut prendre toute valeur rationnelle (comme nous ne parlons que de systèmes algébriques, je ne parlerai pas ici de ses propos sur les systèmes transcendants). Il en tire immédiatement la conclusion que je fais dépendre une conique particulière d'autant de constantes qu'une conique générale.

Il me semble qu'avant de tirer une conclusion qui me laisse si peu de bon sens, il aurait été naturel d'essayer du moins de trouver une explication du paradoxe apparent. Il y en aurait d'autant plus de raison que le rapport $\frac{m}{n}$, qui ne varie pas en tout cas d'une manière continue, ne peut servir à la détermination d'une série continue de coniques ou de systèmes. Je suppose hardiment que M. Study n'a pas fait cet essai; car (s'il n'est pas de son côté un malentendu de mes pensées que je n'ai pas découvert) il y aurait réussi presque aussi facilement qu'il explique à ses éléves qu'en déterminant les constantes de l'intégrale d'une équation différentielle d'ordre n au moyen de valeurs correspondantes de $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$, on ne fait pas dépendre cette integrale de $n + 1$ constantes. L'explication serait même facilitée par mes expressions: «convenablement *choisis*».

*) Selon *moi* elle conduit à la réponse complète de la question de Chasles, et montre ainsi à quelle réponse conduira toute autre formulation raisonnable, y compris celle de M. Study.

L'importance de la possibilité de trouver dans un système des valeurs rationnelles quelconques, non seulement du rapport $\frac{m}{n}$ — qui ne joue ici aucune rôle particulière — mais de m *et* n, ne m'était du reste point inconnue. C'est, en effet, elle qui l'a rendu impossible à Halphen de remplacer l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ par une nouvelle expression composée d'un nombre *fini* de termes qui soit applicable à tous les systèmes possibles et à toutes les conditions indépendantes du système.

Il me reste encore d'appuyer à des renvois littéraires la remarque dans ma note à la p. 462 (du t. XXXVII), ce que demande M. Study avec quelque raison. Il trouvera sans doute le plus facilement l'interprétation en question dans la démonstration de l'hypothèse de Chasles due aux MM. Schubert et Hurwitz*). Peut-être une remarque dans ma note, qui ne se réfère qu'aux démonstrations antérieures à la théorie d'Halphen, l'a-t-elle porté à ne la chercher pas là. Cependant ce renvoi ne justifie pas encore ma supposition que «la même interprétation se soit présentée à tous ceux qui se sont occupés de la théorie des caractéristiques».

Avant d'y suppléer je rappellerai que l'interprétation dont il s'agit du théorème de Chasles se trouve à la p. 66 du tome XXVII des Annalen, et que M. Study n'en exécute pas l'application à une démonstration géométrique du théorème qui ferait pendant à sa démonstration analytique. Si je ne me trompe pas, cette démonstration suivrait à peu près la marche suivante. En regardant les coniques seulement comme lieux de leurs points, on trouve dans un système $a\mu$ coniques qui satisfont à une nouvelle condition, a étant un nombre entier qui ne dépend que de celle-ci (formule de M. de Jonquières). Ce nombre comprend un certain nombre de fois, β, toutes les λ coniques infiniment applaties du système dont les sommets ne satisfont pas à la nouvelle condition, β étant un nombre entier (≥ 0) qui ne dépend que de la nouvelle condition. Le nombre λ étant égal à $2\mu - \nu$ on trouvera par soustraction un nombre $\alpha\mu + \beta\nu$ de coniques.

Si cette transcription ne repose pas sur un malentendu de ma part, l'interprétation contient la seule explication que je connaisse du rapport des formules de Chasles et de M. de Jonquières. En 1865 j'ai donné dans l'introduction de ma thèse doctorale**) cette même raison pour abandonner la théorie de Jonquières. Cette introduction manque toutefois dans la traduction en français de la thèse qui a été inséré dans les *Nouvelles Annales* de 1866, parce que le rédacteur de

*) Schubert. Abzählende Geometrie p. 286—87.

**) Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, der ere underkastede 4 Betingelser.

ce journal la regardait comme superflue, les formules, dont je faisais usage ensuite: $\lambda = 2\mu - \nu$ et celle qui y correspond par le principe de dualité, étant déjà connues par les travaux de Chasles. De mon côté, je crois qu'il avait tort, parce que l'explication dont je viens de parler était *encore* nouvelle; mais elle ne pouvait tarder à se présenter à ceux qui suivaient la polémique de Chasles et de M. de Jonquières. De même qu'elle est le point de départ de ma détermination des caractéristiques μ et ν de systèmes de coniques, et plus tard de courbes cubiques et quartiques, elle l'est sans doute aussi de celles des MM. Schubert et Maillard.

Dans ces circonstances je ne voulais revenir à cette interprétation avant de pouvoir y fonder une véritable démonstration du théorème de Chasles. Ce qui m'a empêché de le faire, c'est, si ma mémoire ne me trompe pas, que je ne savais pas comment m'assurer que les degrés de multiplicité des différentes coniques applaties dans le nombre λ sont toujours proportionnels à ceux dont elles se présentent dans le nombre qu'il faut soustraire de $a\mu$ pour avoir le nombre cherché. La théorie d'Halphen m'a montré que ce scrupule était bien fondé, la pro- portionalité n'ayant plus lieu lorsque les sommets de la conique applatie se confondent.

Ces remarques montreront que l'opinion que j'ai énoncée sur l'interprétation en question est de très ancienne date. Sans avoir cette opinion je n'aurais pas négligé de trouver une occasion de faire connaître aussi hors de ma patrie une explication du rapport des théories de Chasles et de Jonquières qui aurait eu sa valeur même sans conduire à une démonstration de l'hypothèse de Chasles. C'est une explication de la même nature du rapport des théories de Chasles et d'Halphen que j'ai trouvé utile de donner dans ma lettre à M. Klein suppléée par le présent article.*)

Copenhague, le 1. octobre 1892.

---

*) Nachdem in der zwischen den Herren Study und Zeuthen schwebenden Streitfrage beide Autoren ihre Ansicht erneut ausführlich dargelegt haben, kann die Redaction der mathematischen Annalen von ihrem Standpuncte aus die Discussion um so mehr als abgeschlossen ansehen, als die beiderseitigen Ansichten in sachlicher Hinsicht nicht mehr so sehr differiren, — hat doch Hr. Study die Correctheit sämmtlicher Entwickelungen von Halphen ausdrücklich zugestanden und andererseits Hr. Zeuthen wiederholt Study's eigenen Standpunct als einen möglichen anerkannt.

D. Red.

Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche.

Von

KARL DOEHLEMANN in München.

I. Abschnitt.

Ueber lineare Curvensysteme.

I.

Allgemeine Formulirung.

1) Sind $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $\ldots C_\nu = 0$ die Gleichungen von ν im allgemeinen gleichartigen Curven n^{ter} Ordnung, so soll

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\nu C_\nu = 0$$

ein lineares $(\nu - 1)$-fach unendliches Curvensystem heissen, entsprechend den ν willkürlichen, homogenen Parametern $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$.

Wir nehmen ferner an, diese Mannigfaltigkeit von Curven besitze einen Punkt, der für jede der Curven $C_1 \ldots C_\nu$ ein k-facher. Dann ist er es überhaupt für jede Curve des Systems und ein solcher Punkt soll dann ein k-facher Grundpunkt des Curvensystems heissen.

Wird der Coordinatenanfang des rechtwinkligen Coordinatensystems in diesen k-fachen Grundpunkt verlegt, so wird die Gleichung irgend einer beliebigen Curve des Systems sein:

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = 0$$

wobei

$$\begin{aligned}
u_k &= A_0^{(0)} x^k + A_1^{(0)} x^{k-1} y + \cdots + A_k^{(0)} y^k, \\
u_{k+1} &= A_0^{(1)} x^{k+1} + A_1^{(1)} x^k y + \cdots + A_{n+k}^{(1)} y^{k+1}, \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
u_n &= A_0^{(n-k)} x + A_1^{(n-k)} x^{n-1} y + \cdots + A_n^{(n-k)} y^n.
\end{aligned}$$

Die A sind dann lineare Zusammensetzungen aus den Parametern λ und den zusammengehörigen Coefficienten der Gleichungen $C_1 \ldots C_\nu$.

Führen wir jetzt ein neues schiefes Coordinatensystem ein, dessen X'-Axe mit der X-Axe einen Winkel α bildet und dessen Y'-Axe mit der Y-Axe zusammenfällt, so sind die Transformationsformeln:

$$x = x' \cos\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y'.$$

Wir wollen jetzt versuchen, den Winkel α so zu bestimmen, dass in der transformirten Gleichung die Glieder

$$x'^k,\ x'^{k-1}y' \ldots x'^{k-\nu}y'^{\nu}$$

verschwinden. Wie man leicht übersieht, liefert dieses die Gleichungen:

$$A_0^{(0)}\cos^k\alpha + A_1^{(0)}\cos^{k-1}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + A_k^{(0)}\sin^k\alpha = 0,$$
$$A_1^{(0)}\cos^{k-1}\alpha + 2A_2^{(0)}\cos^{k-2}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + kA_k^{(0)}\sin^{k-1}\alpha = 0,$$
$$A_2^{(0)}\cos^{k-2}\alpha + 3A_3^{(0)}\cos^{k-3}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + \frac{k(k-1)}{2}A_k^{(0)}\sin^{k-2}\alpha = 0,$$
$$\vdots$$
$$A_\nu^{(0)}\cos^{k-\nu}\alpha + \binom{\nu+1}{\nu}A_{\nu+1}^{(0)}\cos^{k-\nu-1}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + \binom{k}{\nu}A_k^{(0)}\sin^{k-\nu}\alpha = 0.$$

Dabei ist $\binom{k}{\nu} = \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}$ der Binomialcoefficient.

Es sei zunächst $\nu < k$. Setzen wir $\operatorname{tg}\alpha = z$, so geht das obige System von Gleichungen über in:

$$A_0^{(0)} + A_1^{(0)}z + \cdots + A_k^{(0)}z^k = 0,$$
$$A_1^{(0)} + 2A_2^{(0)}z + \cdots + kA_k^{(0)}z^{k-1} = 0,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$A_\nu^{(0)} + \binom{\nu+1}{\nu}A_{\nu+1}^{(0)}z + \cdots + \binom{k}{\nu}A_k^{(0)}z^{k-\nu} = 0.$$

Ist das zu Grunde gelegte Curvensystem von der Vielfachheit ν, so dass man $\nu+1$ homogene Parameter zur Verfügung hat, so kann man aus diesen $(\nu+1)$ Gleichungen diese $(\nu+1)$ Parameter eliminiren, und erhält in der Resultante eine Gleichung zur Bestimmung von z. Beschränken wir uns, der grösseren Bequemlichkeit wegen, auf den Fall des Netzes, so ist z. B.

$$A_0^{(0)} = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 \alpha_0 + \lambda_3 A_0$$

wo die a die Coefficienten von C_1, die α die von C_2, die A die von C_3 sind. Die erste Verticalreihe der in diesem Falle 3-reihigen Eliminationsdeterminante wird dann:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k$$
$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + k a_k z^{k-1}$$
$$a_2 + 3a_3 z + 6a_4 z^2 + \cdots + \frac{k(k-1)}{2}a_k z^{k-2}$$

Die zweite Verticalreihe lautet ebenso in den α, die dritte in den A. Diese Determinante lässt sich aber noch bedeutend reduciren. Multiplicirt man die 2. Horizontalreihe mit z und subtrahirt sie von der mit k multiplicirten 1. Horizontalreihe, so fällt in dieser das Glied mit z^k weg. Ebenso kann man dann mit Benutzung der 3. Horizontalreihe aus der 2. das Glied mit z^{k-1} entfernen und endlich durch Zusammenziehen der ersten und zweiten Horizontalreihe aus der ersten das Glied mit z^{k-1}, sodass man schliesslich erhält:

$$\begin{aligned} &\tfrac{k(k-1)}{2}\, a_0 + \tfrac{(k-1)^2}{2}\, a_1 z + \cdots + a_{k-2} z^{k-2}, \\ &\tfrac{(k-1)}{2}\, a_1 + (k-2)\, a_2 z + \cdots + \tfrac{(k-1)}{2}\, a_{k-1} z^{k-2}. \\ &\qquad a_2 + 2 a_3 z \qquad\quad + \cdots + \tfrac{k(k-1)}{2}\, a_k z^{k-2}. \end{aligned}$$

Die andern beiden Verticalreihen sind ebenso zu bilden in den α bez. A. Ganz ebenso lässt sich auch im allgemeinen Falle jedes Glied solange reduciren, bis $z^{k-\nu}$ die höchste vorkommende Potenz ist. Der Grad der Gleichung in bezug auf z wird also $(\nu+1)(k-\nu)$. Da dann aber, der Ableitung entsprechend, der Term u_k, der $= 0$ gesetzt die k Tangenten der betreffenden Curve im k-fachen Grundpunkte vorstellt, erst mit dem Gliede

$$x'^{k-\nu-1} y'^{\nu+1} + \cdots$$

beginnt, so ist $y' = 0$ eine $(\nu+1)$-fache Tangente derjenigen Curve des Systems, die zu dem betreffenden Werthe von z insofern gehört, als dadurch eben die Werthe der λ gegeben sind, also folgt:

> „In einem linearen, ν-fach unendlichen Curvensystem mit k-fachem Grundpunkte gibt es im Allgemeinen $(\nu+1)(k-\nu)$ Individuen, für welche $(\nu+1)$ der Tangenten zusammenfallen. $(\nu \leq k-1)$".

Nimmt man dagegen in den vorigen Gleichungen α als eine vorgegebene Grösse, so kann man aus den $(\nu+1)$ Gleichungen ebensoviele Grössen bestimmen oder die Verhältnisse von $\nu+2$ Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_{\nu+2}$, also:

> „In einem linearen $N = \nu+1$-fach unendlichen Curvensystem giebt es im Allgemeinen immer noch *eine* Curve, welche die Eigenschaft hat, dass in eine vorgegebene Gerade durch den k-fachen Grundpunkt $N = \nu+1$ Tangenten des k-fachen Punktes fallen."

2) Wäre $\nu = k$, so würde der ganze Term u_k verschwinden, die Curve hätte einen $(k+1)$-fachen Punkt, u_k müsste dann auch für das ursprüngliche Coordinatensystem verschwinden oder die Gleichungen müssten, wie auch direct einzusehen, für $z = 0$ befriedigt sein; diese $\nu+1$ Gleichungen

$$A_0^{(0)} = 0,\ A_1^{(0)} = 0 \cdots A_\nu^{(0)} = 0$$

sind also erst zu befriedigen, wenn $\nu + 2$ homogene Parameter zur Verfügung stehen, vorausgesetzt allerdings, dass zwischen den Coefficienten der $C_1, C_2 \ldots$ keine Relationen bestehen.

Es folgt also:

„In einem linearen, ν-fach unendlichen, Curvensystem mit k-fachem Grundpunkt ist im Allgemeinen keine Curve mit $(k+\nu)$-fachem Punkte vorhanden, so lange $\nu \leq k$; ist dagegen $\nu = k+1$, so giebt es eine Curve (und für $\nu > k+1$ ein System), welche im Grundpunkt einen $(k+1)$-fachen Punkt hat."

So giebt es z. B. in einem Netze von Curven mit einfachem Grundpunkte im allgemeinen Falle eine Curve mit einem Doppelpunkt in diesem Grundpunkte.

3) Anders wird die Sache, wenn das lineare System nicht mehr allgemein ist, wenn also z. B. die Curven des Systems im k-fachen Punkte sämmtlich eine Gerade berühren. Der speciellste Fall ist hier der, wo die sämmtlichen k Tangenten im k-fachen Grundpunkte für alle Curven des Systems gemeinsam sind, dann ist leicht einzusehen, dass eine Curve mit $(k+1)$-fachem Punkt im Grundpunkt vorliegt, sobald nur die Relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\nu+1} = 0$$

erfüllt ist, d. h.

„Hat ein lineares, ν-fach unendliches Curvensystem mit einem k-fachen Grundpunkt die Tangenten in diesem gemein, so giebt es in diesem ν-fach unendlichen System ein $(\nu-1)$-fach unendliches System, das im k-fachen Grundpunkte einen $(k+1)$-fachen Grundpunkt besitzt."

4) Eine andere Singularität, welche gewissen Curven eines solchen linearen Systems immer zukommt, ist die, dass für *einen* Ast einer Curve im Grundpunkte eine Anzahl Nachbarpunkte auf einer Geraden liegen. Wir wollen annehmen, es lägen μ Nachbarpunkte auf einer solchen Geraden durch den Grundpunkt.

Da dann wegen des k-fachen Punktes noch $k-1$ weitere Schnittpunkte in den Grundpunkt fallen, so hat diese Gerade im Ganzen $\mu + k - 1$ Punkte mit der Curve gemein; ist $y = \varrho x$ ihre Gleichung, so muss man also haben:

$$\begin{aligned}
A_0^{(0)} + A_1^{(0)}\varrho + \quad & \cdots + A_k^{(0)}\varrho^k & = 0,\\
A_0^{(1)} + A_1^{(1)}\varrho + \quad & \cdots + A_{k+1}^{(1)}\varrho^{k+1} & = 0,\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots & \\
A_0^{(\mu-2)} + A_1^{(\mu-2)}\varrho + \cdots + & A_{k+\mu-2}^{(\mu-2)}\varrho^{k+\mu-2} & = 0.
\end{aligned}$$

Diese $(\mu-1)$ Gleichungen sind zu befriedigen; wenn in die A $\mu-1$ homogene Parameter $\lambda_1 \ldots \lambda_{u-1}$ eingehen, das System also aus $\mu-2$ Curven zusammengesetzt ist. Man erhält dann eine Determinante als Gleichung zur Bestimmung von ϱ und für jeden Werth von ϱ ein zugehöriges System der λ. Der Grad der Gleichung in ϱ aber wird

$$k+k+1+\cdots+k+\mu-2=\frac{(u-1)(2k+u-2)}{2}.$$

Da nun nach 2) im allgemeinen in dem System keine Curve mit $(k+1)$-fachem Punkte vorhanden ist, da ferner den durch ϱ bestimmten Richtungen im Allgemeinen auch keine Aeste zugehören können, die sich berühren, so folgt, dass die μ aufeinanderfolgenden Punkte auf einem Zweige der betreffenden Curve liegen, also:

„In einem linearen $N=\mu-2$-fach unendlichen Curvensystem mit k-fachem Grundpunkt giebt es

$$\frac{(N+1)(2k+N)}{2}=\frac{(\mu-1)(2k+\mu-2)}{2}$$

Curven, welche auf einem Aste des k-fachen Punktes in dessen Nachbarschaft $N+2=\mu$ aufeinanderfolgende Punkte auf einer Geraden besitzen."

5) Nimmt man dagegen die Grösse ϱ von vornherein als fest an, so kann man aus den vorigen $\mu-1$ Gleichungen μ homogene Parameter bestimmen, das Curvensystem muss also von der Mannigfaltigkeit $\mu-1$ sein, also:

„In einem linearen, $N=\mu-1$-fach unendlichen Curvensystem mit k-fachem Punkte giebt es stets *eine* Curve, welche auf einer durch den Grundpunkt gehenden beliebigen Geraden in dessen Nähe $N+1=\mu$ aufeinanderfolgende Punkte trifft."

II.

Das Büschel.

6) Hat man speciell ein Büschel mit einem k-fachen Grundpunkt und sind

$$C_1 = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n,$$
$$C_2 = w_k + w_{k+1} + \cdots + w_n$$

die Gleichungen der beiden erzeugenden Curven, wobei

$$u_k = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \cdots + a_k y^k,$$
$$w_k = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} y + \cdots + \alpha_k y^k,$$
$$u_{k+1} = b_0 x^{k+1} + b_1 x^k y + \cdots + b_{k+1} y^{k+1},$$
$$w_{k+1} = \beta_0 x^{k+1} + \beta_0 x^k y + \cdots + \beta_{k+1} y^{k+1} \quad \text{u. s. w.}$$

so erhält man zunächst zur Bestimmung der $2(k-1)$ Richtungen, in denen Curven mit Spitzen berühren, die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ka_0+(k-1)a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1} & k\alpha_0+(k-1)\alpha_1z+\cdots+\alpha_{k-1}z^{k-1} \\ a_1+2a_2z \quad +\cdots+ka_kz^{k-1} & \alpha_1+2\alpha_2z \quad +\cdots+k\alpha_kz^{k-1} \end{vmatrix}=0,$$

welche für $z=\frac{y}{x}$ direct $2(k-1)$ Gerade durch den Coordinatenanfang liefert.

Naturgemäss erhält man diese Richtungen auch aus der Discriminante der linearen Form $u_k+\lambda w_k$. Da der Grad dieser Gleichung übrigens stets ein gerader ist, so folgt:

„Die Curven eines Büschels mit k-fachem Grundpunkt, für welche 2 der k Tangenten zusammenfallen, treten immer paarweise auf."

Die Bedingungen dafür ferner, dass eine Gerade $y=\varrho x$ einen Ast einer Curve in 3 aufeinanderfolgenden Punkten schneide, sind

$$(1)\quad \begin{aligned} &\lambda_1a_0+\lambda_2\alpha_0+(\lambda_1a_1+\lambda_2\alpha_1)\varrho+\cdots+(\lambda_1a_k \quad +\lambda_2\alpha_k \quad)\varrho^k \quad =0, \\ &\lambda_1b_0+\lambda_2\beta_0+(\lambda_1b_1+\lambda_2\beta_1)\varrho+\cdots+(\lambda_1b_{k+1}+\lambda_2\beta_{k+1})\varrho^{k+1}=0. \end{aligned}$$

Wäre in dem Büschel ein Individuum mit $(k+1)$-fachem Punkte im Grundpunkt enthalten, so müssten für eine Tangente in ihm auch diese Bedingungen erfüllt sein. Dann müsste es aber Werthe $\lambda_1'\lambda_2'$ geben, sodass

$$\lambda_1'a_0+\lambda_2'\alpha_0=0 \qquad \lambda_1'a_k+\lambda_2'\alpha_k=0$$

wäre; also wären die a proportional zu den α und die sämmtlichen Curven des Büschels (bis auf eine) hätten im k-fachen Punkt die nämlichen k Tangenten; dieser Fall soll aber erst im Folgenden erledigt werden.

Im Allgemeinen sind also die Gleichungen 1) bloss für einen Wendepunkt erfüllt und es ergiebt sich aus ihnen durch Elimination der λ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1\varrho+\cdots+a_k\varrho^k & \alpha_0+\alpha_1\varrho+\cdots+\alpha_k\varrho^k \\ b_0+b_1\varrho+\cdots+b_{k+1}\varrho^{k+1} & \beta_0+\beta_1\varrho+\cdots+\beta_{k+1}\varrho^{k+1} \end{vmatrix}=0$$

also eine Gleichung vom Grade $2k+1$. Da dieser Grad ungerade, so hat sie mindestens eine reelle Wurzel und es folgt also (als specieller Fall von 4)

„In einem Büschel von Curven n^{ter} Ordnung mit k-fachem Grundpunkt ($k\leq n-2$) und verschiedenen Tangenten in ihm giebt es $(2k+1)$ Individuen, welche noch einen Wendepunkt im Grundpunkte besitzen. Eine dieser Curven ist immer reell."

Ich habe diesen Satz gelegentlich in meiner Inauguraldissertation*) erwähnt. Für den einfachsten Fall des Kegelschnittbüschels sind die 3 Individuen der genannten Art die 3 Geraden, die durch einen Grundpunkt nach den 3 übrigen gehen, je in Verbindung mit der Verbindungslinie der andern beiden Grundpunkte.

7) Haben die beiden Curven C_1 und C_2 gemeinschaftliche Tangenten im k-fachen Grundpunkt, so kann man schreiben:

$$C_1 = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n,$$
$$C_2 = w_k + w_{k+1} + \cdots + w_n$$

und $C_1 - C_2 = 0$ ist dann die Curve mit $(k+1)$-fachem Punkte im Grundpunkte. Dies ist der Satz, den Cremona: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven Nr. 48 geometrisch klar legt.

Es folgt aber auch umgekehrt nach dem Vorigen:

„Wenn in einem Büschel mit k-fachem Grundpunkte eine Curve mit $(k+1)$-fachem Punkte in diesem Grundpunkte enthalten ist, so haben die *andern* Curven des Büschels die k Tangenten im k-fachen Grundpunkt gemein."

Die Bedingungsgleichungen für einen Wendepunkt werden in diesem Falle

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(a_0 + a_1\varrho + \cdots + a_k\varrho^k) = 0$$

und

$$\lambda_1 b_0 + \lambda_2\beta_0 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2\beta_1)\varrho + \cdots + (\lambda_1 b_{k+1} + \lambda_2\beta_{k+1})\varrho^{k+1} = 0.$$

Ist nun $\lambda_1 + \lambda_2$ von Null verschieden, so kann man aus diesen beiden Gleichungen ϱ eliminiren und erhält so k Werthe für das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$. Diesen entsprechen Curven mit Wendepunkten. Man sieht also:

„Haben die Curven eines Büschels in einem k-fachen Grundpunkt sämmtlich (mit Ausnahme einer einzigen) die k Tangenten gemein, so treten an Stelle der $(2k+1)$ mit einem Wendepunkt versehenen Individuen des allgemeinen Falles einmal k Individuen von der gleichen Eigenschaft, und ausserdem die $k+1$ Aeste der einen Curve, die im Grundpunkt einen $(k+1)$-fachen Punkt besitzt."

8) Endlich kann noch der Fall eintreten, dass von den k Tangenten im Grundpunkt bloss einige, etwa k_1 fest sind. Dann hat man

$$C_1 = u_{k_1} \cdot u_{k-k_1} + u_{k+1} + \cdots + u_n,$$
$$C_2 = u_{k_1} \cdot \omega_{k-k_1} + \omega_{k-1} + \cdots + \omega_n$$

*) Ueber die Flächen, die sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlbündel erzeugen lassen. München, Theodor Ackermann 1889, pag. 34. Für $k = 1$ hat, wie ich später fand, S. Kantor (Wiener Sitz. Ber. 1879, II, p. 707) den Satz geometrisch bewiesen.

wobei

$$u_{k_1} = A_0 x^{k_1} + A_1 x^{k_1-1} y \quad + \cdots + A_{k_1} y^{k_1},$$
$$u_{k-k_1} = a_0 x^{k-k_1} + a_1 x^{k-k_1-1} y + \cdots + a_{k-k_1} y^{k-k_1},$$
$$\omega_{k-k_1} = \alpha_0 x^{k-k_1} + \alpha_1 x^{k-k_1-1} y + \cdots + \alpha_{k-k_1} y^{k-k_1}.$$

Die k Tangenten für irgend eine Büschelcurve sind dann:

$$u_{k_1} = 0$$

und

$$\lambda_1 u_{k-k_1} + \lambda_2 \omega_{k-k_1} = 0.$$

Es ist dann klar, dass man λ_1 und λ_2 noch so bestimmen kann, dass eine weitere Tangente des k-fachen Punktes mit einer der k_1 festen Tangenten zusammenfällt, also:

„In einem Büschel mit k-fachem Grundpunkte, von denen k Tangenten k_1 fest sind, $(k_1 < k)$ giebt es k_1 Individuen, welche die Eigenschaft haben, dass für sie je eine der k_1 Tangenten 2 Aeste berührt."

Die Bedingungen für einen Wendepunkt endlich werden

$$A_0 + A_1 \varrho + \cdots + A_{k_1} \varrho^{k_1} = 0,$$
$$\lambda_1 a_0 + \lambda_2 \alpha_0 + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_1)\varrho + \cdots + (\lambda_1 a_{k-k_1} + \lambda_2 \alpha_{k-k_1})\varrho^{k-k_1} = 0,$$
$$\lambda_1 b_0 + \lambda_2 \beta_0 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 \beta_1)\varrho + \cdots + (\lambda_1 b_{k+1} + \lambda_1 \beta_{k+1})\varrho^{k+1} = 0,$$

Der Factor vom Grade k_1 giebt k_1 Werthe von ϱ, denen aus der 2. Gleichung ebensoviele Werthe für $\lambda_1 : \lambda_2$ entsprechen. Ferner kann man aus den beiden Gleichungen, die λ enthalten, diese eliminiren und erhält dadurch eine Gleichung vom Grade $2k + 1 - k_1$ in ϱ, also folgt:

„Sind im k-fachen Grundpunkte eines Büschels k_1 Tangenten fest, $(k_1 \leq k - 1)$ so giebt es noch $2k + 1 - k_1$ Curven mit Wendepunkt in diesem Grundpunkt; an Stelle der übrigen treten die k_1 Curven, welche je eine der k_1 festen Tangenten als Spitzentangente enthalten."

Cremona beweist (l. c. Nr. 47) nur den Satz: Unter allen Curven eines Curvenbüschels, die sich in einem Punkte a berühren, giebt es eine, für welche a ein Wendepunkt und eine, für welche dieser Punkt ein Doppelpunkt ist.

Anmerkung 1. Hat man ein Büschel von Curven n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkt, so liefern die Bedingungsgleichungen für einen Wendepunkt die $2n - 1$ Geraden, die in Verbindung mit einer Curve von der Ordnung $n - 1$ Theile des Büschels ausmachen. Diese Geraden gehen natürlich durch die nicht in den Grundpunkt fallenden Schnittpunkte von C_1 und C_2.

Anmerkung 2. Man kann direct die Gleichungen zweier Curven

anschreiben, welche die Eigenschaft haben, dass in ihrem Büschel eine Curve mit $(k+\lambda)$-fachem Punkte auftritt. In der That, ist

$$C_1 = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+\lambda-1} + u_{k+\lambda} + \cdots + u_n,$$
$$C_2 = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+\lambda-1} + \omega_{k+\lambda} + \cdots + \omega_n,$$

so ist

$$C_1 - C_2 = u_{k+\lambda} - \omega_{k+\lambda} + \cdots + u_n - \omega_n = 0$$

diese Curve mit $(k+\lambda)$-fachem Punkte.

9) Es liegt hier die Frage nahe nach dem Orte, den überhaupt die Wendepunkte der Curven eines Büschels erfüllen. Denken wir uns homogene Coordinaten eingeführt, also $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ gesetzt, so werden die Wendepunkte einer beliebigen Curve des Büschels

$$f + \lambda\varphi = 0$$

ausgeschnitten durch ihre Hesse'sche Curve

$$H_\lambda = \begin{vmatrix} f_{11}+\lambda\varphi_{11} & f_{12}+\lambda\varphi_{12} & f_{13}+\lambda\varphi_{13} \\ f_{21}+\lambda\varphi_{21} & f_{22}+\lambda\varphi_{22} & f_{23}+\lambda\varphi_{23} \\ f_{31}+\lambda\varphi_{31} & f_{32}+\lambda\varphi_{32} & f_{33}+\lambda\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0$$

wobei

$$f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k};$$

dies giebt

$$H_\lambda = \lambda^3(\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}) + \lambda^2 \Sigma f_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \lambda \Sigma f_{11} f_{22}\varphi_{33} + (f_{11}f_{22}f_{33}) = 0.$$

Dabei sind $(\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33})$ und $(f_{11}f_{22}f_{33})$ die Hesse'schen Determinanten von φ und f, während

$$\Sigma(f_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

und $\Sigma(f_{11}f_{22}\varphi_{33})$ eine analoge Summe bedeutet. Durch Elimination von λ erhält man für den gesuchten Ort:

$$W = f^3(\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}) - f^2\varphi \cdot \Sigma(f_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}) + f\varphi^2 \cdot \Sigma(f_{11}f_{22}\varphi_{33}) - \varphi^3 \cdot (f_{11}f_{22}f_{33}) = 0.$$

Es ist nicht schwierig, die Singularitäten dieser Ortscurve in verschiedenen Büschelgrundpunkten zu untersuchen. Man findet:

„Der Ort W der Wendepunkte der Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung ist eine Curve von der Ordnung $6n - 6$.

Ein einfacher Grundpunkt des Büschels ist ein 3-facher für die Curve W, dagegen ist ein k-facher Grundpunkt des Büschels ein $6k - 4$-facher für die Curve W.

Die Curven des Büschels, welche in einem Grundpunkte einen Wendepunkt besitzen, berühren mit diesen Aesten die Curve W.

Die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte des Büschels sind auch Doppelpunkte der Curve W und zwar sind die Tangenten an die Curve des Büschels und die an W im Doppelpunkte die gleichen."

Das einfachste Beispiel bietet das Kegelschnittbüschel. Hier besteht W aus den 3 Geradenpaaren, die im Büschel enthalten sind.*)

III.

Das Netz.

10) Sind 3 Curven C_1, C_2, C_3 zur Bildung des Systems gegeben, so ist der Fall ausgezeichnet (vergl. 2) wo die Curven des Netzes einen einfachen Grundpunkt haben. Ist unter dieser Voraussetzung

$$C_1 = (a_0 x + a_1 y) + (b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2) + \cdots,$$
$$C_2 = (\alpha_0 x + \alpha_1 y) + (\beta_0 x^2 + \beta_1 xy + \beta_2 y^2) + \cdots,$$
$$C_3 = (A_0 x + A_1 y) + (B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2) + \cdots$$

und bestimmt man λ_1, λ_2, λ_3 aus den Gleichungen:

$$1)\quad a_0\lambda_1 + \alpha_0\lambda_2 + A_0\lambda_3 = 0,$$
$$2)\quad a_1\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + A_1\lambda_3 = 0$$

also

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (\alpha_0 A_1 - A_0\alpha_1) : (a_1 A_0 - a_0 A_1) : (a_0\alpha_1 - \alpha_0 a_1)$$

so erhält man die Curve mit Doppelpunkt, die im Netze enthalten ist. Cremona l. c. (Nr. 92). Soll es mehr als eine solche Curve geben, so müssen die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ unbestimmt werden, 1) und 2) die nämliche Gleichung vorstellen und es ist

$$a_1 = \varrho a_0; \quad \alpha_1 = \varrho\alpha_0; \quad A_1 = \varrho A_0.$$

Dann haben aber die 3 Curven $C_1\, C_2\, C_3$ die nämliche Tangente im Coordinatenanfang und man erhält alle Curven des Netzes mit Doppelpunkt, wenn man $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ annimmt, also:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in einem Netze mit einfachem Grundpunkte ein Büschel von Curven mit einem Doppelpunkt im Grundpunkt vorhanden sei, ist die, dass die sämmtlichen übrigen Curven des Netzes in dem Grundpunkte die Tangente gemein haben."

*) Aus einem Referat im „Jahrbuch der Fortschritte" ersehe ich, dass Herr K. Bobek in einer böhmischen Abhandlung (Casopis XI) Ordnung und Classe $(6(n-2)(4n-3))$ dieser Curve bestimmt hat.

11) Ist ein Grundpunkt des Netzes ein k-facher, also mit variabeln Tangenten, also

$$C_1 = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \cdots + a_k y^k + b_0 x^{k+1} + b_1 x^k y + \cdots + b_{k+1} y^{k+1} + \cdots,$$
$$C_2 = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} y + \cdots + \alpha_k y^k + \beta_0 x^{k+1} + \beta_1 x^k y + \cdots + \beta_{k+1} y^{k+1} + \cdots,$$
$$C_3 = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} y + \cdots + A_k y^k + B_0 x^{k+1} + B_1 x^k y + \cdots + B_{k+1} y^{k+1} + \cdots,$$

so geben nach dem Frühern die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1\varrho + \cdots + a_k\varrho^k & \alpha_0 + \alpha_1\varrho + \cdots + \alpha_k\varrho^k \\ b_0 + b_1\varrho + \cdots + b_{k+1}\varrho^{k+1} & \beta_0 + \beta_1\varrho + \cdots + \beta_{k+1}\varrho^{k+1} \\ c_0 + c_1\varrho + \cdots + c_{k+2}\varrho^{k+2} & \gamma_0 + \gamma_1\varrho + \cdots + \gamma_{k+2}\varrho^{k+2} \\ A_0 + A_1\varrho + \cdots + A_k\varrho^k & \\ B_0 + B_1\varrho + \cdots + B_{k+1}\varrho^{k+1} & \\ C_0 + C_1\varrho + \cdots + C_{k+2}\varrho^{k+2} & \end{vmatrix} = 0$$

Richtungen der Art, dass es zu jeder eine Curve giebt, welche 4 aufeinanderfolgende Punkte, also eine Undulation, auf ihr besitzt.

„Die Anzahl der Curven mit Undulation, die in einem Netze mit k-fachem Grundpunkte enthalten sind, beträgt also $3(k+1)$."

Ist k gerade, so ist eine dieser Curven *immer* reell.

Die Anzahl der Curven ferner, für welche 3 der k Tangenten zusammenfallen, wird nach 1) $= 3(k-2)$.

Es giebt ferner immer noch *eine* Curve des Netzes, welche eine beliebig vorgegebene Gerade durch den Grundpunkt zur Spitzen- oder Wendetangente hat.

Sind die k Tangenten im Grundpunkte gemeinsam, so giebt es in dem Netze ein Büschel von Curven mit $(k+1)$-fachem Punkte. Es folgt dann:

„Die $3(k+1)$ Curven mit Undulation gehen dann über in die k Curven, welche die k festen Tangenten des Grundpunktes als Undulationstangenten haben und in die $2(k+1)+1 = 2k+3$ Curven mit *Wendepunkten*, welche in dem erwähnten Büschel mit $(k+1)$-fachem Punkte enthalten sind.

IV.

Die Jacobi'sche Curve eines Netzes.

12) Für ein Netz ist charakteristisch seine Jacobi'sche Curve, die gegeben durch

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C_3}{\partial x_1} & \frac{\partial C_3}{\partial x_2} & \frac{\partial C_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist bekannt, dass dieselbe in einem k-fachen Grundpunkte des Netzes selbst einen $(3k-1)$-fachen Punkt hat. Für $k=1$ hat J einen Doppelpunkt und die Curve des Netzes, welche in dem Grundpunkt einen Doppelpunkt hat, berührt in ihm die Jacobi'sche mit ihren beiden Aesten. Wählt man einen beliebigen Punkt auf J, so geht durch ihn ein Büschel von Curven des Netzes und nach der Definition von J ist auch eine Curve im Netze vorhanden, die in dem Punkte einen Doppelpunkt hat. Daraus folgt dann nach 7 bereits, dass die übrigen Curven des Büschels sich berühren müssen, was einer andern Definition der Jacobi'schen Curve entspricht. Es fragt sich jetzt aber, wenn man den Punkt auf der J in den k-fachen Grundpunkt rücken lässt, welche Singularität weist die zugehörige Curve des Netzes auf.

Um diess zu untersuchen, wenden wir auf das Netz die bereits in 1) angeführte Transformation an. Setzen wir in der transformirten Gleichung die Coefficienten von

$$x'^k, \quad x'^{k-1}y', \quad x'^{k+1}$$

je = Null, so giebt diess folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&A_0^{(0)}\cos^k\alpha + A_1^{(0)}\cos^{k-1}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + A_k^{(0)}\sin^k\alpha = 0,\\
&A_1^{(0)}\cos^{k-1}\alpha + 2A_2^{(0)}\cos^{k-2}\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + kA_k^{(0)}\sin^{k-1}\alpha = 0,\\
&A_0^{(1)}\cos^{k+1}\alpha + A_1^{(1)}\cos^k\alpha\cdot\sin\alpha + \cdots + A_{k+1}^{(1)}\sin^{k+1}\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Diess liefert durch Elimination von $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ für $\operatorname{tg}\alpha = z$

$$\begin{vmatrix}
a_0 + a_1z + \cdots + a_kz^k & \alpha_0 + \alpha_1z + \cdots + \alpha_kz^k\\
a_1 + 2a_2z + \cdots + ka_kz^{k-1} & \alpha_1 + 2\alpha_2z + \cdots + k\alpha_kz^{k-1}\\
b_0 + b_1z + \cdots + b_{k+1}z^{k+1} & \beta_1 + \beta_1z + \cdots + \beta_{k+1}z^{k+1}\\
A_0 + A_1z + \cdots + A_kz^k & \\
A_1 + 2A_2z + \cdots + kA_kz^{k-1} & \\
B_0 + B_1z + \cdots + B_{k+1}z^{k+1} &
\end{vmatrix} = 0.$$

Der Coefficient von z^{3k} wird hier die verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix}
a_k & \alpha_k & A_k\\
ka_k & k\alpha_k & kA_k\\
b_{k+1} & \beta_{k+1} & B_{k+1}
\end{vmatrix},$$

so dass also diese Gleichung $3k-1$ Richtungen durch den k-fachen Grundpunkt liefert. — Führen wir homogene Coordinaten ein, so kommt in der Gleichung der Jacobi'schen x_3 erst von der Potenz $3n-3k+1$ an vor und der Factor dieses Gliedes giebt die $(3k-1)$ Tangenten der J. Es ist nun leicht, den Coefficienten von x_1^{3k-1} zu

bestimmen. Derselbe wird bis auf einen Zahlenfactor die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & b_0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_0 \\ A_0 & A_1 & B_0 \end{vmatrix}.$$

Denken wir uns jetzt, wir hätten das homogene Coordinatensystem so orientirt, dass eine der durch die obige Gleichung definirten Richtungen α die Axe $x_2 = 0$ wird, so wird es eine Curve des Netzes geben, für welche

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0.$$

Nehmen wir diese etwa als Curve C_1, während C_2 und C_3 noch beliebig gewählt werden können, so wird in der Jacobi'schen Curve der Coefficient von x_1^{3k-1} Null, d. h. $x_2 = 0$ ist auch eine Tangente der Jacobi'schen Curve. Also ist dargethan, dass die durch die vorige Gleichung gegebenen Richtungen die Tangenten der Jacobi'schen Curve sind.

Die Singularität der betreffenden Curve des Netzes ist aber die, dass für's erste 2 der k Tangenten des k-fachen Punktes zusammenfallen, ferner liegen auf dieser Tangente im Ganzen $k + 2$ Punkte im Grundpunkt vereinigt, so dass, da $k - 2$ Schnittpunkte durch die andern Aeste absorbirt werden, für beide Aeste zusammen 4 consecutive Punkte übrig bleiben; diess entspricht aber einer Selbstberührung der Curve, also folgt:

> „Die $3k - 1$ Curven des Netzes, welche den Durchgängen der Jacobi'schen Curve durch einen k-fachen Grundpunkt entsprechen, haben in diesem Punkte eine Selbstberührung und sind zugleich die einzigen Curven, welche diese Singularität im Grundpunkte besitzen."

13) Eine höhere Singularität wird die Jacobi'sche Curve zeigen, wenn das Netz von der besondern Art ist, dass die Curven desselben die k Tangenten im k-fachen Grundpunkt gemein haben.

Sind die erzeugenden Curven

$$C_1 = Gx_3^{n-k} + Lx_3^{n-k-1} + \cdots,$$
$$C_2 = Gx_3^{n-k} + Mx_3^{n-k-1} + \cdots,$$
$$C_3 = Gx_3^{n-k} + Nx_3^{n-k-1} + \cdots,$$

wo das G in den a, L, M, N, beziehungsweise in b, β, B geschrieben, so verschwindet in der Jacobi'schen Determinante wieder der Coefficient von $x_3^{3n-3k-1}$, was die höchste Potenz von x_3 ist, soferne derselbe die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & G \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & G \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & G \end{vmatrix}$$

und die übrige Determinante lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(L-N)}{\partial x_1} x_3^{n-k-1} + \cdots & \frac{\partial(L-N)}{\partial x_2} x_3^{n-k-1} + \cdots \\ & (n-k-1)(L-N) x_3^{n-k-2} + \cdots \\ \frac{\partial(M-N)}{\partial x_1} x_3^{n-k-1} + \cdots & \frac{\partial(M-N)}{\partial x_2} x_3^{n-k-1} + \cdots \\ & (n-k-1)(M-N) x_3^{n-k-2} + \cdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} x_3^{n-k} + \frac{\partial N}{\partial x_1} x_3^{n-k-1} + \cdots & \frac{\partial G}{\partial x_2} x_3^{n-k} + \frac{\partial N}{\partial x_2} x_3^{n-k-1} + \cdots \\ & (n-k) G x_3^{n-k-1} + (n-k-1) N x_3^{n-k-2} + \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Die höchste Potenz von x_3, welche in der Gleichung vorkömmt, wird die $(3n - 3k - 3)^{te}$, woraus zunächst folgt, dass ein solcher Grundpunkt für die Jacobi'sche Curve ein $(3k)$-facher Punkt ist. —

Berechnet man ferner in dem homogenen Factor vom Grade $3k$, der die $3k$ Tangenten der Jacobi'schen vorstellt, den Coefficienten von x_1^{3k}, so wird derselbe

$$n a_0 [(b_0 - B_0)(\beta_1 - B_1) - (\beta_0 - B_0)(b_1 - B_1)].$$

Denken wir uns nun das Coordinatensystem so gewählt, dass eine der k festen Tangenten in die Axe $x_2 = 0$ fällt, so ist für diese Darstellung $a_0 = 0$ zu setzen und man erkennt aus dem Verschwinden des obigen Coefficienten, dass auch die Jacobi'sche die Gerade $x_2 = 0$ berührt. k Zweige der Jacobi'schen fallen also zusammen mit den k festen Tangenten im Grundpunkte. Offenbar müssen die diesen Durchgängen der J entsprechenden Curven des Netzes die sein, welche nach 11) im k-fachen Grundpunkte eine Undulation haben.

Es fragt sich noch, zu welchen besondern Curven des Netzes die andern $2k$ Durchgänge der J Veranlassung geben?

Das Büschel von Curven mit $(k + 1)$-fachem Punkte, das im Netze enthalten ist, ist gegeben durch

$$\left[(\lambda_1 b_0 + \lambda_2 \beta_0 + \lambda_3 B_0) x_1^{k+1} + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 B_1) x_1^k x_2 + \cdots + (\lambda_1 b_{k+1} + \lambda_2 \beta_{k+1} + \lambda_3 B_{k+1}) x_3^{k+1}\right] x_3^{n-k-1} + \cdots = 0,$$

wobei

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Sollen von den $(k + 1)$ Tangenten 2 etwa in die Axe $x_2 = 0$ fallen, so muss man haben

$$\lambda_1 b_0 + \lambda_2 \beta_0 + \lambda_3 B_0 = 0,$$
$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 B_1 = 0$$

also überhaupt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_0 & \beta_0 & B_0 \\ b_1 & \beta_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_0-\beta_0 & \beta_0 & B_0-\beta_0 \\ b_1-\beta_1 & \beta_1 & B_1-b_1 \end{vmatrix} = (b_1-\beta_1)(B_0-\beta_0) - (b_0-\beta_0)(B_1-b_1) = 0.$$

Wenn also dieser Ausdruck verschwindet, so ist $x_2 = 0$ eine Rückkehrtangente, dann ist aber nach dem Obigen $x_2 = 0$ eine Tangente der J, also zeigt sich:

„Für ein Netz mit k-fachem Grundpunkt und k festen Tangenten hat die Jacobi'sche Curve im Grundpunkt noch einen $3k$-fachen Punkt. Sie berührt die k festen Tangenten und die diesen Durchgängen entsprechenden Curven des Netzes sind diejenigen, welche (allein im Netze) dort eine Undulation haben. Die $2k$ andern Durchgänge der Jacobi'schen entsprechen *den* $2k$ Individuen des Büschels mit $(k+1)$-fachem Punkte, für welche 2 der $(k+1)$ Tangenten zusammenfallen."

14) Ein besonderes Netz entsteht, wenn $k = n-1$ d. h. wenn die Curven einen $(n-1)$-fachen Grundpunkt haben. Ist dann wieder

$$C_1 = Ex_3 + L,$$
$$C_2 = Fx_3 + M,$$
$$C_3 = Gx_3 + N,$$

so hat die Jacobi'sche einen $3n-4$-fachen Punkt in diesem Grundpunkte. Irgend eine Gerade durch den Grundpunkt

$$x_2 = \varrho x_1$$

gehört dem Netz an, wenn

$$(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 \alpha_0 + \lambda_3 A_0) + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_3 A_1)\varrho + \cdots + (\lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 \alpha_{n-1} + \lambda_3 A_{n-1})\varrho^{n-1} = 0,$$
$$(\lambda_1 b_0 + \lambda_2 \beta_0 + \lambda_3 B_0) + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 B_1)\varrho + \cdots + (\lambda_1 b_n + \lambda_2 \beta_n + \lambda_3 B_n)\varrho^n = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man bei beliebig vorgegebenen ϱ im Allgemeinen die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ bestimmen, erhält also noch eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkt im Grundpunkte.

„Es gehört also jede Gerade durch den Grundpunkt dem Netze an, was auch geometrisch klar ist."

Tritt hier der Fall ein, dass auch noch die $(n-1)$ Tangenten fest sind, so erhält man zunächst für

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

ein Büschel von Curven n^{ter} Ordg., deren jede aus n Geraden durch den Grundpunkt besteht.

Ferner wird die Jacobi'sche

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(L-N)}{\partial x_1} & \frac{\partial(L-N)}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial(M-N)}{\partial x_1} & \frac{\partial(M-N)}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial N}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial N}{\partial x_2} & G \end{vmatrix} = 0,$$

oder $G = 0$ und

$$\left[\frac{\partial(L-N)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(M-N)}{\partial x_2} - \frac{\partial(L-N)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial(M-N)}{\partial x_1}\right] = 0.$$

„Die Jacobi'sche Curve zerfällt also in die $n-1$ festen Tangenten im Grundpunkt und in $2(n-1)$ andere Gerade. Diese letzteren sind, wie leicht zu erkennen, die Doppelstrahlen der $2(n-1)$ aus je $(n-1)$ Strahlen bestehenden Curven n^{ter} Ordnung des eben erwähnten Büschels."

II. Abschnitt.

Lineare Flächensysteme.

I.

Das Flächenbüschel.

1) Zwei Flächen n^{ter} Ordnung C_1 und C_2 haben den Coordinatenanfang als einfachen Punkt. Ihre Gleichungen sind

$$C_1 = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\,x_4^{n-1} + (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \cdots)\,x_3^{n-2} + \cdots,$$
$$C_2 = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3)\,x_4^{n-1} + (\beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \cdots)\,x_3^{n-2} + \cdots.$$

Bildet man aus beiden Flächen das Büschel

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_2)\,x_4^{n-1} + (\lambda_1 u_2 + \lambda_2 w_2)\,x_4^{n-2} + \cdots,$$

so bilden die Tangentialebenen an dessen Flächen ein Ebenenbüschel. Nimmt man irgend eine Gerade durch den Coordinatenanfang, etwa

$$x_2 = \varrho_2 x_1,$$
$$x_3 = \varrho_3 x_1,$$

so giebt es eine Fläche im Büschel, welche sie berührt und zwar bestimmt sich $\lambda_1 : \lambda_2$ aus der Gleichung:

$$\lambda_1(a_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3) + \lambda_2(\alpha_1 + \alpha_2\varrho_2 + \alpha_3\varrho_3) = 0.$$

Dagegen wird es im Allgemeinen keine Fläche im Büschel geben, welche auf dieser Geraden im Coordinatenanfange 3 unendlich benachbarte Punkte besitzt; soll diess der Fall sein, so müssen vielmehr gleichzeitig die Gleichungen erfüllt sein:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_2 = 0.$$

Daraus ergiebt sich die Kegelfläche

$$u_1 w_2 - w_1 u_2 = 0,$$

welche durch $u_1 = 0$, $w_1 = 0$ d. h. durch die Tangente im Punkte der Basiscurve des Büschels hindurchgeht, also:

„Die durch einen Punkt der Basiscurve eines Flächenbüschels hindurchgehenden Inflexionstangenten, d. h. die Geraden, welche mit den zugehörigen Flächen 3 Nachbarpunkte in diesem Punkte gemein haben, bilden einen Kegel 3ter Ordnung, der auch durch die Tangente an die Basiscurve hindurchgeht."

Da alle Tangentialebenen durch die Tangente an die Basiscurve gehen müssen, so sieht man, dass der Ebenenbüschel durch diese Tangente die je zusammengehörigen Paare von Inflexionstangenten ausschneidet.

Die 4 Tangentialebenen, welche durch die Tangente an den Kegel 3ter Ordnung gehen, liefern die 4 Flächen des Büschels, die in dem Punkte der Basiscurve parabolisch gekrümmt sind. Die Werthe des Parameterverhältnisses ergeben sich (aus dem Ausdruck für das Krümmungsmaass):

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_1 & \lambda_1 a_2 + \lambda_2 \alpha_2 & \lambda_1 a_3 + \lambda_2 \alpha_3 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_1 & 2(\lambda_1 b_{11} + \lambda_2 \beta_{11}) & 2(\lambda_1 b_{12} + \lambda_2 \beta_{12}) & 2(\lambda_1 b_{13} + \lambda_2 \beta_{13}) \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 \alpha_2 & 2(\lambda_1 b_{21} + \lambda_2 \beta_{21}) & 2(\lambda_1 b_{22} + \lambda_2 \beta_{22}) & 2(\lambda_1 b_{23} + \lambda_2 \beta_{23}) \\ \lambda_1 a_3 + \lambda_2 \alpha_3 & 2(\lambda_1 b_{31} + \lambda_2 \beta_{31}) & 2(\lambda_1 b_{23} + \lambda_2 \beta_{23}) & 2(\lambda_1 b_{33} + \lambda_3 \beta_{33}) \end{vmatrix} = 0.$$

„Durch einen Punkt der Basiscurve eines Flächenbüschels gehen im Allgemeinen (und höchstens) 4 Flächen, die in ihm parabolisch gekrümmt sind."

Im einfachsten Fall, für Flächen 2ter Ordnung, enthält der obige Kegel 3ter Ordnung die auf den Flächen des Büschels gelegenen Geraden, die gleichzeitig durch den Punkt der Basiscurve gehen. Der nämliche

Kegel projicirt aus dem Punkte die Basiscurve des Büschels. Die 4 parabolisch gekrümmten Flächen sind in diesem Falle für jeden Punkt der Basiscurve identisch mit den 4 im Büschel enthaltenen Kegeln.

Anmerkung. Auch hier liegt wieder die Frage nahe nach dem Orte, den die parabolischen Curven der Flächen eines Büschels $f + \lambda\varphi = 0$ überhaupt erfüllen. Ordnet man die Gleichung der Hesse'schen nach λ, so erhält man durch Elimination für diesen Ort die Gleichung:

$$\varphi^4 \cdot (f_{11}f_{22}f_{33}f_{44}) - \varphi^3 f \cdot \Sigma(fff\varphi) + \varphi^2 f^2 \Sigma(ff\varphi\varphi) - \varphi f^3 \Sigma(f\varphi\varphi\varphi) + f^4(\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}\varphi_{44}) = 0,$$

wo die Bedeutung der Summen ganz ähnlich wie in der Ebene.

Man sieht:

„Der Ort der parabolischen Curven der Flächen eines Büschels $f + \lambda\varphi = 0$ ist eine Fläche von der Ordnung $8(n-1)$. Die Basiscurve ist eine 4-fache Curve für dieselbe und in jedem Punkte derselben berühren sie diejenigen 4 Flächen, welche in diesem Punkte parabolisch gekrümmt sind." —

2) Ist der Coordinatenanfang für die beiden erzeugenden Flächen des Büschels und somit für alle ein k-facher Knoten, so dass

$$C_1 = u_k x_4^{n-k} + u_{k+1} x_4^{n-k-1} + \cdots + \mu_n,$$
$$C_2 = w_k x_4^{n-k} + w_{k+1} x_4^{n-k-1} + \cdots + \omega_n,$$

so erhält man ebenso wie vorhin den Kegel

$$u_k w_{k+1} - w_k u_{k+1} = 0,$$

der durch die Schnittgerade von $u_k = 0$ und $w_k = 0$ hindurchgeht.

„Die Geraden durch einen k-fachen Grundpunkt eines Flächenbüschels, welche mit den ihnen entsprechenden Flächen im Grundpunkt $k+2$ Nachbarpunkte gemein haben, bilden einen Kegel von der Ordnung $2k+1$, der auch die Geraden enthält, durch die sämmtliche Tangentenkegel im Grundpunkt hindurchgehen."

Auf diesem Kegel liegen dann noch in endlicher Anzahl Gerade, die $k+3$ Punkte mit den entsprechenden Flächen des Büschels gemein haben. —

Für das specielle Büschel, dessen Flächen im k-fachen Grundpunkte den *gleichen* Tangentenkegel besitzen, sodass

$$C_1 = u_k x_4^{n-k} + u_{k+1} x_4^{n-k-1} + \cdots + u_n,$$
$$C_2 = u_k x_4^{n-k} + w_{k+1} x_4^{n-k-1} + \cdots + w_n,$$

existirt eine Fläche im Büschel, nämlich $C_1 - C_2 = 0$, welche einen $k+1$-fachen Knoten im Anfang hat. Der obige Kegel zerfällt in den festen Tangentenkegel und in den Tangentenkegel $u_{k+1} - w_{k+1} = 0$ an diese ausgezeichnete Fläche. —

II.

Das allgemeine lineare Flächensystem.

3) Verwenden wir der Einfachheit wegen im Folgenden ein rechtwinkliges Coordinatensystem ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$). Sind ν Flächen n^{ter} Ordnung gegeben, je mit verschiedenen Tangentenkegeln k^{ter} Ordnung im Anfang, so soll $\Sigma \lambda_i C_i = 0$ ein $(\nu - 1)$-fach unendliches, lineares Flächensystem heissen. Eine allgemeine Fläche des Systems beginnt mit dem Term k^{ter} Ordnung:

$$\mathfrak{a}_0^{(0)} x^k + x^{k-1} \cdot (\mathfrak{a}_0^{(1)} y + \mathfrak{a}_1^{(1)} z) + \cdots + (\mathfrak{a}_0^{(k)} y^k + \mathfrak{a}_1^{(k)} y^{k-1} z + \cdots + \mathfrak{a}_k^{(k)} z^k),$$

der Term $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthält die Coefficienten $\mathfrak{b}_0^{(0)} \mathfrak{b}_0^{(1)} \cdots \mathfrak{b}_{k+1}^{(k+1)}$ u. s. f. endlich der Term von der Ordnung $k+\mu$ die Coefficienten $l_0^{(0)} l_0^{(1)} \cdots l_{k+\mu}^{(k+\mu)}$. Diese Coefficienten sind dann lineare Zusammensetzungen aus den entsprechenden Coefficienten von $C_1, \ldots C_\nu$. Ziehen wir nun in der $\overline{X}Y$-Ebene eine Gerade OA, welche mit der X-Axe den Winkel α einschliesst; in der durch OA und die Z-Axe bestimmten Ebene werde ferner eine Gerade gezogen, die mit OA den Winkel β bildet. Diese Gerade sei eine X'-Axe, während die Y'- und Z'-Axe des neuen, schiefwinkligen Coordinatensystems mit der Y- bezw. Z-Axe zusammenfallen mögen. Dann sind die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha \,.\, \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha \,.\, \cos\beta + y', \\ z &= x' \sin\beta + z', \end{aligned}$$

und es ist ferner

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{y}{z} \operatorname{tg}\beta = \sin\alpha; \quad \frac{x}{z} \operatorname{tg}\beta = \cos\alpha.$$

Führen wir jetzt die Transformation auf diess neue System durch und berechnen die Coefficienten von x'^k, $x'^{k+1} \ldots x'^{k+\mu}$, so werden diese, wie leicht zu sehen, wenn noch der erste mit $\cos^k\beta$, der zweite mit $\cos^{k+1}\beta \ldots$ u. s. f. dividirt wird:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{a}_0^{(0)} \cos^k\alpha + \mathfrak{a}_0^{(1)} \cos^{k-1}\alpha \cdot \sin\alpha + \mathfrak{a}_0^{(2)} \cos^{k-2}\alpha \cdot \sin^2\alpha \quad + \cdots + \mathfrak{a}_0^{(k)} \cdot \sin^k\alpha \\ &\quad + \mathfrak{a}_1^{(1)} \cos^{k-1}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \mathfrak{a}_1^{(2)} \cos^{k-2}\alpha \cdot \sin\alpha \operatorname{tg}\beta + \cdots + \mathfrak{a}_1^{(k)} \cdot \sin^{k-1}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \\ &\quad\quad + \mathfrak{a}_2^{(2)} \cos^{k-2}\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta \quad + \cdots + \vdots \\ &\quad\quad\quad

$$(2)\quad \begin{cases} b_0^{(0)}\cos^{k+1}\alpha + b_0^{(1)}\cdot\cos^k\alpha\cdot\sin\alpha + b_0^{(2)}\cdot\cos^{k-1}\alpha\cdot\sin^2\alpha \quad +\cdots+ b_0^{(k+1)}\cdot\sin^{k+1}\alpha \\ \quad + b_1^{(1)}\cdot\cos^k\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta \quad + b_1^{(2)}\cdot\cos^{k-1}\alpha\cdot\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \cdots + b_1^{(k+1)}\cdot\sin^k\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta \\ \qquad\qquad + b_2^{(2)}\cdot\cos^{k-1}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta \qquad\qquad + \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b_{k+1}^{(k+1)}\cdot\mathrm{tg}^{k+1}\beta. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung enthält die $l_0^{(0)} \ldots l_{k+\mu}^{(k+u)}$. Diess sind $\mu+1$ Ausdrücke. Nehmen wir an, dass $\nu = \mu+1$, so können wir sie $=$ Null setzen und die $\mu+1$ homogenen Parameter eliminiren. Entfernt man noch α unter Benutzung der Transformationsgleichungen, so giebt die Determinante einen Kegel von der Ordnung $\frac{(\mu+1)(2k+\mu)}{2}$. Eine Erzeugende dieses Kegels hat offenbar mit der zu ihr gehörigen Fläche des Systems $k+\mu+1$ consecutive Punkte im Grundpunkt gemein, daher das Theorem:

„In einem linearen, μ-fach unendlichen Flächensystem mit k-fachem Grundpunkt bilden die Geraden, die mit einer Fläche des Systems $k+\mu+1$ Nachbarpunkte im Grundpunkt gemein haben, eine Kegelfläche von der Ordnung $\frac{(\mu+1)(2k+\mu)}{2}$."

Für $\mu = 1$ erhält man das Büschel und den schon erwähnten Kegel von der Ordnung $2k+1$.

4) Bilden wir auch noch die Coefficienten von $x'^{k-1}y'$ und $x'^{k-1}z'$ in der transformirten Gleichung: Diese werden nach Division mit $\cos^{k-1}\beta$:

$$(3)\quad \begin{cases} a_0^{(1)}\cdot\cos^{k-1}\alpha + 2a_0^{(2)}\cdot\cos^{k-2}\alpha\cdot\sin\alpha + 3a_0^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\sin^2\alpha \quad +\cdots+ k a_0^{(k)}\cdot\sin^{k-1}\alpha \\ \quad + a_1^{(2)}\cdot\cos^{k-2}\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta + 2a_1^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \cdots + (k-1)a_1^{(k)}\cdot\sin^{k-2}\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta \\ \qquad\qquad + a_2^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta \quad +\cdots+ (k-2)a_2^{(k)}\cdot\sin^{k-3}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{k-1}^{(k)}\,\mathrm{tg}^{k-1}\beta \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} a_1^{(1)}\cdot\cos^{k-1}\alpha + a_1^{(2)}\cdot\cos^{k-2}\alpha\cdot\sin\alpha + a_1^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\sin^2\alpha \quad +\cdots+ a_1^{(k)}\cdot\sin^{k-1}\alpha \\ \quad + 2a_2^{(2)}\cdot\cos^{k-2}\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta + 2a_2^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \cdots + 2a_2^{(k)}\cdot\sin^{k-2}\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta \\ \qquad\qquad + 3a_3^{(3)}\cdot\cos^{k-3}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta \quad +\cdots+ 3a_3^{(k)}\cdot\sin^{k-3}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k a_k^{(k)}\cdot\mathrm{tg}^{k-1}\beta. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt die Ausdrücke (1), (3) und (4) je $=$ Null und nehmen wir an, wir hätten es mit einem Netze von Flächen zu thun, also mit dem System $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$, so können wir aus

diesen 3 Gleichungen λ_1, λ_2, λ_3 eliminiren und erhalten eine Determinante, deren erste Verticalreihe aus folgenden Gliedern besteht:

$$\begin{cases} a_0^{(0)}x^k + a_0^{(1)}x^{k-1}y + a_0^{(2)}x^{k-2}y^2 + \cdots + a_0^{(k)}y^k \\ \quad + a_1^{(1)}x^{k-1}z + a_1^{(2)}x^{k-2}yz + \cdots + a_1^{(k)}y^{k-1}z \\ \quad\quad + a_2^{(2)}x^{k-2}z^2 + \cdots + a_2^{(k)}y^{k-2}z^2 \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_k^{(k)}z^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0^{(1)}x^{k-1} + 2a_0^{(2)}x^{k-2}y + 3a_0^{(3)}x^{k-3}y^2 + \cdots + ka_0^{(k)}y^{k-1} \\ \quad + a_1^{(2)}x^{k-2}z + 2a_1^{(3)}x^{k-3}yz + \cdots + (k-1)a_2^{(k)}y^{k-2}z^2 \\ \quad\quad + a_1^{(3)}x^{k-3}z^2 + \cdots + (k-2)a_3^{(k)}y^{k-3}z^2 \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_{k-1}^{(k)}z^{k-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^{(1)}x^{k-1} + a_1^{(2)}x^{k-2}y + a_1^{(3)}x^{k-3}y^2 + \cdots + a_1^{(k)}y^{k-1} \\ \quad + 2a_2^{(2)}x^{k-2}z + 2a_2^{(3)}x^{k-3}yz + \cdots + 2a_2^{(k)}y^{k-2}z \\ \quad\quad + 3a_3^{(3)}x^{k-3}z^2 + \cdots + 3a_3^{(k)}y^{k-3}z^2 \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad + ka_k^{(k)}z^{k-1} \end{cases}$$

Die 2. Verticalreihe würde ebenso lauten in α, die dritte in A, wenn also vorausgesetzt wird, dass C_1 die a, C_2 die α, C_3 die A als Coefficienten enthält. — Aus diesem Kegel scheidet aber noch die Ebene $x = 0$ aus. Denn das von x freie Glied ergiebt sich als eine Determinante, deren erste Verticalreihe:

$$\begin{array}{l} a_0^{(k)}y^k + a_1^{(k)}y^{k-1}z + \cdots + a_k^{(k)}z^k \\ ka_0^{(k)}y^{k-1} + (k-1)a_1^{(k)}y^{k-1}z + \cdots + a_{k-1}^{(k)}z^{k-1} \\ a^{(k)}y^{k-1} + 2a_2^{(k)}y^{k-2}z + \cdots + ka_k^{(k)}z^{k-1} \text{ ist.} \end{array}$$

Entsprechend in den α und A lauten die 2. und 3. Verticalreihe. Multiplicirt man aber hier die 2. Horizontalreihe mit y und subtrahirt sie von der mit k multiplicirten ersten, so wird die oberste Horizontalreihe bis auf den Factor z der 3. gleich, also verschwindet die Determinante. Es folgt also:

„In einem Netze von Flächen mit k-fachem Grundpunkte giebt es noch einfach unendlich viele Flächen, deren Tangentenkegel im Grundpunkte eine Doppelerzeugende haben. Der Ort dieser Doppelerzeugenden ist ein Kegel von der Ordnung $3(k-1)$."

Speciell erhält man für $k = 2$:

„In einem Netze von Flächen, die im Grundpunkt sämmtlich einen conischen Knoten haben, sind noch einfach unendlich viele Flächen, die einen biplanaren Knoten besitzen. Die Axen dieser Knoten erfüllen einen Kegel von der 6ten Ordnung."

5) Setzen wir jetzt ein 3-fach unendliches Flächensystem

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_4 C_4 = 0$$

voraus, also ein sogenanntes Flächengebüsch und vergleichen die Ausdrücke (1), (2), (3) und (4) mit Null, so liefert die Eliminationsdeterminante einen Kegel von der Ordnung $4k - 1$; aus dem gleichen Grunde wie vorhin sondert sich aber auch hier wieder der Factor x ab, so dass ein Kegel von der Ordnung $4k - 2$ übrig bleibt.

Die Erzeugenden derselben haben nun folgende Eigenschaft:

1) Sie sind Doppelerzeugende der Tangentenkegel der zugehörigen Flächen des Gebüsches;
2) Sie haben mit dieser Fläche überdies $k + 2$ Nachbarpunkte im Grundpunkt gemein.

III.

Die Jacobi'sche Fläche von 4 Flächen.

6) Hat man 4 Flächen

$$C_1 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) x_4^{n-1} + (b_{11} x_1^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + \cdots) x_4^{n-2} + \cdots,$$
$$C_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) x_4^{n-1} + (\beta_{11} x_1^2 + 2 \beta_{12} x_1 x_2 + \cdots) x_4^{n-2} + \cdots,$$
$$C_3 = (A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3) x_4^{n-1} + (B_{11} x_1^2 + 2 B_{12} x_1 x_2 + \cdots) x_4^{n-2} + \cdots,$$
$$C_4 = (\mathsf{A}_1 x_1 + \mathsf{A}_2 x_2 + \mathsf{A}_3 x_3) x_4^{n-1} + (\mathsf{B}_{11} x_1^2 + 2 \mathsf{B}_{12} x_1 x_2 + \cdots) x_4^{n-2} + \cdots$$

die durch den Anfang einfach hindurchgehen, so ist in dem Gebüsch eine Fläche vorhanden, die einen Knoten im Anfang besitzt, in dem sich die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ aus den Gleichungen bestimmen lassen:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_3 A_1 + \lambda_4 \mathsf{A}_1 = 0,$$
$$\lambda_1 a_2 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 A_2 + \lambda_4 \mathsf{A}_2 = 0,$$
$$\lambda_1 a_3 + \lambda_2 \alpha_3 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 \mathsf{A}_3 = 0.$$

Die Jacobi'sche Fläche des Gebüsches ist dann bekanntlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_1} & \frac{\partial C_1}{\partial x_2} & \frac{\partial C_1}{\partial x_3} & \frac{\partial C_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x_1} & \frac{\partial C_2}{\partial x_2} & \frac{\partial C_2}{\partial x_3} & \frac{\partial C_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial C_3}{\partial x_1} & \frac{\partial C_3}{\partial x_2} & \frac{\partial C_3}{\partial x_3} & \frac{\partial C_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial C_4}{\partial x_1} & \frac{\partial C_4}{\partial x_2} & \frac{\partial C_4}{\partial x_3} & \frac{\partial C_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

und sie kann z. B. definirt werden als der Ort der Knoten die auf Flächen des Gebüsches noch vorhanden. Haben die 4 Flächen in *einem* Punkte einen k-fachen Knoten mit verschiedenen Tangentenkegeln, so ist bekannt, dass die Jacobi'sche Fläche in diesem Grundpunkt noch einen $4k-2$-fachen Knoten besitzt.

Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, wo die 4 Flächen einen einfachen Punkt im Coordinatenanfang besitzen. Dann kann man, ohne der Allgemeinheit Schaden zu thun, annehmen, dass

$$\begin{aligned}
C_1 &= x_1 \cdot x_4^{n-1} &&+ (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \cdots)x_4^{n-2} + \cdots,\\
C_2 &= x_2 \cdot x_4^{n-1} &&+ (\beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \cdots)x_4^{n-2} + \cdots,\\
C_3 &= x_3 \cdot x_4^{n-1} &&+ (B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + \cdots)x_4^{n-2} + \cdots,\\
C_4 &= (x_1+x_2+x_3)x_4^{n-1} &&+ (B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + \cdots)x_4^{n-2} + \cdots
\end{aligned}$$

und die Fläche des Gebüsches mit einem Knoten im Anfang ist

$$C_4 - C_1 - C_2 - C_3 = [(B_{11} - b_{11} - \beta_{11}B_{11})x_1^2 + \cdots]x_4^{n-2} + \cdots.$$

Bildet man aber für die obigen Gleichungen die Jacobi'sche Determinante, so zeigt ein Blick auf dieselbe, dass x_3 erst von der Potenz $4n-6$ an vorkommt und dass der bei x_4^{4n-6} stehende Factor derselbe ist wie der von x_4^{n-2} in der letzten Gleichung $C_4 - C_1 - C_2 - C_3 = 0$, also:

> „Die Jacobi'sche Fläche eines Gebüsches hat in einem einfachen Grundpunkt der erzeugenden Flächen einen gewöhnlichen Knoten, und der Tangentenkegel in ihm ist derselbe wie für die Fläche des Gebüsches, die in dem Grundpunkte einen Knoten hat."

Es fragt sich aber weiter, welche Singularität haben im allgemeinen Falle, d. h. bei einem k-fachen Grundpunkt, die Flächen des Gebüsches, wenn der Knoten in den k-fachen Grundpunkt rückt?

Denken wir uns die Gleichungen der 4 gegebenen Flächen in der Form wie in 4) geschrieben, nur homogen, und schreiben wir von der Jacobi'schen Determinante nur die Glieder an, welche in die höchste Potenz von x_1 multiplicirt sind, so werden die Glieder der ersten Horizontalreihe:

$$\begin{aligned}
&k a_0^{(0)} x_1^{k-1} x_4^{n-k} + (k+1) b_0^{(0)} x_1^k x_4^{n-k-1},\\
&a_0^{(1)} x_1^{k-1} x_0^{n-k} + b_0^{(1)} x_1^k x_4^{n-k-1},\\
&\alpha_1^{(1)} x_1^{k-1} x_4^{n-k} + b_1^{(1)} x_1^k x_4^{n-k-1},\\
&(n-k) a_0^{(0)} x_1^k x_4^{n-k-1} + (n-k-1) b_0^{(0)} x_1^{k+1} x_4^{n-k-2}.
\end{aligned}$$

Die 2., 3. und 4. Horizontalreihe lauten ebenso in den α, A, A. Dann übersieht man, dass x_4 erst von der Potenz $x_4^{4n-4k-2}$ an vorkommt und es wird überdies der Factor der bei der Potenz x_1^{4k-2} steht, bis auf einen Zahlencoefficient die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & b_0^{(0)} \\ \alpha_0^{(0)} & \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \beta_0^{(0)} \\ A_0^{(0)} & A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & B_0^{(0)} \\ \mathsf{A}_0^{(0)} & \mathsf{A}_0^{(1)} & \mathsf{A}_1^{(1)} & \mathsf{B}_0^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Denken wir uns jetzt eine der Erzeugenden des in 5) gefundenen Kegels als Axe $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gewählt, so muss für diese Wahl des Coordinatensystems eine Fläche im Gebüsch existiren, für welche

$$a_0^{(0)} = 0, \quad a_0^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(0)} = 0.$$

Es ist dann, da die obige Determinante verschwindet, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ auch eine Erzeugende des Tangentenkegels der Jacobi'schen Fläche und es folgt also:

„Der Tangentenkegel der Jacobi'schen Fläche in einem k-fachen Grundpunkt der 4 erzeugenden Flächen ist von der Ordnung $4k - 2$ und hat folgende Eigenschaft: Jeder seiner Erzeugenden entspricht eine Fläche des Gebüsches, für deren Tangentenkegel im k-fachen Grundpunkt diese Erzeugende eine Doppelgerade und diese Erzeugende hat ferner mit der zugehörigen Fläche des Systems $k + 2$ Nachbarpunkte im Grundpunkt gemein. Die auf diese Weise bestimmten Flächen des Systems sind die einzigen, welche diese Singularität in dem Grundpunkt besitzen."

Für $k = 2$ zerfällt natürlich der Tangentenkegel in ein Ebenenpaar und der Tangentenkegel der Jacobi'schen Fläche in einem conischen Grundpunkt wird also erfüllt von den Axen aller biplanaren Knoten, die im Gebüsch enthalten sind und die gleichzeitig 4 Punkte mit der zugehörigen Fläche im Grundpunkt gemein haben.

7) Die Fälle $k = n - 2$ und $k = n - 1$ geben zu folgender Bemerkung Veranlassung. Für $k = n - 2$ enthält die allgemeine Fläche des Gebüsches 3 Terme, die bezw. vom Grade $n - 2$, $n - 1$ und n in $x_1 x_2 x_3$ sind. Setzt man $x_2 = \varrho_2 x_1$ uud $x_3 = \varrho_3 x_1$, wo ϱ_2 und ϱ_3 beliebig vorgegebene Zahlen sind, so kann man die Parameter immer noch so bestimmen, dass die Flächengleichung durch diese Substitution erfüllt wird, also folgt:

„In einem Flächengebüsch mit $(n-2)$-fachem Grundpunkt giebt es immer noch eine Fläche (im allgemeinen Fall) welche eine beliebige Gerade durch den Grundpunkt ganz enthält."

Ferner folgt für $k = n - 1$ auf ganz ähnliche Weise:

„In einem Flächengebüsch mit $(n-1)$-fachem Grundpunkt giebt es noch ein Büschel von Flächen, welche eine beliebige Gerade durch den Grundpunkt ganz enthalten,

Unter diesen befinden sich zwei, welche auf dieser Geraden noch einen gewöhnlichen Knoten besitzen, entsprechend den 2 übrigen Schnittpunkten der Geraden mit der Jacobi'schen Fläche."

8) Die Singularität der Jacobi'schen Fläche in einem Grundpunkte erhöht sich, wenn die sämmtlichen Flächen (mit Ausnahme der eines Büschels) in dem k-fachen Grundpunkt den nämlichen Tangentenkegel besitzen. Setzt man unter dieser Voraussetzung in der Jacobi'schen Determinante die α, A, A gleich den a, so kömmt erst $x_4^{4n-4k-4}$ in der Gleichung vor und der Factor von x_1^{4k} wird bis auf einen Zahlencoefficient:

$$a_0^{(0)} \cdot \begin{vmatrix} \beta_0^{(0)} - b_0^{(0)} & B_0^{(0)} - b_0^{(0)} & \mathsf{B}_0^{(0)} - b_0^{(0)} \\ \beta_0^{(1)} - b_0^{(1)} & B_0^{(1)} - b_0^{(1)} & \mathsf{B}_0^{(1)} - b_0^{(1)} \\ \beta_1^{(1)} - b_1^{(1)} & B_1^{(1)} - b_1^{(1)} & \mathsf{B}_1^{(1)} - b_1^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Denken wir uns das Coordinatensystem so gewählt, dass die Axe $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ auf dem festen Kegel k^{ter} Ordnung liegt, so ist $a_0^{(0)} = 0$ zu setzen. Dann verschwindet auch der vorige Factor, d. h. die gleiche Linie gehört auch dem Tangentenkegel der Jacobi'schen Fläche an.

Ferner ist in diesem Falle in dem Gebüsche ein Netz von Flächen enthalten (für $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$), die einen $(k+1)$-fachen Knoten im Grundpunkt besitzen. Nach 4) giebt es dann in diesem Netz einen Kegel von der Ordnung $3k$, dessen Erzeugende für die Tangentenkegel der zugehörigen Flächen Doppelgerade sind. Stellen wir uns vor, dass die Axe $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Coordinatensystems auf diesem Kegel liegend angenommen wäre, so müsste es ein System der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ geben, derart, dass

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0, \\ b_0^{(0)}\lambda_1 + \beta_0^{(0)}\lambda_2 + B_0^{(0)}\lambda_3 + \mathsf{B}_0^{(0)}\lambda_4 &= 0, \\ b_0^{(1)}\lambda_1 + \beta_0^{(1)}\lambda_2 + B_0^{(1)}\lambda_3 + \mathsf{B}_0^{(1)}\lambda_4 &= 0, \\ b_1^{(1)}\lambda_1 + \beta_1^{(1)}\lambda_2 + B_1^{(1)}\lambda_3 + \mathsf{B}_1^{(1)}\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus

$$\begin{vmatrix} \beta_0^{(0)} - b_0^{(0)} & B_0^{(0)} - b_0^{(0)} & \mathsf{B}_0^{(0)} - b_0^{(0)} \\ \beta_0^{(1)} - b_0^{(1)} & B_0^{(1)} - b_0^{(1)} & \mathsf{B}_0^{(1)} - b_0^{(1)} \\ \beta_1^{(1)} - b_1^{(1)} & B_1^{(0)} - b_1^{(1)} & \mathsf{B}_1^{(1)} - b_1^{(1)} \end{vmatrix} = 0;$$

also ist $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ dann auch Erzeugende des Tangentenkegels der Jacobi'schen Fläche. Also:

„Für ein Gebüsch von Flächen mit k-fachem Grundpunkt und gleichem Tangentenkegel in ihm hat die Jacobi'sche Fläche in diesem Grundpunkte einen $4k$-fachen Punkt. Ihr Tangentenkegel zerfällt in den festen Tangentenkegel und in einen Kegel von der Ordnung $3k$. Der letztere ergiebt

sich aus dem, in dem Gebüsch enthaltenen, Netz von Flächen mit $(k+1)$-fachem Knoten als der Ort der Doppelgeraden von Tangentenkegeln von Flächen des Netzes."

Ist endlich hier $k = n - 1$, also

$$C_1 = Gx_4^{n-1} + H,$$
$$C_2 = Gx_4^{n-1} + I,$$
$$C_3 = Gx_4^{n-1} + K,$$
$$C_4 = Gx_4^{n-1} + L,$$

so zerfällt die Jacobi'sche Fläche in $G = 0$ und in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(I-H)}{\partial x_1} & \frac{\partial(I-H)}{\partial x_2} & \frac{\partial(I-H)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(K-H)}{\partial x_1} & \frac{\partial(K-H)}{\partial x_2} & \frac{\partial(K-H)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(L-H)}{\partial x_1} & \frac{\partial(L-H)}{\partial x_2} & \frac{\partial(L-H)}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

„Für einen $(n-1)$-fachen Grundpunkt eines Gebüsches mit festem Tangentenkegel zerfällt die Jacobi'sche Fläche in diesen festen Kegel und in einen Kegel von der Ordnung $3(n-1)$, welch' letzterer wie folgt, entsteht. In dem Gebüsch ist ein Netz von Kegeln n^{ter} Ordnung enthalten; in diesem giebt es noch einfach unendlich viele, welche eine Doppelerzeugende besitzen. Der Kegel ist der Ort dieser Doppelerzeugenden."

München, Februar 1892.

Ueber die Reduction eines Problems der Dynamik auf hyperelliptische Integrale.

Von

Paul Stäckel in Halle.

1. Ist ein materieller Punkt gezwungen, sich auf einer Rotationsfläche zu bewegen, deren Gleichung durch Einführung geeigneter rechtwinkliger Coordinaten x, y, z auf die Form

$$f(x^2+y^2, z) = 0 \tag{1}$$

gebracht sei, und existirt für die Bewegung eine Kräftefunction U, welche in den Parallelkreisen constant ist, so lässt sich nach Jacobi (Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 24, S. 5–27 (1842)) die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in folgender Weise auf Quadraturen zurückführen. Drückt man $x^2 + y^2 = r^2$ und z durch eine Hilfsveränderliche u so aus, dass die Gleichung (1) identisch erfüllt ist, wobei U in eine Function von u allein übergeht, so ist die Lage des bewegten Punktes zur Zeit t bestimmt, wenn man als Functionen der Zeit ausser u den Winkel ϑ kennt, den die Meridianebene des bewegten Punktes mit der xz-Ebene bildet, und dies leisten, falls die Masse des Punktes gleich Eins gesetzt wird, die Gleichungen:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \alpha \int_{u_0}^{u} \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}{2r^2(U+\beta) - \alpha^2}}\, du, \tag{2}$$

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} r \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}{2r^2(U+\beta) - \alpha^2}}\, du, \tag{3}$$

in denen die Anfangswerthe den Index Null erhalten haben, während α und β willkürliche Constanten von leicht angebbarer mechanischer Bedeutung bezeichnen.

Als einfachste Beispiele solcher Bewegungen, deren allgemeine Theorie ich in Abschnitt IV bis VI meiner Inauguraldissertation (Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, Berlin 1885) behandelt

habe, bieten sich diejenigen dar, bei denen die auftretenden Integrale hyperelliptische sind. Dabei macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die betrachtete Bewegung nur bei besonderer Wahl der Anfangsbedingungen solche Integrale ergiebt, oder ob dies stattfindet, wie auch die Anfangsbedingungen gewählt sein mögen. Nur dieser Fall soll hier betrachtet werden, und der Ausspruch, *die Jacobi'sche Bewegung auf einer Rotationsfläche ergebe hyperelliptische Integrale*, soll gleichbedeutend sein mit dem, dass die Integrale (2) und (3) bei willkürlichen Werthen von α und β hyperelliptische sind.

Im Folgenden wird die Frage, wie beschaffen eine Rotationsfläche sein muss, damit bei geeigneter Wahl der Kräftefunction die zugehörige Jacobi'sche Bewegung hyperelliptische Integrale ergiebt, zuerst allgemein, dann unter besonderen Annahmen über die Fläche, über die Kräftefunction und über die Natur der hyperelliptischen Integrale behandelt werden. Für den Specialfall, dass die Rotationsfläche algebraisch, die Kräftefunction eine rationale Function von r^2 und z, die Integrale (2) und (3) elliptische sind, liegt bereits eine Untersuchung von Herrn G. Kobb vor (Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution, Acta Mathematica, Bd. X, S. 89—108 (1887)), deren Resultate jedoch der Berichtigung bedürftig sind, worauf zurückzukommen später Gelegenheit sein wird.

2. Um zu untersuchen, ob die Integrale (2) und (3) hyperelliptische sind, erweist es sich als zweckmässig, statt der Grösse r ihr Quadrat einzuführen. Wird demgemäss $r^2 = \mathfrak{r}$ eingeführt, so ergiebt sich:

$$(3') \qquad t - t_0 = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{\left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)^2 + 4\mathfrak{r}\left(\frac{dz}{du}\right)^2}{2\mathfrak{r}(U+\beta) - \alpha^2}}\, du.$$

Dass dieses Integral hyperelliptisch ist, heisst nichts anderes, als dass die Gleichung besteht:

$$(4) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)^2 + 4\mathfrak{r}\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathfrak{R}(u)\left(2\mathfrak{r}(U+\beta) - \alpha^2\right),$$

in welcher das Zeichen $\mathfrak{R}$, wie stets im Folgenden, eine rationale Function des beigeschriebenen Arguments bedeutet. Da diese Gleichung bei willkürlichem α und β gelten soll, und da U, $\mathfrak{r}$ und z nur von u, nicht von α und β abhängen, so folgt aus (4):

$$(5) \qquad 0 = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha^2}\left(2\mathfrak{r}(U+\beta) - \alpha^2\right) - \mathfrak{R}(u),$$

und weil auch $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha^2}$ eine rationale Function von u ist, so muss:

$$(6) \qquad 2\mathfrak{r}(U+\beta) - \alpha^2 = \mathfrak{R}_0(u)$$

sein. Wird diese Gleichung partiell nach β differentiirt, so kommt:

(7) $$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial \beta} = \mathfrak{R}_1(u),$$

so dass in Folge von (6) auch:

(8) $$U = \mathfrak{R}_3(u)$$

sein muss, während man aus (4), (6) und (7) erschliesst, dass:

(9) $$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathfrak{R}_2(u),$$

mithin

(10) $$z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du$$

ist. Da aber, wie leicht einzusehen, umgekehrt, sobald die Gleichungen (7), (10) und (8) für $\mathfrak{r}$, z und U bestehen, die Integrale (2) und (3) hyperelliptische sind, so ist das Ergebniss gewonnen:

Satz I. Damit die Jacobi'sche Bewegung auf einer Rotationsfläche hyperelliptische Integrale ergiebt, ist es nothwendig und hinreichend, dass es möglich ist, die Gleichung der Rotationsfläche

$$f(x^2+y^2, z) = 0$$

identisch durch

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du$$

zu befriedigen, und dass beim Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kräftefunction $U(x^2+y^2, z)$

$$U = \mathfrak{R}_3(u)$$

erhalten wird.

3. Ist die Rotationsfläche *algebraisch*, so ist z vermöge

$$f(x^2 + y^2, z) = 0$$

eine algebraische Function von r, also, wenn $r^2 = \mathfrak{R}_1(u)$ ist, auch von u, mithin:

$$z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du$$

algebraisch ausführbar, und daher, wie man aus einem bekannten Theorem von Abel sofort erkennt, z abgesehen von der Integrationsconstanten gleich der Quadratwurzel aus einer rationalen Function von u. Da aber die Wahl des Anfangspunktes in der Rotationsaxe willkürlich ist, so ist man berechtigt zu sagen:

Satz II. Alle *algebraischen* Rotationsflächen, bei denen eine Jacobi'sche Bewegung auf hyperelliptische Integrale führt, werden erhalten, wenn man:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z^2 = \overline{\mathfrak{R}}_2(u)$$

setzt, oder, was dasselbe ist, wenn zwischen $x^2 + y^2$ und z^2

irgend eine algebraische Gleichung vom Geschlechte Null besteht. Es ergeben sich jedesmal dann hyperelliptische Integrale, wenn die Kräftefunction U so gewählt wird, dass sie dabei in eine rationale Function von u übergeht.

4. Als zweite besondere Annahme werde die eingeführt, dass die Kräftefunction U *algebraisch* ist, dass also eine algebraische Gleichung der Form:

$$\Omega(U, x^2+y^2, z) = 0 \tag{11}$$

besteht. Werden hierin für $x^2 + y^2$ und U ihre Ausdrücke aus (7) und (8) eingesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$\omega(u, z) = 0, \tag{12}$$

welche jedenfalls wieder algebraisch ist. Kommt z in $\omega(u, z)$ nicht vor, so darf $\omega(u, z)$ auch u nicht enthalten, es muss also durch Einsetzen der Ausdrücke für $x^2 + y^2$ und U die Gleichung $\Omega = 0$ identisch erfüllt werden. In diesem Falle lässt sich aus der Existenz einer solchen Relation zwischen U, $x^2 + y^2$, z nichts erschliessen, es ist daher, wie in dem allgemeinen Falle:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du, \quad U = \mathfrak{R}_3(u).$$

Wenn dagegen z in $\omega(u, z)$ wirklich enthalten ist, so wird z durch $\omega = 0$ als algebraische Function von u definirt, und dann ergiebt die beim Beweise von Satz II angewandte Schlussweise, dass:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z^2 = \overline{\mathfrak{R}}_2(u)$$

ist.

Als Beispiel für die erste Möglichkeit, dass $\omega = 0$ identisch besteht, kann die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche dienen, wenn keine wirkenden Kräfte vorhanden sind, mithin die Kräftefunction constant ist. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich dann die Richtigkeit folgenden Satzes:

Satz III. Alle *Rotationsflächen*, welche die Eigenschaft haben, dass die Ermittelung ihrer *geodätischen Linien* auf *hyperelliptische Integrale* führt, werden erhalten, wenn man:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du$$

setzt; alle *algebraischen* Rotationsflächen derselben Beschaffenheit ergeben sich vermöge:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z^2 = \overline{\mathfrak{R}}_2(u).$$

Die zweite Möglichkeit, dass $\omega(u, z)$ die Grösse z wirklich enthält, wird erläutert durch die Bewegung eines *schweren* Punktes auf einer Rotationsfläche, deren Axe verticale Richtung hat. Auf diese Be-

wegung bezieht sich eine Abhandlung von Herrn Staude (Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche, Acta Mathematica Bd. XI, S. 303—332 (1888)), der auch einige auf hyperelliptische Integrale führende Fälle dieser Bewegung erwähnt. Die Frage, wann überhaupt hyperelliptische Integrale auftreten, lässt sich auf Grund der hier entwickelten Sätze leicht beantworten. Es ist:

$$U = gz = \mathfrak{R}_3(u),$$

folglich:

$$z = \frac{1}{g}\mathfrak{R}_3(u) = \mathfrak{R}_4(u),$$

und daher gilt der Satz:

Satz IV. Alle *Rotationsflächen* bei denen *die Jacobi'sche Bewegung eines schweren Punktes* auf *hyperelliptische Integrale* führt, sind algebraisch. Sie werden erhalten, wenn:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z = \mathfrak{R}_4(u)$$

gesetzt wird, oder, was dasselbe ist, wenn zwischen $x^2 + y^2$ und z eine algebraische Gleichung vom Geschlechte Null besteht.

5. Drittens soll über das Geschlecht der hyperelliptischen Integrale (2) und (3) eine besondere Annahme gemacht werden, nämlich die, dass das Geschlecht dieser beiden Integrale, welches augenscheinlich immer dasselbe ist, eine bestimmte Zahl ϱ nicht überschreite. Ist dies der Fall, so muss sich der oben in (4) mit $\mathfrak{R}(u)$ bezeichnete Ausdruck auf die Form:

$$\mathfrak{R}(u) = \overline{\mathfrak{R}}^2(u) \,.\, G(u) \tag{13}$$

bringen lassen, wo $G(u)$ eine ganze Function von u höchstens vom Grade $2\varrho + 2$ bezeichnet, die nur einfache Linearfactoren besitzt.

Um zu ermitteln, wann dies geschieht, werde gesetzt:

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u) = \frac{G_0(u)\,G_1(u)}{G_2(u)}, \quad U = \mathfrak{R}_3(u) = \frac{G_3(u)}{G_0(u)\,G_4(u)}, \tag{14}$$

und zwar sollen G_0 bis G_4 ganze Functionen von u beziehungsweise von dem Grade $\varkappa_0$ bis $\varkappa_4$ bezeichnen, und es sollen, was unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden darf, je $G_0.G_1$ und G_2, G_3 und $G_0.G_4$, G_1 und G_4 keinen gemeinschaftlichen Theiler mit einander haben. Hieraus ergiebt sich:

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{G_4}{2G_2^3}\,\frac{\left(G_2\frac{d(G_0G_1)}{du} - G_0G_1\frac{dG_2}{du}\right)^2 + 4G_0G_1G_2^2\mathfrak{R}_2(u)}{G_1G_3 + \beta G_0G_1G_4 - \frac{1}{2}\alpha^2G_2G_4}. \tag{15}$$

Die ganze Function von u:

$$\Gamma(u) = G_1G_3 + \beta G_0G_1G_4 - \tfrac{1}{2}\alpha^2G_2G_4 \tag{16}$$

hat mit den anderen in $\mathfrak{R}(u)$ auftretenden ganzen Functionen von u keinen gemeinschaftlichen Theiler, denn ein solcher Theiler müsste von α und β unabhängig sein, wäre also in G_1G_3, $G_0G_1G_4$, G_2G_4 gleichzeitig enthalten, während nach den Voraussetzungen über die Functionen G_0 bis G_4 kein gemeinschaftlicher Theiler dieser drei Ausdrücke vorhanden ist. Aber auch mit $\frac{d\Gamma(u)}{du}$ hat $\Gamma(u)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler. Denn wenn für einen Werth u_1 von u gleichzeitig $\Gamma(u)$ und $\frac{d\Gamma(u)}{du}$ verschwänden, so würden auch die Ausdrücke:

$$\Gamma(u)\cdot\frac{d(G_2G_4)}{du}-G_2G_4\frac{d\Gamma(u)}{du}$$

und:

$$\Gamma(u)\cdot\frac{d(G_0G_1G_4)}{du}-G_0G_1G_4\frac{d\Gamma(u)}{du}$$

für $u=u_1$ verschwinden müssen, folglich wäre u_1 unabhängig von α und von β, also auch der gemeinsame Theiler von $\Gamma(u)$ und seiner Ableitung. Das ist aber unmöglich, denn $\Gamma(u)$ hat keinen von α und β unabhängigen Theiler.

Hieraus folgt, dass in:

$$\mathfrak{R}(u)=\overline{\mathfrak{R}}^2(u)\,G(u) \tag{13}$$

$\Gamma(u)$ ganz als Bestandtheil von $G(u)$ eintritt:

$$\mathfrak{R}(u)=\overline{\mathfrak{R}}^2(u)\,\Gamma(u)\,\bar{\Gamma}(u); \tag{13'}$$

ist also k der Grad von $\Gamma(u)$, so darf $\bar{\Gamma}(u)$ höchstens vom Grade $2\varrho+2-k$ sein. Da weiter α und β willkürliche Constanten sind, so darf der Grad keines der drei Producte G_1G_3, $G_0G_1G_4$, G_2G_4 die Grenze $2\varrho+2$ übersteigen, mithin muss

$$\varkappa_1+\varkappa_3\leqq 2\varrho+2,\quad \varkappa_0+\varkappa_1+\varkappa_4\leqq 2\varrho+2,\quad \varkappa_2+\varkappa_4\leqq 2\varrho+2 \tag{17}$$

sein. Hiermit aber ist folgender Satz gewonnen:

Satz V. Damit das Geschlecht der Integrale (2) und (3) die Zahl ϱ nicht überschreite, müssen G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 ganze Functionen von u sein, welche den Bedingungen (17) genügen. Ist dann $\Gamma(u)$ vom Grade k, so muss:

$$\mathfrak{R}_2(u)=\frac{2G_2^3R^2(u)\bar{\Gamma}(u)-G_4\left(G_2\frac{d(G_0G_1)}{du}-G_0G_1\frac{dG_2}{du}\right)^2}{4G_0G_1G_2^3G_4} \tag{18}$$

sein, hierbei ist $R(u)$ eine beliebige rationale Function von u und $\bar{\Gamma}(u)$ eine beliebige ganze Function vom Grade $2\varrho+2-k$.

Hat man die Functionen G_0 bis G_4, $\bar{\Gamma}(u)$, $R(u)$ in dieser Weise angenommen, so wird die zugehörige Rotationsfläche durch

$$x^2 + y^2 = \frac{G_0 G_1}{G_2}, \quad z = \int \sqrt{\mathfrak{R}_2(u)}\, du \tag{19}$$

dargestellt. Diese Fläche wird im allgemeinen transcendent sein; sie wird algebraisch, wenn sich aus (19)

$$z^2 = \mathfrak{R}_2(u)$$

ergiebt. Die allgemeinste Form der in Gleichung (18) auftretenden Functionen anzugeben, welche bewirkt, dass die Fläche algebraisch wird, scheint erhebliche Schwierigkeiten zu haben.

Zum Schluss sollen die gewonnenen Resultate auf einige Specialfälle angewandt werden.

6. Wird für ϱ der specielle Werth 1 angenommen, so dass die Integrale (2) und (3) elliptische werden, so gilt Satz II, wenn man hinzufügt, dass in:

$$\mathfrak{R}(u) = \mathfrak{R}^2(u) \,.\, G(u)$$

$G(u)$ höchstens vom Grade 4 ist.

Herr Kobb nimmt (a. a. O. S. 91) zu den Voraussetzungen des Satzes II noch die weitere hinzu, dass die Kräftefunction U eine rationale Function von $x^2 + y^2$ und z ist, und bedient sich, um zu ermitteln, wann elliptische Integrale erhalten werden, einer anderen Untersuchungsmethode als im Vorhergehenden angewandt wurde. Er erhält das Resultat, dass z selbst eine rationale Function von u sein muss. Freilich ist sein Verfahren nur in diesem besonderen Falle brauchbar. Es wird von ihm

$$\frac{r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]}{2r^2(U+\beta) - \alpha^2} = \xi^2$$

gesetzt, und diese Gleichung combinirt mit (1) und

$$\frac{\partial f}{\partial z} + 2r \frac{\partial f}{\partial r^2} \frac{dr}{dz} = 0.$$

Durch Elimination von r und $\frac{dr}{dz}$ ergiebt sich hieraus eine algebraische Gleichung zwischen ξ und z, deren Geschlecht gleich Eins sein muss, wenn das Integral:

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} \xi\, dz$$

ein elliptisches sein soll. Aus dieser Bedingung wird durch eine längere algebraisch-functionentheoretische Untersuchung erschlossen, dass (a. a. O. S. 107)

$$x^2 + y^2 = \mathfrak{R}_1(u), \quad z = \mathfrak{R}_4(u)$$

sein muss, wo $\mathfrak{R}_1(u)$ und $\mathfrak{R}_4(u)$ wieder der Bedingung zu genügen haben, dass $G(u)$ höchstens vom vierten Grade ist.

Dieses Resultat ist jedoch nur mit einer Einschränkung bewiesen, die hinzuzufügen Herr Kobb unterlassen hat. Damit die Seite 93 angewandte Schlussweise richtig ist, darf die Rotationsfläche kein Cylinder sein, und dieser Ausnahmefall erfordert eine besondere Untersuchung. Man überzeugt sich leicht, dass für den Cylinder der Satz von Herrn Kobb nicht gilt. Ist nämlich r constant, so werden $t - t_0$ und $\vartheta - \vartheta_0$ proportional dem Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{U+\gamma}};$$

U ist eine rationale Function von z, γ eine willkürliche Constante. Soll dieses Integral elliptisch sein, so ist nothwendig nach Satz II:

$$z^2 = \mathfrak{R}_2(u), \quad U(z) = \mathfrak{R}_3(u).$$

Dass es aber Fälle giebt, in denen erst das *Quadrat* von z eine rationale Function von u ist, zeigt folgendes einfache Beispiel. Ist $U = z^6$, so erhält man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^6+\gamma}},$$

ein Integral, welches für:

$$z^2 = u, \qquad U = u^3$$

in ein *elliptisches* Integral, nämlich

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u(u^3+\gamma)}},$$

übergeht, was durch eine Substitution

$$z = \mathfrak{R}_4(u)$$

niemals zu erreichen ist.

7, Der zweite Specialfall sei der schon oben herangezogene, dass keine wirkenden Kräfte vorhanden sind, so dass $U = 0$ zu setzen ist. Mithin wird:

$$G_0 = 1, \quad G_3 = 0, \quad G_4 = 1,$$

und es ist:

$$\Gamma(u) = \beta G_1 - \frac{1}{2}\alpha^2 G_2, \tag{16'}$$

$$\mathfrak{R}_2(u) = \frac{2G_2^3 R^2(u)\,\Gamma(u) - \left(G_2\frac{dG_1}{du} - G_1\frac{dG_2}{du}\right)^2}{4G_1G_2^3}. \tag{18'}$$

Nimmt man noch $\varrho = 1$ an, so ergiebt sich folgender Satz:

Satz VI. Alle Rotationsflächen, bei denen die Ermittelung der geodätischen Linien auf elliptische Integrale führt, erhält man, indem man setzt:

$$x^2+y^2=\frac{G_1(u)}{G_2(u)},\quad z=\int\sqrt{\frac{2G_2^3R^2(u)\bar{\Gamma}(u)-\left(G_2\frac{dG_1}{du}-G_1\frac{dG_2}{du}\right)^2}{4G_1G_2^3}}\,du;$$

dabei sind $G_1(u)$ und $G_2(u)$ beliebige ganze Functionen von u höchstens vom Grade 4, $\bar{\Gamma}(u)$ vom Grade $4-k$, wenn k den Grad von $\beta G_1-\frac{1}{2}\alpha^2 G_2$ bedeutet; endlich ist $R(u)$ eine ganz willkürliche rationale Function von u.

Die Flächen, welche man vermöge dieses Satzes erhält, sind im allgemeinen transcendent. Ein einfaches Beispiel einer *transcendenten* Rotationsfläche, bei welcher die Ermittelung der geodätischen Linien nur elliptische Integrale erfordert, ist die Fläche:

$$x^2+y^2=u^2,\quad z=\int\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}+\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right);$$

denn es ergiebt sich:

$$(2'')\qquad \vartheta-\vartheta_0=\alpha\int_{u_0}^{u}\frac{1}{u}\sqrt{\frac{2+u^2}{2\beta u^2-\alpha^2}}\,du,$$

$$(3'')\qquad t-t_0=\int_{u_0}^{u}u\cdot\sqrt{\frac{2+u^2}{2\beta u^2-\alpha^2}}\,du.$$

In dem Theorem von Herrn Kobb (a. a. O. S. 107):

„Toutes les surfaces de révolution, qui ont la propriété, que les coordonnées d'une ligne géodésique peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramêtre, sont nécessairement de la forme:

$$r^2=\mathfrak{R}_1(u),\quad z=\mathfrak{R}_4(u)$$"

ist daher hinter „surfaces" algébriques zu ergänzen.

8. Endlich möge der wiederholt erwähnte Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche auf Grund der in 5 gewonnenen Sätze noch einmal erörtert werden. Da:

$$U=gz,$$

also:

$$(14')\qquad z=\frac{1}{g}\cdot\frac{G_3(u)}{G_0(u)\,G_4(u)}$$

ist, so folgt aus Satz V das bemerkenswerthe Theorem:

Satz VII. Soll die Jacobi'sche Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche auf hyperelliptische Integrale führen, deren Geschlecht ϱ ist, so muss nothwendig

$$x^2+y^2=\frac{G_0(u)\,G_1(u)}{G_2(u)},\quad z=\frac{G_3(u)}{G_0(u)\,G_4(u)}$$

sein, wo G_0 bis G_4 ganze Functionen von u sind, deren Grad die Zahl $2\varrho + 2$ nicht übersteigt.

Für $\varrho = 1$ ist die Endlichkeit der Anzahl der zugehörigen algebraischen Flächen bereits von Herrn Kobb (a. a. O. S. 108), allerdings ohne Beweis, behauptet worden. Dort heisst es:

> L'intégration peut être effectuée par des fonctions elliptiques, si la surface est déterminée par une de ces cinq équations..., ce sont les seuls cas possibles.

Diese fünf Flächen von Herrn Kobb ergeben sich, wenn G_0, G_2, G_4 gleich Eins und G_1, G_3 gleich folgenden Ausdrücken gesetzt werden:

	$\mathfrak{r} = x^2+y^2 = G_1(u)$	$z = G_3(u)$	
(1)	$4au$	u	$x^2+y^2 = 4az$,
(2)	m^2u^2	u	$x^2+y^2 = m^2z^2$,
(3)	a^2-u^2	u	$x^2+y^2 = a^2-z^2$,
(4)	$3a^2u(u-1)^2$	$3au$	$9a(x^2+y^2) = z(z-3a)^2$,
(5)	a^2u_1	$a\left(u^2+\frac{3}{2}u\right)$	$(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}a^2(x^2+y^2) = a^3z$.

Eine genaue Prüfung zeigt indess, dass das Verzeichniss von Herrn Kobb unvollständig ist, denn auch die Annahme:

$$(6)\quad au^2 + a^{\frac{3}{2}}u + \tfrac{1}{2}a^2 \qquad u^2 \qquad \left(x^2+y^2-az-\tfrac{1}{2}a^2\right)^2 = a^3z,$$

welche in den fünf vorhergehenden nicht enthalten ist, führt auf elliptische Integrale.

Fügt man zu diesen 6 Flächen noch die Ebene und den Kreiscylinder hinzu, welche auf Kreisfunctionen führen, so lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass diese acht Flächen die einzigen sind, welche, falls $\mathfrak{r}$ und z *ganze* Functionen von u sein sollen, Integrale vom Geschlecht $\varrho \leq 1$ liefern. Wie es sich verhält, wenn $\mathfrak{r}$ und z auch gebrochene Functionen sein dürfen, bleibe dahingestellt; jedenfalls folgt aus Satz VII, dass die Anzahl der Flächen, welche elliptische Integrale ergeben, eine endliche ist.*)

Wittenberg, im April 1892.

*) In seiner vor Kurzem erschienenen Dissertation, „Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche" (Halle a. S. 1892) hat Herr E. Koebke die Fälle (4) und (5) des Herrn Kobb eingehend discutirt. (Zusatz October 1892.) St.

Sur une extension de la formule de Stirling.

Par

Ch. Hermite à Paris.

I. Je me propose de montrer que l'intégrale de Raabe,

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi},$$

donne une méthode facile pour obtenir l'expression de la quantité

$$\log [\Gamma(a+\xi)\, \Gamma(a+1-\xi)],$$

en supposant ξ compris entre zéro et l'unité, lorsque a est un grand nombre. Nous retrouverons ainsi, par une nouvelle voie, dans les cas particuliers de $\xi = 0$ et $\xi = \frac{1}{2}$, les séries:

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \sum \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n(2n-1)\, a^{2n-1}},$$

$$\log \Gamma\left(a + \tfrac{1}{2}\right) = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \sum \frac{(-1)^n (2^{2n-1} - 1) B_n}{2n(2n-1)(2a)^{2n-1}}$$

découvertes par Stirling et par Gauss, ou B_1, B_2, ... désignent les nombres de Bernoulli, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, etc. avec leurs termes complémentaires.

Je remarquerai en premier lieu qu'on tire aisément de la formule

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)e^x\right] \frac{dx}{x}$$

cette expression nouvelle de l'intégrale de Raabe, à savoir;

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{ax}}{x} - \left(a - \tfrac{1}{2}\right) e^x - \frac{e^x}{e^x - 1}\right] \frac{dx}{x}.$$

Nous concluons aussi de la même relation:

$$\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)]$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{(a+\xi)x}+e^{(a+1-\xi)x}-2e^{x}}{e^{x}-1}-(2a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Cela étant, il suffit de retrancher membre à membre, avec l'égalité,

$$2(a\log a-a+\log\sqrt{2\pi})=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{2e^{ax}}{x}-(2a-1)\,e^{x}-\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}\right]\frac{dx}{x}$$

pour parvenir à ce résultat:

$$\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)]-2(a\log a-a+\log\sqrt{2\pi})$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{\xi x}+e^{(1-\xi)x}}{e^{x}-1}-\frac{2}{x}\right]\frac{e^{ax}dx}{x}.$$

On voit que l'intégrale du second membre ne contient la quantité a que dans l'exponentielle e^{ax}; c'est cette circonstance qui permet de la développer suivant les puissances descendantes de a. Mais avant de nous occuper de ce développement, nous remarquons qu'on obtient sur le champ la valeur asymptotique pour a infini de

$$\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)].$$

Soit pour abréger:

$$F(x)=\left[\frac{e^{\xi x}+e^{(1-\xi)x}}{e^{x}-1}-\frac{2}{x}\right]\frac{1}{x};$$

cette fonction est paire, car on peut remplacer $\frac{e^{\xi x}+e^{(1-\xi)x}}{e^{x}-1}$, par l'expression $\frac{e^{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)x}+e^{-\left(\xi-\frac{1}{2}\right)x}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}$, qui change du signe avec x. Elle est nulle pour x infini, en supposant ξ moindre que l'unité comme nous l'avons admis; elle est égale pour $x=0$ à $\frac{1-6\xi+6\xi^{2}}{6}$, et reste toujours finie lorsque la variable croît de $-\infty$ à zéro. Si nous représentons par M sa plus grande valeur absolue, et par ϑ un nombre compris entre -1 et $+1$, on peut donc écrire:

$$\int_{-\infty}^{0}F(x)\,e^{ax}\,dx=\frac{M\vartheta}{a},$$

ce qui nous donne:

$$\frac{1}{2}\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)]=a\log a-a+\log\sqrt{2\pi}+\frac{M\vartheta}{2a}.$$

Soit $\xi = \frac{1}{2}$, la fonction

$$F(x) = \left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) \frac{1}{x}$$

est alors toujours négative, son maximum absolu correspond à $x = 0$ et a pour valeur $\frac{1}{12}$, nous obtenons donc en désignant par ε un nombre positif, inférieur à l'unité:

$$\log \Gamma\left(a + \tfrac{1}{2}\right) = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi} - \frac{\varepsilon}{24a}.$$

En faisant ensuite $\xi = 0$, on trouve

$$F(x) = \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) \frac{1}{x},$$

expression toujours positive, dont le maximum $\frac{1}{6}$ est encore donné pour $x = 0$. Cela étant on conclut de l'égalité $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12a},$$

ε étant positif et moindre que l'unité.

J'arrive maintenant à l'étude de la fonction $F(x)$, et je chercherai d'abord les coefficients de son développement suivant les puissances croissantes de la variable. Employons à cet effet l'égalité

$$\frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} = \xi + \sum S_n(\xi) \frac{x^n}{1.2 \ldots n}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ou $S_n(\xi)$ est un polynôme de degré $n+1$, qui représente pour ξ entier la somme, $1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots + (\xi - 1)^{n+1}$. Ce polynome satisfait à la condition,

$$S_n(1 - \xi) = (-1)^{n+1} S_n(\xi),$$

on a donc:

$$\frac{e^{(1-\xi)x} - 1}{e^x - 1} = 1 - \xi + \sum (-1)^{n+1} S_n(\xi) \frac{x^n}{1.2 \ldots n}.$$

Joignons à ces deux relations la suivante:

$$\frac{2}{e^x - 1} = \frac{2}{x} - 1 + 2 \sum (-1)^{n-1} B_n \frac{x^{2n-1}}{1.2 \ldots 2n}$$

en observant que:

$$\frac{e^{\xi x} + e^{(1-\xi)x}}{e^x - 1} = \frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{(1-\xi)x} - 1}{e^x - 1} + \frac{2}{e^x - 1},$$

on trouve aisément:

$$\frac{e^{\xi x}+e^{(1-\xi)x}}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\sum[2nS_{2n-1}(\xi)+(-1)^{n-1}B_n]\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}$$

$$(n=1,2,3\ldots)$$

et par suite:

$$F(x)=2\sum[2nS_{2n-1}(\xi)+(-1)^{n-1}B_n]\frac{x^{2n-2}}{1.2\ldots 2n}\cdot$$

Ce développement s'il était permis de l'employer dans toute l'étendue des valeurs de la variable, donnerait l'expression suivante:

$$\int_{-\infty}^{0}F(x)\,e^{ax}\,dx=\sum\frac{2nS_{2n-1}(\xi)+(-1)^{n-1}B_n}{n(2n-1)a^{2n-1}},$$

mais il n'a lieu qu'en supposant le module de x inférieur à 2π, la série que nous venons d'obtenir est divergente, il est donc nécessaire de la limiter à un nombre fini de termes et de donner l'expression du reste. Nous traiterons ce point important au moyen de la formule qu'on tire du théorème de Mr Mittag-Leffler, et qui subsiste pour toutes les valeurs de la variable:

$$F(x)=\sum\frac{4\cos 2m\pi\xi}{x^2+4m^2\pi^2}$$

$$(m=1,2,3,\ldots).$$

Elle s'obtient encore par une autre méthode que j'indiquerai à cause de sa simplicité, en cherchant au moyen du théorème de Fourier, le développement trigonométrique de $F(x)$, considérée par rapport à ξ.

Envisagons à cet effet la quantité, $e^{\xi x}+e^{-\xi x}$, et posons entre les limites -1 et $+1$, de ξ,

$$e^{\xi x}+e^{-\xi x}=\sum A_m\cos m\pi\xi.$$

$$(m=0,1,2,\ldots)$$

Sans mettre dans le second membre les sinus qui changent de signe avec ξ, on aura sous la condition de réduire l'intégrale à moitié pour $m=0$,

$$A_m=\int_{-1}^{+1}(e^{\xi x}+e^{-\xi x})\cos m\pi\xi\,d\xi.$$

Cela étant je remplace $e^{\xi x}+e^{-\xi x}$ par $2\cos i\xi x$, ce qui permet d'écrire:

$$(e^{\xi x}+e^{-\xi x})\cos m\pi\xi=2\cos i\xi x\cos m\pi\xi$$

$$=\cos(ix+m\pi)\xi+\cos(ix-m\pi)\xi.$$

La valeur cherchée s'obtient immédiatement au moyen de cette transformation, on trouve ainsi:

$$A_m = -\frac{4ix\cos m\pi \sin ix}{x^2+m^2\pi^2},$$

$$= (-1)^m \frac{2x(e^x - e^{-x})}{x^2+m^2\pi^2}$$

et par conséquent:

$$\frac{e^{\zeta x}+e^{-\zeta x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \sum \frac{(-1)^m 2x\cos m\pi\zeta}{x^2+m^2\pi^2}.$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'expression de $F(x)$ découle de ce résultat en posant $\zeta = 2\xi - 1$ de sorte que ξ a pour limites zéro et l'unité, et changeant x en $\frac{x}{2}$; voici maintenant la conséquences à en tirer.

Développons suivant les puissances croissantes de la variable la fraction $\frac{1}{x^2+4m^2\pi^2}$, on aura pour le coefficient de x^{2n-2} dans $F(x)$ la série

$$\frac{4}{(2\pi)^{2n}}\left(\cos 2\pi\xi + \frac{\cos 4\pi\xi}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi\xi}{3^{2n}} + \cdots\right),$$

d'ou l'égalité suivante:

$$\frac{2n\,S_{2n-1}(\xi) + (-1)^{n-1}B_n}{1\cdot 2\cdots 2n} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}}\left(\cos 2\pi\xi + \frac{\cos 4\pi\xi}{2^{2n}} + \cdots\right).$$

On voit qu'en supposant n un grand nombre, le second membre se réduit sensiblement à l'expression fort simple, $\frac{2\cos 2\pi\xi}{(2\pi)^{2n}}$. De la résulte la divergence du développement suivant les puissances descendantes de a par le quel nous avons représenté l'integrale $\int_{-\infty}^{0} F(x)\,e^{ax}\,dx$, il s'agit donc d'obtenir une série limitée à un nombre fini de termes avec l'expression du reste, c'est l'objet des considérations qui vont suivre.

Remplaçons dans l'intégrale la fonction $F(x)$ par son développement trigonometrique $\sum \frac{4\cos 2m\pi\xi}{x^2+4m^2\pi^2}$, on a la suite,

$$\sum 4\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos 2m\pi\xi\, e^{ax}}{x^2+4m^2\pi^2}\,dx.$$

En changeant x en $\frac{2m\pi x}{a}$, elle prend une autre forme et devient:

$$\sum \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{a\cos 2m\pi\xi\, e^{2m\pi x}}{m(x^2+a^2)}\,dx.$$

La sommation s'effectue alors au moyen de la formule,

$$-\frac{1}{2}\log(1-2\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x}) = \sum\frac{1}{m}\cos 2m\pi\xi\, e^{2m\pi x}$$

et l'on obtient pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} F(x)\, e^{ax}dx$ qui contient en exponentielle la quantité a, l'expression suivante,

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\log(1-2\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x})}{x^2+a^2}\,dx,$$

ou cette constante entre sous forme rationnelle. Employons maintenant l'identité,

$$\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{a^{2n-1}}+\frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{2n-1}(x^2+a^2)};$$

la partie entière donnera le développement suivant les puissances descendantes de a, limité à un nombre fini de termes, et les coefficients de cette série, les polynomes en ξ que nous avons précédemment obtenus, s'exprimeront par la formule:

$$\frac{2nS_{2n-1}(\xi)+(-1)^{n-1}B_n}{n(2n-1)} = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\infty}^{0} x^{2n-1}\log(1-2\cos 2\pi\xi e^{2\pi x}+e^{4\pi x})dx.$$

Nous trouvons en même temps que le reste, en s'arrêtant au terme en $\frac{1}{a^{2n-1}}$, est représenté par l'intégrale,

$$\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n}\log(1-2\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x})}{a^{2n-1}(x^2+a^2)}\,dx,$$

c'est le résultat au quel je voulais parvenir, je vais y ajouter quelques remarques.

La quantité $1-2\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x}$ est inférieure à l'unité pour toutes les valeurs négatives de x, c'est à dire dans l'étendue de l'intégrale, lorsqu'on a $2\cos 2\pi\xi > 1$, et par conséquent $\xi < \frac{1}{6}$; elle est, au contraire supérieure à l'unité si le cosinus est négatif, ce qui suppose ξ compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Mais en dehors de ces deux intervalles elle peut prendre des valeurs plus grandes ou moindres que cette limite, et son logarithme passer du positif au négatif. C'est seulement dans les cas ou le signe de $\log(1-a\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x})$ ne change pas qu'on parvient pour le reste à cette expression simple, ou ε désigne un nombre positif, plus petit que l'unité:

$$\frac{(-1)^n\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2n}\log(1-2\cos 2\pi\xi\, e^{2\pi x}+e^{4\pi x})}{a^{2n+1}}\,dx.$$

Le développement que nous avons donné du logarithme de

$$\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi),$$

possède alors exactement les mêmes propriétés et a le même caractère analytique que la série de Stirling, un terme de rang quelconque étant une limite supérieure du reste, lors qu'on s'arrête au terme précédent. Tel est le cas de la formule de Gauss ou la valeur $\xi = \frac{1}{2}$ est comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; on a alors,

$$F(x) = \left(\frac{2}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{2}{x} \right) \frac{1}{2}$$

de sorte que les coefficients résultent de l'expression connue:

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{x} + \sum (-1)^n (2^{2n-1} - 1) B_n \frac{x^{2n-1}}{1.2 \ldots 2n . 2^{2n-1}}.$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

J'étais parvenu aux résultats qu'on vient de voir lorsque j'ai remarqué qu'ils pouvaient se tirer d'une relation donnée par M^r^ Stieltjes, dans son mémoire, *sur le développement de* $\log \Gamma(x)$ (Journal de Mathématiques de M^r^ Jordan, T. V, p. 425). L'éminent géomètre établit cette proposition générale, d'un grand intérêt, qu'en désignant par $f(x)$ une fonction uniforme et continue dans le demi-plan, à droite de l'axe des ordonnées, on a:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a f(iu)}{u^2 + a^2}\, du.$$

En supposant ensuite:

$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(z+\xi)\,\Gamma(z+1-\xi)}{\Gamma^2(z)} - \frac{1}{2} \log z$$

il obtient l'égalité,

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)}{\Gamma^2(a)}$$

$$= \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a\,du}{u^2 + a^2} \log \left[\frac{e^{2\pi u} + e^{-2\pi u} - 2\cos 2\pi\xi}{(e^{\pi u} - e^{-\pi u})^2} \right],$$

et il suffit de la joindre à la relation

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a\,du}{u^2 + a^2} \log \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi u}} \right)$$

pour arriver à l'expression dont j'ai fait usage et que j'ai déduite de considérations toutes différentes. Je saisis encore l'occasion de rappeler à propos de ce beau et important travail qu'en posant:

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + J(a)$$

l'auteur parvient à la formule suivante,

$$J(a) = \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)},$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

en se fondant sur un résultat fort remarquable découvert précédemment par Mr Bourguet à savoir:

$$J(a) = \sum \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+a} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'expression de Mr Stieltjes peut s'établir facilement et se généraliser en considérant l'équation

$$\tfrac{1}{2} \log [\Gamma(a+\xi)\, \Gamma(a+1-\xi)] = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + J(a)$$

ou l'on a:

$$J(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} F(x) e^{ax}\, dx.$$

Voici d'abord un développement en série de l'intégrale qui s'obtient en mettant la fonction $F(x)$ sous cette forme:

$$F(x) = \frac{2(e^x - 1) - x[e^{\xi x} + e^{(1-\xi)x}]}{x^2(1 - e^x)}$$

et employant l'identité,

$$\frac{1}{1 - e^x} = 1 + e^x + \cdots + e^{(n-1)x} + \frac{e^{nx}}{1 - e^x}.$$

De la résulte en effet, d'une part une somme finie qui s'obtient explicitement,

$$\sum \int_{-\infty}^{0} \frac{2(e^x - 1) - x[e^{\xi x} + e^{(1-\xi)x}]}{x^2} e^{(a+m)}\, dx,$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et un terme complémentaire,

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)\, e^{(a+n)x}\, dx = 2J(a+n)$$

qui s'annule pour n infini. Cela étant, soit afin d'abréger $a+m=\alpha$, au moyen de la relation

$$\frac{e^{gx}}{x^2}=\frac{ge^{gx}}{x}-D_x\frac{e^{gx}}{x},$$

ou g est une constante, on trouve aisément,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2(e^x-1)-x\left[e^{\xi x}+e^{(1-\xi)x}\right]}{x^2}e^{\alpha x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{2(\alpha+1)e^{(\alpha+1)x}-2\alpha e^{\alpha x}-e^{(\alpha+\xi)x}-e^{(\alpha+1-\xi)x}}{x}dx-2$$

$$=2\alpha\log\frac{\alpha+1}{\alpha}+\log\frac{\alpha+1}{\alpha+\xi}+\log\frac{\alpha+1}{\alpha+1-\xi}-2.$$

Nous parvenons donc en posant:

$$\varphi(a)=a\log\frac{a+1}{a}+\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a+\xi}+\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a+1-\xi}-1,$$

à cette expression qui renferme comme cas particulier pour $\xi=0$, la série de Gudermann, à savoir,

$$J(a)=\sum\varphi(a+n)$$
$$(n=0,1,2,\ldots).$$

On en déduit ensuite une autre formule, au moyen de l'égalité suivante, qu'il est aisé de vérifier,

$$\varphi(a)=\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\frac{x(2x-1)\,dx}{(a+x)(a+1-x)}+\frac{1}{2}\int_0^{1-\xi}\frac{x(2x-1)\,dx}{(a+x)(a+1-x)}.$$

Nous avons en effet:

$$\int_0^{\xi}\frac{x(2x-1)\,dx}{(a+x)(a+1-x)}=a\log\frac{a+\xi}{a}-(a+1)\log\frac{a+1-\xi}{a+1}-2\xi,$$

$$\int_0^{1-\xi}\frac{x(2x-1)\,dx}{(a+x)(a+1-x)}=a\log\frac{a+1-\xi}{a}-(a+1)\log\frac{a+\xi}{a+1}-2(1-\xi)$$

et en ajoutant membre à membre, on trouve bien après réduction, la quantité:

$$2a\log\frac{a+1}{a}+\log\frac{a+1}{a+\xi}+\log\frac{a+1}{a+1-\xi}-2,$$

c'est à dire $2\varphi(a)$.

Soit en particulier $\xi = 0$, il vient alors

$$J(a) = \sum \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(2x-1)\,dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)};$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

écrivons ensuite:

$$\int_0^1 \frac{x(2x-1)\,dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(2x-1)\,dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x(2x-1)\,dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)}$$

et remarquons qu'en changeant x en $1-x$, on a:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x(2x-1)\,dx}{(a+n)(a+n+1-x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)(1-2x)\,dx}{(a+n)(a+n+1-x)},$$

on sera ainsi amené à la formule de M^r Stieltjes:

$$J(a) = \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 dx}{(a+n+x)(a+n+1-x)}.$$

Posons enfin

$$f(a) = \sum \frac{x(2x-1)}{(a+n+x)(a+n+1-x)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

la fonction uniforme definie par cette série, permet d'écrire:

$$J(a) = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{1-\xi} f(x)\,dx,$$

Et dans cette expression, celle des deux intégrales dont la limite supérieure est plus grande que $\frac{1}{2}$ a pour coupure toute la portion négative de l'axe des abcisses, tandis que pour l'autre les coupures sont des segments non contigus de cet axe, de longueur 2ξ, ayant leur milieu aux distances, -1, -2, -3, ..., de l'origine.

Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden.

Von

E. Busche in Bergedorf bei Hamburg.

Es möge als bekannt vorausgesetzt werden, dass man die Punkte eines p-dimensionalen ebenen Raumes durch je p reelle Coordinaten eindeutig in folgender Weise bezeichnen kann: Sind $x_i, y_i, \ldots$ die Coordinaten des Punktes P_i, so durchläuft der Punkt mit den Coordinaten

$$x_1 + (x_2 - x_1)t_2, \qquad y_1 + (y_2 - y_1)t_2, \ldots$$

die Gerade P_1P_2, wenn t_2 alle reellen Werthe annimmt, der Punkt mit den Coordinaten

$$x_1 + (x_2 - x_1)t_2 + (x_3 - x_1)t_3, \quad y_1 + (y_2 - y_1)t_2 + (y_3 - y_1)t_3, \ldots$$

die Ebene $P_1P_2P_3$, wenn t_2 und t_3 unabhängig von einander alle reellen Werthe annehmen, u. s. w., endlich der Punkt mit den Coordinaten

$$x_1 + (x_2 - x_1)t_2 + \cdots + (x_p - x_1)t_p,$$
$$y_1 + (y_2 - y_1)t_2 + \cdots + (y_p - y_1)t_p, \cdots$$

den $(p-1)$-dimensionalen ebenen Raum $P_1P_2 \ldots P_p$, wenn $t_2, \ldots t_p$ unabhängig von einander alle reellen Werthe annehmen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_p$ nicht alle zu demselben $(p-2)$-dimensionalen ebenen Raum gehören.

Die Coordinaten aller Punkte eines p-dimensionalen ebenen Raumes sind eindeutig bestimmt, wenn $p+2$ Punkte des Raumes gegeben sind, von denen keine $p+1$ in demselben $(p-1)$-dimensionalen ebenen Raume liegen, und wenn deren Coordinaten so angenommen werden, dass keine der $p+2$ Determinanten $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & \ldots & 1 \\ x_2, & y_2, & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{a-1}, & y_{a-1}, & \ldots & 1 \\ x_{a+1}, & y_{a+1}, & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p+2}, & y_{p+2}, & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Insbesondere ist also ein derartiger Raum von einer Dimension durch 3 in einer Geraden liegende Punkte bestimmt, die mit 3 von einander verschiedenen Zahlen bezeichnet sind. Aus den Coordinaten von 4 Punkten einer solchen geraden Punktreihe lässt sich bekanntlich ein Ausdruck bilden, der von den Coordinaten insofern unabhängig ist, als er unverändert bleibt, wenn man dieselben 4 Punkte mit 4 neuen Coordinaten bezeichnet, von denen 3 beliebig gewählt werden können, wenn sie nur verschieden von einander sind. Dieser Ausdruck ist das Doppelverhältniss der 4 Punkte

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Führt man nämlich auf der Geraden statt der Coordinaten x die Coordinaten y ein, so muss zwischen den Coordinaten x und y desselben Punktes eine eindeutige Beziehung, also eine Gleichung von der Form

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

bestehen, wo $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist, und durch wirkliche Ausrechnung zeigt man hiernach leicht, dass

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}$$

ist.

Irgend eine Gerade eines p-dimensionalen ebenen Raumes ist im Allgemeinen der Träger von p Punktreihen der eben beschriebenen Art, die den p Coordinaten der auf der Geraden liegenden Punkte entsprechen. Bildet man für 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 der Geraden das Doppelverhältniss ihrer x-Coordinaten oder ihrer y-Coordinaten u. s. w., so ist der Werth aller dieser Doppelverhältnisse derselbe und man kann also wieder von dem Doppelverhältniss $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ der 4 Punkte reden und es definiren durch einen der Ausdrücke

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \cdots.$$

Mindestens einer dieser Ausdrücke hat nicht die Form $\frac{0}{0}$, da höchstens $p - 1$ Coordinaten für alle Punkte der Geraden einen constanten Werth haben können.

Ich will nun zeigen, wie man durch alleinige Benutzung von ebenen Räumen zu 3 gegebenen Punkten einer Geraden den 4. Punkt so bestimmen kann, dass das Doppelverhältniss der 4 Punkte einen gegebenen rationalen Werth besitzt.

Ist zunächst der Werth des Doppelverhältnisses eine negative ganze Zahl $-n$, so ist das folgende Verfahren anzuwenden, das eine Verallgemeinerung der Construction des 4ten harmonischen Punktes mittelst des vollständigen Vierecks ist:

Durch den gegebenen Punkt Q_2 einer Geraden g_2, auf der auch die Punkte P_1 und P_2 gegeben sind, lege man einen n-dimensionalen ebenen Raum, der die Gerade g_2 nicht enthält. In diesem Raume nehme man $n+1$ Punkte $P_i (i = 3, 4, \ldots n+3)$ so an, dass keine $n+2$ der Punkte P zu demselben n-dimensionalen ebenen Raume gehören). Nun verbinde man den Punkt P_1 mit P_i durch die Gerade g_i, den Punkt P_2 mit $P_3, P_4, \ldots P_{i-1}, P_{i+1} \ldots P_{n+3}$ durch den n-dimensionalen ebenen Raum ϱ_i. Dann wird g_i von ϱ_i in einem Punkte Q_i getroffen, und die $n+1$ Punkte Q_i bestimmen einen n-dimensionalen ebenen Raum, der g_2 in dem Punkte Q' so schneidet, dass das Doppelverhältniss $(P_1 P_2 Q_2 Q') = -n$ ist.*

Beweis. Es ist klar, dass die Construction**) immer ausführbar ist, dass also die Schnittpunkte Q_i und Q' wirklich existiren. Das folgt sofort daraus, dass die $n+3$ Punkte P alle demselben $(n+1)$-dimensionalen ebenen Raume angehören; P_1 bestimmt nämlich mit den Punkten P_i einen $(n+1)$-dimensionalen ebenen Raum, in dem auch Q_2, also auch die Gerade $P_1 Q_2$, also auch P_2 liegt.

Werden als Coordinaten der $n+3$ Punkte P je $n+1$ Zahlen $x, y, \ldots$ angenommen, so dass die Determinanten $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$(r) = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & \ldots 1 \\ x_2, & y_2, & \ldots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r-1}, & y_{r-1}, & \ldots 1 \\ x_{r+1}, & y_{r+1}, & \ldots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n+3}, & y_{n+3}, & \ldots 1 \end{vmatrix}$$

für $r = 1, 2, \ldots, n+3$ sämmtlich von Null verschieden sind, so sind dadurch die Coordinaten aller übrigen Punkte des $(n+1)$-dimensionalen ebenen Raumes eindeutig bestimmt, und der Beweis für die Richtigkeit der Construction wird geführt, indem man die Coordinaten der Punkte Q_2, Q_i und Q' und darauf das Doppelverhältniss $(P_1 P_2 Q_2 Q')$ wirklich ausrechnet. Der Gedankengang hierbei ist derselbe, wie bei der Construction eines Möbius'schen Netzes. (Vergl. Möbius, Barycentrischer Calcul, Capitel 6).

---

*) Es darf also auch keiner der Punkte P_i mit Q_2 zusammenfallen, da dieser Punkt mit P_1 und P_2 und beliebigen $n-1$ der Punkte P_i in demselben n-dimensionalen ebenen Raum liegt.

**) Ich nenne das angegebene Verfahren eine Construction, weil die ganze in Wirklichkeit selbstverständlich rein algebraische Untersuchung in die Sprache der Geometrie eingekleidet ist.

Weil Q_2 auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, so muss, wenn mit ξ_r, η_r ... die Coordinaten von Q_r bezeichnet werden,

$$\xi_2 = x_1 + (x_2 - x_1)t_2,$$
$$\eta_2 = y_1 + (y_2 - y_1)t_2,$$
u. s. w.

sein, und weil Q_2 in dem durch die P_i bestimmten n-dimensionalen ebenen Raume liegt, ist auch

$$\xi_2 = x_3 + (x_4 - x_3)t_4 + (x_5 - x_3)t_5 + \cdots + (x_{n+3} - x_3)t_{n+3},$$
$$\eta_2 = y_3 + (y_4 - y_3)t_4 + (y_5 - y_3)t_5 + \cdots + (y_{n+3} - y_3)t_{n+3},$$
u. s. w.

So ergeben sich durch Gleichsetzen der beiden Werthe von ξ_2, von η_2 u. s. w. die $n + 1$ Gleichungen

$$(x_1 - x_2)t_2 + (x_4 - x_3)t_4 + (x_5 - x_3)t_5 + \cdots + (x_{n+3} - x_3)t_{n+3} = x_1 - x_3,$$
$$(y_1 - y_2)t_2 + (y_4 - y_3)t_4 + (y_5 - y_3)t_5 + \cdots + (y_{n+3} - y_3)t_{n+3} = y_1 - y_3,$$
u. s. w.,

aus denen

$$t_2 = \frac{(2)}{-(1)+(2)}$$

folgt*), wenn man die ursprünglich auftretenden Determinanten $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in bekannter Weise in Determinanten $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades verwandelt und diese mit Hülfe der hinzugefügten Reihen vereinfacht. Es ist also

$$\xi_2 = \frac{-(1)x_1 + (2)x_2}{-(1)+(2)}.$$

Da ferner

$$-(1)x_1 + (2)x_2 - (3)x_3 \pm \cdots \pm (n+3)x_{n+3} = 0$$

und

$$-(1) \quad +(2) \quad -(3) \quad \pm \cdots \pm (n+3) \quad = 0$$

als Entwicklungen von Determinanten mit je 2 identischen Colonnen, so ist auch

$$\xi_2 = \frac{\sum(-1)^i(i)x_i}{\sum(-1)^i(i)},$$

wo der Buchstabe i, wie immer, die Werthe 3, 4, ... $n + 3$ annimmt. Die beiden Ausdrücke für ξ_2 sollen kurz als der erste und zweite von einander unterschieden werden. Für η_2, . , . findet man analoge Ausdrücke, die aus den für ξ_2 gefundenen entstehen, wenn die x durch die y u. s. w. ersetzt werden.

*) Man kann offenbar über die fast vollständig willkürlichen Grössen $x, y, \ldots$ so verfügen, dass $-(1)+(2) \gtrless 0$, wenn man einen unendlich grossen Werth von t_2 vermeiden will; dasselbe gilt in dem Folgenden von $-(1)+(-1)^i(i)$.

Die Coordinaten von Q_i werden aus $\xi_2, \eta_2, \ldots$ dadurch abgeleitet, dass die Indices 2 und i vertauscht werden, also ist

$$\xi_i = \frac{-(1)x_1 + (-1)^i(i)x_i}{-(1)+(-1)^i(i)} = \frac{(2)x_2 + \sum(-1)^k(k)x_k}{(2)+\sum(-1)^k(k)}$$
$$(k = 3, 4, \ldots i-1, i+1, \ldots n+3).$$

Der Punkt Q' liegt auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 und in dem durch die Q_i bestimmten n-dimensionalen ebenen Raum. Seine erste Coordinate ist demnach

$$\xi' = \frac{-(1)'x_1 + (2)'x_2}{-(1)'+(2)'} = \frac{\sum(-1)^i(i)'\xi_i}{\sum(-1)^i(i)'},$$

wo sich die mit einem Strich versehenen Determinanten von den entsprechenden ungestrichelten dadurch unterscheiden, dass an die Stelle von $x_i, y_i \ldots$ die $\xi_i, \eta_i \ldots$ gesetzt werden, während die Zeilen $x_1, y_1 \ldots 1$ und $x_2, y_2, \ldots 1$ unverändert bleiben. Setzt man in $(i)'$ für die vorkommenden $\xi, \eta, \ldots$, also für $\xi_3, \eta_3, \ldots$; $\xi_{i-1}, \eta_{i-1}, \ldots$; $\xi_{i+1}, \eta_{i+1}, \ldots$; $\xi_{n+3}, \eta_{n+3}, \ldots$ ihre ersten Ausdrücke ein und formt die letzten n Zeilen mit Hülfe der ersten Zeile um, so ergiebt sich

$$(i)' = \frac{\Pi(-1)^k(k)}{\Pi[-(1)+(-1)^k(k)]} \cdot (i) \quad (k=3,4,\ldots i-1, i+1, \ldots n+3),$$

da nach Heraussetzen der den Elementen der letzten n Zeilen nach der Umformung gemeinsamen Factoren die Determinante (i) übrig bleibt.

Dieser Werth von $(i)'$ wird in den zweiten Ausdruck für ξ' eingesetzt, darauf der Zähler und Nenner mit $\Pi[-(1)+(-1)^i(i)]$ multiplicirt und durch $\Pi(-1)^i(i)$ dividirt. So folgt

$$\xi' = \frac{\sum[-(1)+(-1)^i(i)]\xi_i}{\sum[-(1)+(-1)^i(i)]}.$$

Setzt man für die ξ_i ihre ersten Ausdrücke ein, so heben sich die Factoren der ξ_i gegen die Nenner der ξ_i fort und man bekommt

$$\xi' = \frac{-n\cdot(1)x_1 - (1)x_1 + \sum(-1)^i(i)x_i}{-n\cdot(1)-(1)+\sum(-1)^i(i)}$$

oder mit Rücksicht auf die schon benutzten Entwicklungen von identisch verschwindenden Determinanten

$$\xi' = \frac{n(1)x_1 + (2)x_2}{n(1)+(2)}.$$

Setzt man noch, was offenbar erlaubt ist, x_2 als von x_1 verschieden voraus, so ist also

$$(P_1P_2Q_2Q) = \frac{-(1)x_1+(2)x_2}{-(1)+(2)} - x_1 : \frac{n(1)x_1+(2)x_2}{n(1)+(2)} - x_1$$
$$\frac{-(1)x_1+(2)x_2}{-(1)+(2)} - x_2 \qquad \frac{n(1)x_1+(2)x_2}{n(1)+(2)} - x_2$$
$$= \frac{(x_2-x_1)(2)}{(x_2-x_1)(1)} : \frac{(x_2-x_1)(2)}{-n(x_2-x_1)(1)} = -n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Um für ein beliebiges rationales Doppelverhältniss $\frac{m}{n}$ zu 3 gegebenen Punkten A, B, C den vierten D zu bestimmen, construire man, wenn $\frac{m}{n}$ positiv ist, zuerst in der angegebenen Weise den Punkt E so, dass

$$(ABCE) = -m$$

wird, und dann den Punkt D so, dass

$$(BAED) = -n$$

ist. Dann folgt aus der Definition des Doppelverhältnisses, dass

$$(ABCD) = \frac{m}{n}.$$

Wenn der gegebene Bruch negativ ist, gleich $-\frac{m}{n}$, so construire man zuerst D' so, dass

$$(ABCD') = \frac{m}{n};$$

und darauf den vierten mit D' conjugirten harmonischen Punkt D zu A, B, D', so ist

$$(ABCD) = -\frac{m}{n}.$$

Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen 1. O. zwischen zwei Variabeln.

(Auszug aus einem Briefe an A. Mayer.)

Von

M. Hamburger in Berlin.

Die Lectüre Ihrer merkwürdigen Notiz im 37ten Bande der Math. Ann., betreffs der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen, hat mich zu einer weiteren Verfolgung der Frage angeregt. Dabei bemerkte ich, dass man die Werthe der Integrationsconstante c als Functionen von x, welche eine gegebene vollständige Lösung wiederum in eine vollständige Lösung derselben Differentialgleichung überführen, ohne eine neue Integration ermitteln kann, dass also die Lösung Ihrer Gleichung (7) durch bloss algebraische Operationen aus einer vollständigen Lösung der gegebenen Differentialgleichung sich ableiten lässt. Gestatten Sie mir, geehrter Herr, dieses Ergebniss, das Sie vielleicht interessirt, mit einigen Worten darzulegen.

Sei

$$F(x, y, y') = 0$$

die Differentialgleichung vom n^{ten} Grade in y'. In Factoren nach y zerlegt, laute sie

$(y' - \psi_1)(y' - \psi_2) \ldots (y' - \psi_n) = 0$, $\psi_1 \ldots \psi_n$ Funct. v. x u. y.

Das Integral von

$$y' - \psi_\varkappa = 0 \quad \text{sei} \quad u_\varkappa = \text{const.},$$

dann kann die allgemeine Integralgleichung von $F = 0$ in der Form dargestellt werden

$$(u_1 - c)(u_2 - c) \ldots (u_n - c) \equiv f(x, y, c) = 0.$$

Sei

$$(u_2 - c)(u_3 - c) \ldots (u_n - c) \equiv f_1(x, y, c)$$

(vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in c), so ist $f_1(x, y, \gamma) = 0$, wo γ auch eine willkürliche Constante bedeutet, offenbar ebenfalls eine Integralgleichung von $F = 0$. Eliminirt man nun y aus den beiden Gleichungen

$$f_1(x, y, \gamma) = 0, \quad u_1 - c = 0,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen c, γ und x. Jeder durch diese Gleichung definirte Werth von c als Function von x führt das Integral $u_1 - c = 0$ der Gleichung $f = 0$ in eine ebenfalls vollständige Integralgleichung derselben Gleichung mit der willkürlichen Constanten γ über.

Denn führt man statt der Variablen y die Variable u_1 ein durch die Substitution $y = \varphi(x, u_1)$, so erhält man $f_1\big(x, \varphi(x, u_1), \gamma\big) = 0$ als Integralgleichung von $f = 0$, und indem man nach u_1 auflöst, $u_1 = \chi(x, \gamma)$. Hieraus erhellt, dass das Integral $u_1 = c$ durch die Substitution $c = \chi(x, \gamma)$ wiederum in eine Integralgleichung von $f = 0$ mit der willkürlichen Constante γ übergeht. $c = \chi(x, \gamma)$ ist aber eine Auflösung von $f_1\big(x, \varphi(x, c)\, \gamma\big) = 0$ nach c und $f_1\big(x, \varphi(x, c), \gamma\big) = 0$ eben das Eliminationsresultat von y aus $f_1(x, y, \gamma) = 0$, $u_1 - c = 0$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Ich bemerke noch, dass wenn man $F(x, y, y')$ als Product der beiden Factoren schreibt $F = (y' - \psi_1)\, F_{n-1}(x, y, y')$, wo F_{n-1} vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade in y' ist, durch die Substitution $y = \varphi(x, u_1)$ die Gleichung $F = 0$ übergeht in:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot F_{n-1}\Big(x,\ \varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big) = 0.$$

Die Gleichung $F_{n-1} = 0$ ist Ihre Gleichung (7) vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade in Beziehung auf $\frac{dc}{dx}$, wenn man beachtet, dass für $y = \varphi$ $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

$$F_{n-1}(x, y, y') = \frac{F(x, y, y')}{y' - \psi_1} = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

ist, und c für u_1 gesetzt wird.

Was nun die Frage betrifft, wie man aus einer gegebenen vollständigen Lösung $y = \varphi(x, c)$ nach dem Vorhergehenden zu den anderen vollständigen Lösungen derselben Gleichung $F(x, y, y') = 0$ gelangen kann, so setze ich, um die Aufgabe zu präcisiren, voraus, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y' überall eindeutige, z. B. rationale, Functionen von x und y sind. Ist nun $F = 0$ reductibel, so dass F in Factoren von niedrigerem als n^{ten} Grade in y' mit ebenfalls eindeutigen Coefficienten zerlegt werden kann, so muss, indem man die irreductibeln Factoren einzeln gleich Null setzt, nachgesehen werden, für welche dieser Gleichungen $y = \varphi(x, c)$ die vollständige Lösung ist. Die ebenfalls vollständigen Lösungen, die man aus ihm ohne weitere Integration, wie ich zeigen werde, erhalten kann, gehören dann nur dieser besonderen Gleichung an. Zu den anderen vollständigen Lösungen kann man nur durch neue Integration, nämlich der anderen Theilgleichungen, gelangen. Sollte eine solche Gleichung vom ersten Grade in y' sein und $y = \varphi(x, c)$ die Lösung derselben, dann kann aus ihr auf bloss algebraischem Wege keine neue vollständige Lösung von $F = 0$ erhalten werden.

Wir nehmen nunmehr an, $F = 0$ sei im obigen Sinne irreductibel in Bezug auf y' und $y = \varphi(x, c)$ eine gegebene vollständige Lösung. Nach c aufgelöst laute sie $u_1 = c$. Durch Differentiation folgt

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} y' = 0,$$

es muss daher

$$y' = \frac{-\frac{\partial u_1}{\partial x}}{\frac{\partial u_1}{\partial y}}$$

eine Wurzel der Gleichung $F = 0$, und da die Gleichung irreductibel ist, eine n-deutige Function von x, y sein. Die im Allgemeinen unendlich vielen Zweige der Integralfunction u_1 müssen daher die Eigenschaft haben, dass die aus ihnen allen resultirenden Werthe für den Quotienten $\frac{\partial u_1}{\partial x} : \frac{\partial u_1}{\partial y}$ nur n verschiedene Functionen von x und y darstellen. Wählt man nun n solche Zweige von u_1, die n verschiedene Zweige jenes Quotienten liefern, und bezeichnet sie mit $u_1, u_2, \ldots u_n$, so ist

$$(u_2 - c)(u_3 - c) \ldots (u_n - c) \equiv f(x, y, c) = 0$$

die Gleichung, die wir nach dem Obigen zur Herstellung der anderen vollständigen Lösungen gebrauchen, in denen c durch Functionen von x ersetzt wird.

Sei z. B. die Clairaut'sche Gleichung

$$y = y'x + y'^2$$

gegeben, deren vollständiges Integral $y = cx + c^2$ ist, so erhält man daraus

$$c = u_1 = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + y}.$$

Offenbar ist hier

$$u_2 = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y}$$

und

$$f_1(x, y, c) = u_2 - c = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y} - c.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + y} = c, \quad -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y} = \gamma$$

ist y zu eliminiren und man erhält

$$-x = c + \gamma, \quad \text{oder} \quad c = -x - \gamma.$$

Im Cours du calcul intégral de M. Serret t. II, p. 397, ferner findet man als Integral der Gleichung

$$y'^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right) y' - (1 + x^2)\, y - \frac{x^4}{16} = 0,$$

$$u_1 = \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = c$$

angegeben. Die Verificirung zeigt, dass das Vorzeichen von $\sqrt{1 + x^2}$ ausserhalb und innerhalb des Logarithmus gleich zu wählen ist. Die unendlich vielen Zweige der logarithmischen Function liefern alle denselben Zweig der Function $\frac{\partial u_1}{\partial x} : \frac{\partial u_1}{\partial y}$. Verschiedene Zweige dieses Quotienten erhält man nur, indem man die Vorzeichen von $\sqrt{16y+4x+x^4}$ und $\sqrt{1 + x^2}$ einmal gleich, das andere Mal verschieden wählt. Es ist demnach hier y aus

$$u_1 = \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = c,$$

$$u_2 = -\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \gamma$$

zu eliminiren und man erhält

$$c = -\gamma - 2x\sqrt{1 + x^2} - 2\log(x + \sqrt{1 + x^2}). -$$

Ueber die Reducibilität complexer Zahlensysteme.

Von

Georg Scheffers in Leipzig.

In meiner Abhandlung „Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen“*) hatte ich es bei Einführung des Begriffes der Reducibilität als unmittelbar einleuchtend bezeichnet, dass verschiedene Wege der Reduction immer zu demselben Endergebniss führen. Herr Prof. Hölder hatte die Freundlichkeit, mich auf das Irrige dieser Behauptung aufmerksam zu machen, sowie an einem einfachen Beispiele zu zeigen, dass der Satz (1), S. 318, factisch einer Einschränkung bedarf. Ich bescheide mich nunmehr dabei, den Satz nur noch in dieser Form zu beweisen:

Ein Zahlensystem mit Modul (mit einer Zahl „Eins“) kann nur auf eine Art in eine Reihe von lauter irreducibelen Systemen zerfällt werden.

Es sei mir gestattet, den Beweis hierfür unter Benutzung der in meiner früheren Arbeit gegebenen Begriffsbestimmungen zu erbringen.

Zunächst gilt der Satz:**)

I. *Hat das Zahlensystem S den Modul ε und kann man m Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ des Systems finden, für die*

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m, \tag{1}$$

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \text{ für } i \neq j \tag{2}$$

und — wenn u eine beliebige Zahl des Systems bedeutet —

$$u\varepsilon_i = \varepsilon_i u \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{3}$$

ist, so ist das System S reducibel auf m einzelne Systeme $S_1, S_2 \ldots S_m$ mit den Moduln $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$.

Wird nämlich $u\varepsilon_i = \varepsilon_i u = u_i$ gesetzt, so ist wegen $u\varepsilon = u$ und nach (1):

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_m,$$

d. h. jede Zahl des Systems kann in gewisser Weise als Summe von

*) Siehe diese Annalen, Bd. XXXIX, S. 293—390.

**) Hiervon ist Satz (2), S. 319 der früheren Abhandlung, ein Specialfall

m Zahlen $u_1, u_2 \ldots u_m$ geschrieben werden. Sei i eine bestimmte der Zahlen $1, 2 \ldots m$ und seien $u, v, w \ldots$ Zahlen des Systems S. Alsdann bilden wir in der soeben angegebenen Weise ihre Theile $u_i, v_i, w_i \ldots$ und fassen sie zusammen als das System S_i. Die in S_i enthaltenen Zahlen bilden dann wirklich für sich ein complexes Zahlensystem, da erstens, wenn $u + v = w$ ist, auch $u\varepsilon_i + v\varepsilon_i = w\varepsilon_i$, d. h. $u_i + v_i = w_i$, und zweitens, wenn $u \cdot v = w$ ist, auch nach (3) und (2) $u_i v_i = w_i$ ist. Ist nun $i \neq j$, so ist nach (2) und (3)

$$u_i v_j = u\varepsilon_i \cdot v\varepsilon_j = uv \cdot \varepsilon_i\varepsilon_j = 0,$$

also das Product zweier Zahlen verschiedener Theilsysteme $S_1, S_2 \ldots S_m$ gleich Null. Endlich ist $\varepsilon_i u_i = u_i\varepsilon_i = u\varepsilon_i^2 = u\varepsilon_i = u_i$, somit ε_i der Modul des Systems S_i. Hiermit ist Satz I bewiesen.

II. *Ist das System S mit Modul ε reducibel auf m Systeme $S_1, S_2 \ldots S_m$ mit den bez. Moduln $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$, so gelten die Formeln* (1), (2), (3).

Dieser Satz bedarf keines Beweises, ebenso der folgende:*)

III. *Ist das System S mit Modul u reducibel, so hat jedes Theilsystem einen Modul.*

Mithin ergiebt sich:

IV. *Zu jeder Zerlegung des Moduls ε eines Systems in m Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ von der Beschaffenheit* (1), (2), (3) *gehört eine Zerfällung des Systems S, und umgekehrt erhält man so alle Zerlegungen von S.*

Es handelt sich also nur noch um diese Zerlegungen des Moduls ε. Wir schicken den selbstverständlichen Satz voraus:

V. *Alle Zahlen eines Systems S mit Modul ε, die mit jeder Zahl des Systems commutativ sind, bilden für sich ein System S' mit dem Modul ε.*

Dieses System S' ist als commutatives System ein Nichtquaternionsystem. Ein solches aber hat nach meinen Untersuchungen folgende Eigenschaften**): Es enthält etwa $r + s$ Einheiten $e_1 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s$, für deren Producte die Regeln gelten:

1) jedes $e_i e_k$ drückt sich durch die vor e_i und e_k kommenden Einheiten allein linear aus.

2) Jedem e_i gehört (da das System insbesondere commutativ ist) ein bestimmtes η_μ derart zu, dass $\eta_\mu e_i = e_i \eta_\mu = e_i$ ist, während alle anderen η mit e_i multiplicirt Null ergeben.

3) Es ist $\eta_i^2 = \eta_i$, $\eta_i \eta_j = 0$ für $i \neq j$.

4) Es ist der Modul $\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_s$.

Hieraus folgt nun ohne Mühe wie S. 327 der genannten Abhandlung: Eine Zahl von S', deren Quadrat ihr selbst gleich ist, ist nur

*) Er ergiebt sich z. B. sofort aus Satz (4), S. 320 der früheren Abhandlung.

**) Siehe § 3 der früheren Abhandlung.

aus $\eta_1 \ldots \eta_s$ mit den Coefficienten 1 oder 0 linear ableitbar. Eine Zerlegung von ε in der Form (1), (2), (3) ist mithin — da $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ dem commutativen System S' angehören müssen — nur so möglich, dass man setzt:

$$\varepsilon_i = \alpha_{i1}\eta_1 + \cdots + \alpha_{is}\eta_s \qquad (i = 1, 2 \ldots m), \tag{4}$$

wo also die α_{ij} gleich 1 oder 0 sind und $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m = \varepsilon = \eta_1 + \cdots + \eta_s$ sein soll. Aus der Forderung $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ für $i \neq j$ folgt sofort: Enthält in (4) ε_i die Einheit η_μ mit dem Coefficienten 1, so kommt η_μ in keiner andern der Zahlen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ in (4) wirklich vor. Daher ist die Zerlegung von ε gemäss (1), (2), (3) nur so zu leisten, dass man $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ Summen der η mit dem Coefficienten 1 gleich setzt, doch so, dass jedes η nur in einer dieser Summen auftritt. Ist $m < s$, die Zahl der η, so wird deshalb eins der ε_i sicher eine Summe aus mehreren η sein, z. B. $\varepsilon_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Dann aber ist das zu ε_i gehörige Theilsystem S_i des Systems S noch reducibel auf Theilsysteme, in unserem Beispiel auf drei Theilsysteme mit den bez. Moduln η_1, η_2, η_3, da $\eta_i^2 = \eta_i$, $\eta_i \eta_j = 0$ für $i \neq j$ und für jede Zahl u des Systems S, mithin auch des Systems S_i das Product $u\eta_i = \eta_i u$ ist, weil die η dem in S enthaltenen commutativen System S' angehören. Die einzige Zerlegung des Systems S in lauter irreducibele Systeme besteht also darin, dass man das System S' bildet, hierin die $\eta_1 \ldots \eta_s$ aufsucht und nun die Theilsysteme aufstellt, die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$ zu Moduln haben.

Damit aber sind wir zu dem an die Spitze gestellten Satze gelangt.

Herr Hölder erbringt dafür, dass dieser Satz bei Fortlassung der Worte „mit Modul" nicht mehr gilt, das Beispiel eines Systems in zwei Einheiten, in dem alle Producte Null sind. Offenbar kann dies System auf unendlich vielen Weise in irreducibele Systeme zerfällt werden.

Ich hebe aber ausdrücklich hervor, *dass in meiner Abhandlung factisch nur von der exacten Form des Satzes der Reducibilität Gebrauch gemacht wird.*

Diese Gelegenheit möchte ich benutzen, um noch einige Correcturen meiner früheren Abhandlung anzugeben*). Zu den damals gebrachten Litteraturnachweisen seit 1867 ist noch hinzuzufügen:

---

*) S. 351 meiner Abhandlung habe ich in einer Fussnote meine Priorität gegenüber Herrn Rohr in Marburg in Bezug auf die Bestimmung der Systeme in 5 Einheiten gewahrt. Wie ich erfahre, hat man diese Anmerkung in einer mir durchaus fernliegenden Weise verstanden. Ich benutze daher diese Stelle, um ausdrücklich zu bemerken, dass es mir nie in den Sinn gekommen ist, damit die Selbstständigkeit der Arbeit des Herrn Rohr irgendwie anzuzweifeln, was schon daraus hervorgeht, dass Herr Rohr den Fall $k = 3$ nicht behandelt hat und eine ganz andere Methode benutzte. In meiner ersten Aufstellung aller Systeme in 5 Einheiten in den Leipziger Berichten 1889 hatte ich ein System an

Laguerre, Sur le calcul des systèmes linéaires. Journal de l'Ecole polyt., Cah. 42 (1867), S. 215—264.

Die Ausfüllung dieser Lücke danke ich einem gütigen Hinweise von Herrn Prof. Klein. Ferner sind einige störende Druckfehler zu corrigiren:

S. 334, letzte Zeile ist das Wort „nach" zu streichen.

S. 346, Z. 1 v. o. ist η_k statt η^k zu lesen.

S. 362, Z. 6 v. u. ist w^{r+1} statt w^r das erste Mal zu lesen.

S. 377, Z. 1 v. o. ist ε_α statt e_α und Z. 8. v. o. ist zu lesen:

$$\eta'_\beta e_\gamma = \Sigma g_{\beta\gamma j} \eta'_j.$$ *)

falscher Stelle eingereiht. Dieser Fehler, der sich bei Herrn Rohr nicht findet, ist aber schon, ehe ich Herrn Rohr's Ergebnisse erfuhr, von mir erkannt und z. B. Herrn Study in Marburg mitgetheilt worden.

*) In seiner soeben erschienenen inhaltreichen Abhandlung in diesen Annalen, Bd. XLI, S. 83—156, nimmt Herr Molien einigemale Bezug auf meine Arbeiten. Obgleich ich mich mit mehreren Bemerkungen nicht einverstanden erklären kann, sehe ich hier von einem näheren Eingehen darauf ab, weil an anderer Stelle demnächst die Rede davon sein wird.

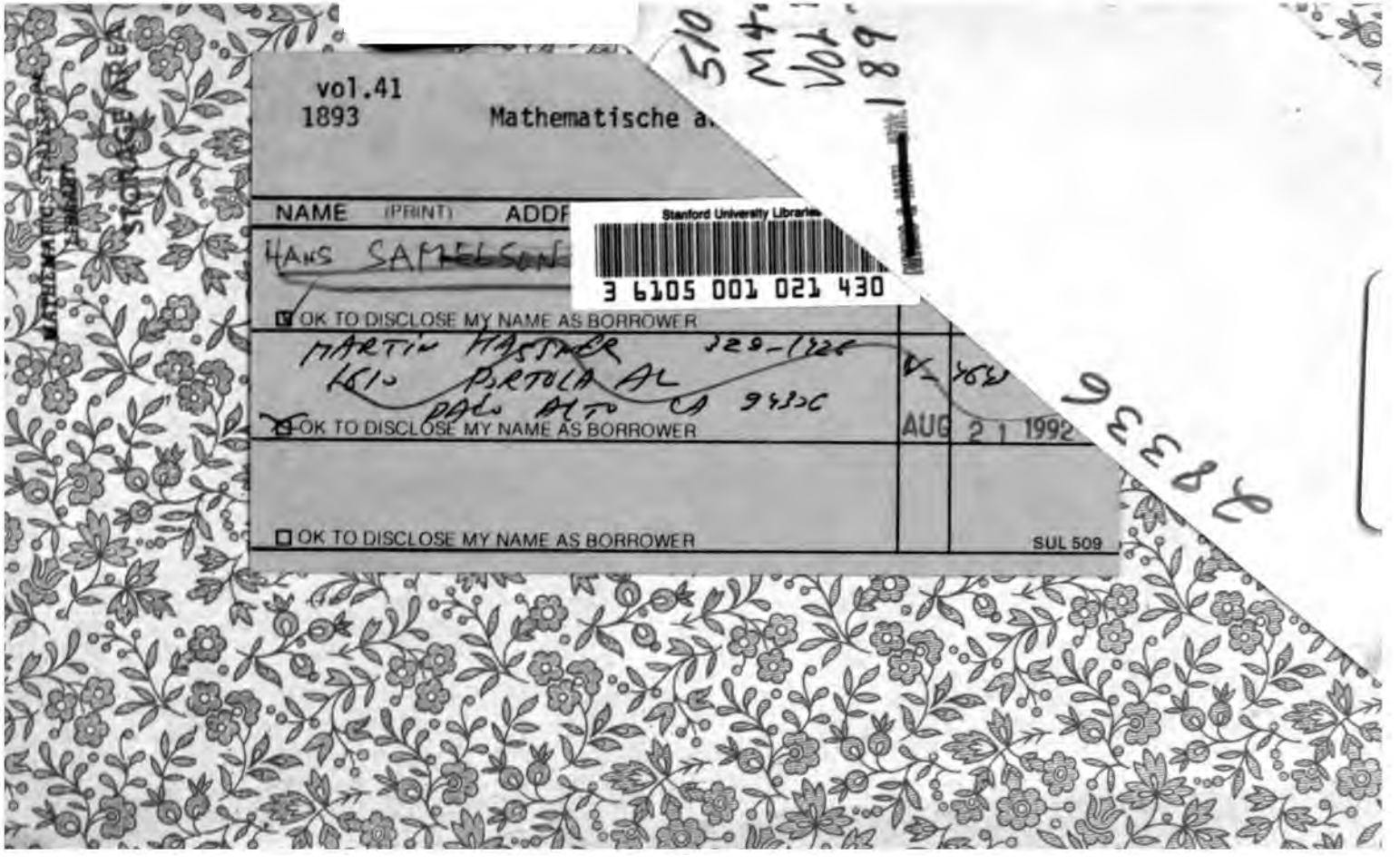
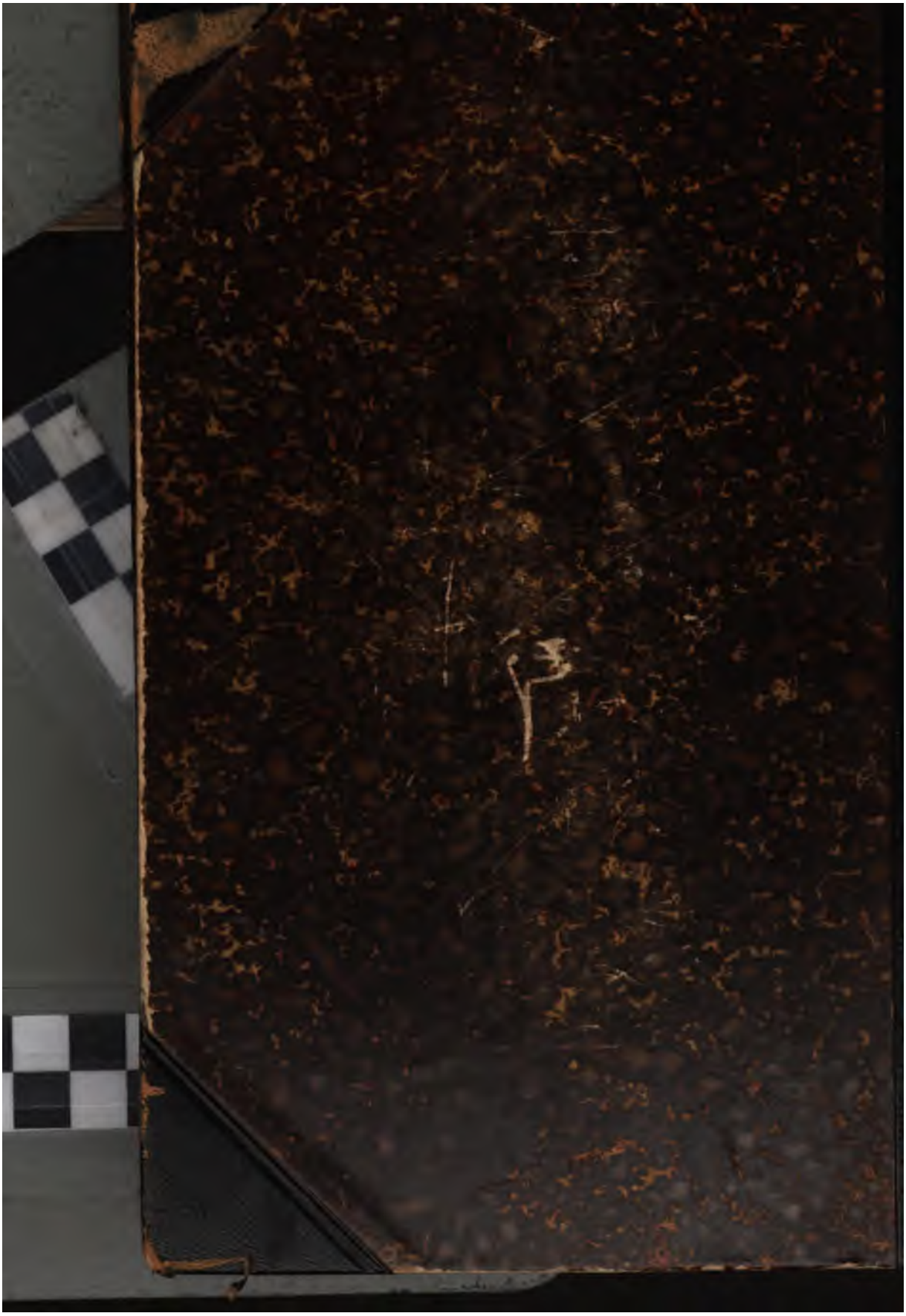
To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

PHYSICS & MATH. - STAT.

MAR 2 3 '56

OCT 6 1972

AUG 2 1 1992


vol.41
1893
Mathematische a
NAME (PRINT)
ADDR
HANS SAMELSON
OK TO DISCLOSE MY NAME AS BORROWER
MARTIN HASTER 329-1226
1610 PORTOLA AL
PALO ALTO CA 94306
OK TO DISCLOSE MY NAME AS BORROWER
AUG 21 1992
OK TO DISCLOSE MY NAME AS BORROWER
SUL 509
Stanford University Libraries
3 6105 001 021 430
STORAGE
510
Math.
Vol.
1893
7933